

次表面分岔裂纹的力学行为*

孙 奇¹, 吴金波², 江晓禹¹

(西南交通大学 力学与航空航天学院, 成都 610031)

摘要: 在复杂荷载作用下,利用分布位错技术(DDT)对半无限大平面内的分岔裂纹问题进行研究,并进行了正确性验证.根据等效应力强度因子判据,初步解释了裂纹产生分岔的原因;研究了不同埋深、荷载比值、分支长度比值、分岔角度情况下的分岔裂纹尖端的应力强度因子;同时,研究了多分支分岔裂纹,计算结果与有限元结果吻合.结果显示:埋深越深,分岔裂纹扩展越困难,当埋深为 $d/a = 1.5$ 时,分支裂尖应力强度因子削弱程度可达 15% 左右;较长分支会极大地抑制短分支的扩展,当两分支裂纹长度比达到 $b/c = 2$ 以上时,屏蔽效应可达 50% 以上;另外,分岔角度和荷载比值会改变分岔裂纹主导的扩展模式.

关键词: 分岔裂纹; 分布位错技术; 等效应力强度因子判据; 应力强度因子; 多分支分岔裂纹
中图分类号: O346 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.440121

Mechanical Behaviors of Subsurface Bifurcating Cracks

SUN Qi¹, WU Jinbo², JIANG Xiaoyu¹

(School of Mechanics and Aerospace Engineering, Southwest Jiaotong University,
Chengdu 610031, P.R.China)

Abstract: Under complex loads, the distributed dislocation technique (DDT) was used to discuss the bifurcating crack problem in a semi-infinite plane, and its correctness was verified. Based on the criterion for the equivalent stress intensity factor, the cause for crack bifurcation was preliminarily explained. The stress intensity factors of bifurcating cracks under different buried depths, loading ratios, bifurcation length ratios, and bifurcation angles were calculated. The multi-branch bifurcating crack was also calculated, with the results agreeing well with the finite element method. The results show that, the deeper the buried depth is, the more difficult the bifurcating crack propagation will be. When the burial depth reaches $d/a = 1.5$, the stress intensity factor at the bifurcating crack tip will decrease by about 15%. Moreover, the longer branch will greatly inhibit the extension of the short branch. When the crack length ratio of the 2 branches reaches more than $b/c = 2$, the shielding effect will reach more than 50%; In addition, the bifurcation angles and loading ratios will change the dominant propagation mode of bifurcating cracks.

Key words: bifurcating crack; distributed dislocation technique; criterion for the equivalent stress intensity factor; stress intensity factor; multi-branch bifurcating crack

* 收稿日期: 2023-04-21; 修订日期: 2023-09-11

基金项目: 国家自然科学基金项目(11472230)

作者简介: 孙奇(1999—),男,硕士生(E-mail: 3271362726@qq.com);

江晓禹(1965—),男,教授,博士(通讯作者. E-mail: xiaoyujiang8@sina.com).

引用格式: 孙奇, 吴金波, 江晓禹. 次表面分岔裂纹的力学行为[J]. 应用数学和力学, 2023, 44(12): 1453-1462.

0 引言

随着现代工业的迅速发展,各种实际的工程问题离不开断裂理论的指导,以往研究中,多认为裂纹沿着其延长线进行扩展,却忽略了对裂纹二次断裂现象的研究.二次断裂现象是指裂纹沿直线扩展之后出现方向改变的现象,裂纹分岔就是一种重要的二次断裂现象.分岔裂纹常见于脆性材料、塑性较小的材料以及金属应力腐蚀问题中.通过对分岔裂纹的研究,可以初步预测裂纹是否会分岔、计算分支应力强度因子等,因其具有重要的工程意义,故长期受到断裂力学领域的关注.

从20世纪开始,国内外学者均对分岔裂纹做了大量工作,其中:Theocaris等^[1]运用复势法研究了无限各向同性弹性板上对称分岔裂纹的平面问题,给出了分岔裂纹尖端的应力强度因子.Lam等^[2]利用分布位错技术解决了圆形夹杂物与嵌入无限弹性介质中对称分岔裂纹之间的相互作用的问题,讨论了不同模量的夹杂对分岔裂纹扩展的影响.Yan^[3]利用分布位错技术计算了无限大板中多条分岔裂纹相互作用的问题,给出了裂纹尖端附近的应力场.Yavuz等^[4]把裂纹尖端位移不连续单元与恒位移不连续单元结合起来,为分岔裂纹的应力强度因子计算提供了一种更为精确的方法.Dahlan等^[5]利用有限元方法研究了单轴牵引作用下二维板上的静态对称分支和非对称分岔裂纹.魏华建等^[6]利用扩展有限元方法(XFEM)对分岔裂纹的非尖端破坏进行了讨论.Kornev等^[7]采用有限元法求解双对称分岔裂纹,并使用Neuber Novozhilov型断裂准则和充分断裂准则计算得到了临界断裂参数.Chen等^[8]在扩展有限元法的框架下,提出了一种研究复杂分岔裂纹扩展的增强扩展有限元方法.张端等^[9]利用3D打印技术制作了不同形态的分岔裂纹,并研究了其在不同起裂荷载下的力学行为.

上述文献中的主要研究方法包括数值法、有限元方法、实验法、解析法,但其大多数研究的仅仅是在简单荷载下的分岔裂纹,且将裂纹所在平面简化为无穷大的情况,对于复杂荷载下的研究以及自由边界对分岔裂纹产生影响的研究仍有所不足.本文利用分布位错技术研究了半无限大平面内次表面分岔裂纹在复杂荷载下的力学行为.本文的主要研究内容为:根据等效应力强度因子判据,初步解释了裂纹产生分岔的原因;计算了分岔裂纹在不同埋深、荷载比值、分支长度比值、分岔角度下分支的应力强度因子;最后,还研究了多分支分岔裂纹的情况,其结果与有限元对照良好.此外,分布位错技术相较于有限元,略去了每次模型改变后繁琐的网格划分工作,只需要改变裂纹的位置参数便可进行计算,是一种便捷的研究分岔裂纹的数值方法.

1 原理

1.1 问题描述

本文欲用理论方法(分布位错技术)研究分岔裂纹,重点是求解分支尖端的应力强度因子,由此讨论不同工况下分岔裂纹的力学行为.在图1中考虑将分岔裂纹建模为三条相交的直裂纹,分别表示为裂纹1(即主裂纹AD)、2(即DB裂纹分支)、3(即DE裂纹分支). a, b, c 分别表示主裂纹1、分支裂纹2、分支裂纹3的裂纹半长; d 表示主裂纹中心到自由边界的距离; θ_B, θ_E 分别表示分支裂纹2、3延长线与主裂纹延长线的夹角; A, B, E (为了应力强度因子表达式与断裂韧性有所区别)表示分岔裂纹尖端; D 表示分岔点.

1.2 叠加原理

基于Bueckner定理^[10],将主问题分解成两个子问题:子问题1,无裂纹时,外载在半无限弹性平面内产生应力的问题;子问题2,无外载时,半无限弹性平面内裂纹区域的刃位错产生应力的问题.最后根据裂纹面应力条件,将以上两个子问题联立求解.

1.3 建立位错密度积分方程

在半无限大板中由位错引起的应力分量由下式给出^[10-11]:

$$\bar{\sigma}_{ij}(x, y) = \frac{2\mu}{\pi(\kappa + 1)} [G_{xij}(\xi, x, y)b_x + G_{yij}(\xi, x, y)b_y], \quad ij = xx, yy, xy, \quad (1)$$

其中 κ 是Kolosov常数,平面应变时 $\kappa = 3 - 4\nu$,平面应力时 $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$; ν 是Poisson比; μ 是剪切模量; b_x 和 b_y 代表Burgers矢量在 x, y 方向上的分量; G_{xij} 和 G_{yij} 是位错影响函数,第一个下标表示Burgers矢量,后两个下标表示应力分量,其表达式可参考文献[11].为了方便在局部坐标系下进行计算,需要进行以下坐

标变换:

$$\begin{cases} b_x = \cos(\theta)b_x - \sin(\theta)b_y, \\ b_y = \sin(\theta)b_x + \cos(\theta)b_y, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \bar{\sigma}_{xx} = \cos^2(\theta_1)\bar{\sigma}_{xx} + \sin^2(\theta_1)\bar{\sigma}_{yy} + \sin(2\theta_1)\bar{\sigma}_{xy}, \\ \bar{\sigma}_{yy} = \sin^2(\theta_1)\bar{\sigma}_{xx} + \cos^2(\theta_1)\bar{\sigma}_{yy} - \sin(2\theta_1)\bar{\sigma}_{xy}, \\ \bar{\sigma}_{xy} = -\sin^2(\theta_1)\bar{\sigma}_{xx} + \sin^2(\theta_1)\bar{\sigma}_{yy} + \cos(2\theta_1)\bar{\sigma}_{xy}, \end{cases} \quad (3)$$

其中 b_x, b_y 代表任意局部坐标系下的 Burgers 矢量分量; $\bar{\sigma}_{ij} (ij = xx, yy, xy)$ 代表任意局部坐标系下由位错产生的应力分量; θ, θ_1 分别代表位错列和裂纹面所在局部坐标相对于主坐标的偏转角. 将方程(2)、(3)代入方程(1)中, 便可以得到局部坐标系上的位错影响函数:

$$\bar{\sigma}_{ij}(x, y) = \frac{2\mu}{\pi(\kappa + 1)} [G_{xij}(\xi, x, y, \theta, \theta_1)b_x + G_{yij}(\xi, x, y, \theta, \theta_1)b_y], \quad ij = xx, yy, xy. \quad (4)$$

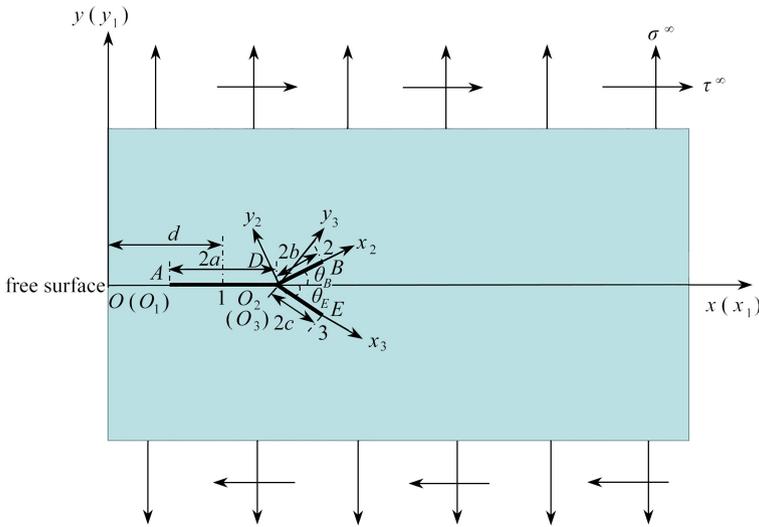


图 1 复杂荷载下的半无限平面分岔裂纹

Fig. 1 The semi infinite plane bifurcating crack under complex loads

在后续的计算中只需要变化 $\xi, x, y, \theta, \theta_1$, 就可以得到由任意局部坐标系上的位错在任意局部坐标系上所产生的应力分量. 以裂纹 1 对裂纹 2 的影响函数作为例子进行解释, 如图 2 所示, 其中红色图形代表刃型位错列. 只需进行以下替换: $\xi = \xi_1, x = x_2 \cos(\theta_B) + d + a, y = x_2 \sin(\theta_B)$, $\theta = 0, \theta_1 = \theta_B$ 即可得到. 其中 ξ_1 是裂纹 1 上位错的全局横坐标; x 是裂纹 2 的全局横坐标, y 是裂纹 2 的全局纵坐标减去裂纹 1 的位错全局纵坐标; θ, θ_B 分别代表裂纹 1 和裂纹 2 坐标系的偏转角; 其余影响函数可用类似方法获得.

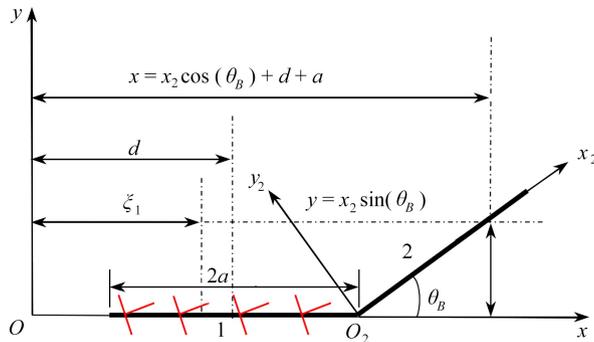


图 2 坐标变换示意图

Fig. 2 Schematic diagram of coordinate transformation

注 为了解释图中的颜色, 读者可以参考本文的电子网页版本, 后同.

现在基于分布位错技术,将每条裂纹视为未知的连续分布的刃位错^[11],表示为 $B_l(\xi_k)$,其中 $l=1,2$ 分别代表 x,y 方向上的位错, ξ_k 代表第 k 条裂纹分布位错的局部坐标($k=1,2,3$)。因此,对于每一条裂纹而言,通过叠加包括自己在内的其他裂纹位错所产生的应力分量与外载荷产生的应力分量,并结合裂纹面的无牵引条件,可以得到

$$\sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^2 \int_{a_{kl}}^{a_{k2}} G_{ij}^{kn}(\xi, x, y, \theta, \theta_1) B_l(\xi_k) d\xi_k + \tilde{\sigma}_{ij}^n(x, y) = 0, \quad n = 1, 2, 3; ij = yy, xy, \quad (5)$$

式中的 a_{k1}, a_{k2} 分别表示第 k 条裂纹分布位错积分的上下限。三条裂纹积分限分别为 $a_{11} = d - a, a_{12} = d + a; a_{21} = 0, a_{22} = 2b; a_{31} = 0, a_{32} = 2c$ 。 $\tilde{\sigma}_{ij}^n(x, y) = 0$ ($ij = yy, xy$)表示任意局部坐标系下外载荷产生的应力分量,可以由文献[11]得到。由于 x 方向的正应力不会影响裂纹尖端的应力强度因子,故此处不讨论。

2 奇异积分方程的数值解

采用基于 Gauss-Chebyshev 求积方法^[12]的数值技术来求解积分方程组(5),首先需要对积分区域进行归一化处理:

$$\xi_k, x_k = \frac{a_{k2} - a_{k1}}{2} s_k^I, t_k^R + \frac{a_{k2} + a_{k1}}{2}, \quad (6)$$

其中

$$\begin{cases} s_k^I = \cos\left(\frac{\pi(2I-1)}{2M}\right), & I = 1, 2, \dots, M, \\ t_k^R = \cos\left(\frac{\pi R}{M}\right), & R = 1, 2, \dots, M-1, \end{cases} \quad (7)$$

a_{k1}, a_{k2} 的物理含义在上文已经给出; s_k^I, t_k^R 代表相应的离散积分点与配置点; M 表示离散方程的个数。将 $B_l(\xi_k)$ 写成基本函数 $w(s_k)$ 与未知函数 $\phi_l(s_k)$ 的乘积:

$$B_l(\xi_k) = B_l(s_k) = w(s_k) \phi_l(s_k) = \frac{\phi_l(s_k)}{\sqrt{1-s_k^2}}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (8)$$

将方程(6)、(7)、(8)代入方程(5),得到离散化的方程:

$$\frac{1}{M} \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^2 \phi_l(s_k^I) G_{ij}^{kn}(s_k^I, t_n^R) + \tilde{\sigma}_{ij}^n(t_n^R) = 0, \quad n = 1, 2, 3; ij = yy, xy. \quad (9)$$

方程(9)总共有 $6M-6$ 个线性方程,但是总共需要求解 $6M$ 个未知数,因此需要额外补充6个方程。所谓的封闭或者单值条件^[12]提供了额外的两个方程式,这两个方程表示次表面分岔裂纹在 x 与 y 方向上的净位错位均为零。 a_k 代表第 k 条裂纹的半长,

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^3 \left(\frac{a_k \cos(\theta_k)}{M} \sum_{l=1}^M \phi_x(s_k^I) - \frac{a_k \sin(\theta_k)}{M} \sum_{l=1}^M \phi_y(s_k^I) \right) = 0, \\ \sum_{k=1}^3 \left(\frac{a_k \sin(\theta_k)}{M} \sum_{l=1}^M \phi_x(s_k^I) + \frac{a_k \cos(\theta_k)}{M} \sum_{l=1}^M \phi_y(s_k^I) \right) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

由于主/分支裂纹交点(图1中的点 D)处的奇异性小于 $1/2$,文献[2]将分岔点处的应力强度因子处理为0,其实际可用的方程个数为6个。文献[2]经过比对不同的方程所产生的结果,选出了其中最佳的4个额外方程如下:

$$\begin{cases} \phi_1(s_1 = 1) = \phi_2(s_1 = 1) = 0, \\ \phi_1(s_2 = -1) = \phi_2(s_2 = -1) = 0 \quad \text{or} \quad \phi_1(s_3 = -1) = \phi_2(s_3 = -1) = 0, \end{cases} \quad (11)$$

其中 $\phi_l(s_k = \pm 1)$ 可以通过文献[12]中的方法进行插值得到。至此,未知数个数与所需方程数相等,方程(9)可以得到解答。裂纹尖端的应力强度因子由 $\phi_l(t_k = \pm 1)$ 推出,例如尖端 E 的应力强度因子表示为

$$K_{I,II}^E = \frac{2\mu}{\kappa+1} \sigma \sqrt{\pi c} \phi_{1,2}(s_3 = 1). \quad (12)$$

3 结果验证

为了验证上述模型的正确性,根据文献[13]将模型简化为如图 1 所示的仅受拉伸荷载的分岔裂纹,其具体的参数设置如下: $d/a = 100, b/a = 0.25, c/b = 0.5, \theta_B = 30^\circ$. 归一化方法是用实际的裂纹尖端应力强度因子除以半长为 $a + c$ 的中心裂纹承受相同拉伸荷载时的应力强度因子 K^* . 以裂纹尖端 B 为例:归一化的 I 型和 II 型应力强度因子分别为 K_{IB}^* 和 K_{IIB}^* , 其值分别为 K_{IB}^*/K^* 和 K_{IIB}^*/K^* , 其中

$$K_{IB} = 2\mu/(\kappa + 1) \cdot \sigma \sqrt{\pi b} \phi_1(s_2 = +1), K^* = 2\mu/(\kappa + 1) \cdot \sigma \sqrt{\pi(a + c)},$$

K_{IE}^* 和 K_{IIE}^* 同理可得.

如图 3 所示,对比本文理论计算的结果与已有文献的结果,发现本文的理论计算结果与文献计算结果相差无几,足以说明本文理论模型的正确性,可以用于后续的计算.

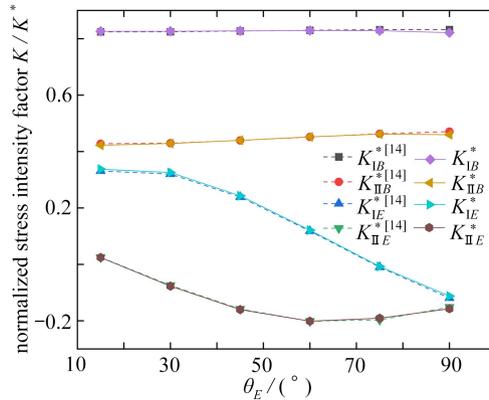


图 3 非对称分岔裂纹的计算结果对照图

Fig. 3 Comparison of calculation results of asymmetric bifurcating crack

4 结果与分析

4.1 分岔裂纹产生的原因及过程

文献[14]研究发现,如果根据最大周向拉应力准则判断裂纹扩展角度,其预测的裂纹扩展角度变化过于剧烈,这与真实的实验结果及事实不符.因此采用文献[14]中的方法:如图 4 所示,将裂纹沿各个不同的方向扩展 $b = 0.1a$, 计算裂纹在不同方向上的等效应力强度因子 $K_{eff} = K_I + |K_{II}|$, 将其最大值所在的角度视为裂纹下一步的扩展角度.参数设置如下:荷载 $\tau/\sigma = 0.1, d/a = 1.5$.从图 4 中可以看出, K_{eff} 在 -35° 和 20° 时均出现了峰值,这说明裂纹在 -35° 和 20° 都容易发生扩展,从而导致出现分岔的情况.

4.2 埋入深度 d/a 对 K_I^* 和 K_{II}^* 的影响

将图 1 中的参数设置如下: $b/a = 0.1, c/b = 0.5, \theta_B = 30^\circ$, 受单向拉伸荷载,归一化系数均选择 $K^* = 2\mu/(\kappa + 1) \cdot \sigma \sqrt{\pi(a + c)}$, 后续不再赘述.本小节将研究埋置深度 d/a 对分支尖端应力强度因子的影响.

由图 5 可知,对裂纹尖端 B 来说, K_{IB}^* 和 K_{IIB}^* 会随着 d/a 的增大而减小.对尖端 E 来说, K_{IE}^* 随着 d/a 的增大而减小,而 K_{IIE}^* 的变化趋势并不明显.这说明随着埋置深度的增加,分岔裂纹向内部扩展会更加困难,且长分支受影响会更加明显.当埋深超过 $d/a = 1.3$ 以上时,分支尖端的应力强度因子开始出现明显削弱, $d/a = 1.5$ 时,较长分支的应力强度因子最大削弱程度可达 15%.由图 5(a)可知, θ_B 不变的情况下, K_{IB}^* 随着分岔角 θ_E 的增加,先呈一定比例的增加,在达到峰值后有略微下降并逐渐趋于平稳,其峰值在 $\theta_E = 20^\circ \sim 30^\circ$ 左右.由图 5(b)可知, K_{IIB}^* 随着 θ_E 的增加而逐渐增加,这是因为随着分岔角度增加导致分支裂纹尖端距离增大,互相屏蔽的作用减小.由图 5(c)可知,随着 θ_E 的增加, K_{IE}^* 逐渐趋向于零,即裂纹即将发生闭合.由图 5(d)可知, K_{IIE}^* 先减小后增加,在 $\theta_E = 70^\circ \sim 80^\circ$ 左右时, K_{IIE}^* 绝对值达到最大,随着 θ_E 的进一步增加, K_{IIE}^* 绝对值再次发生减小.

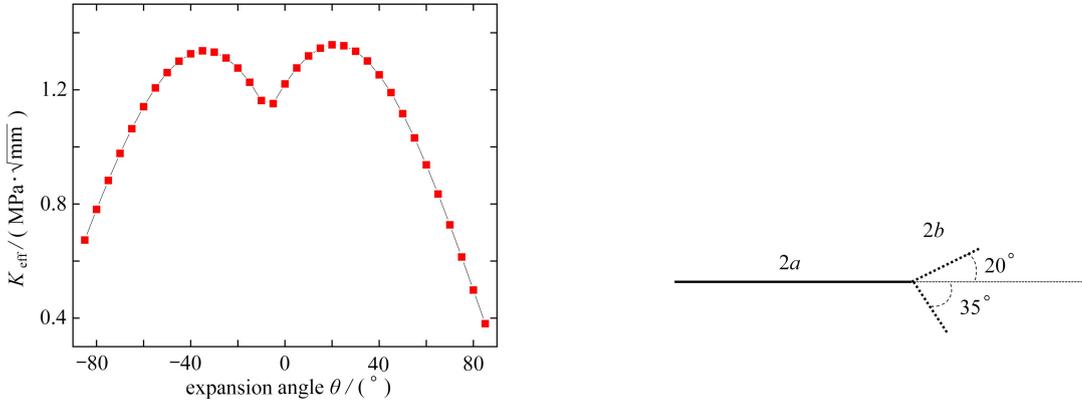


图4 不同角度下的等效应力强度因子及裂纹分岔示意图

Fig. 4 Schematic diagram of the equivalent stress intensity factor and the crack bifurcation at different angles

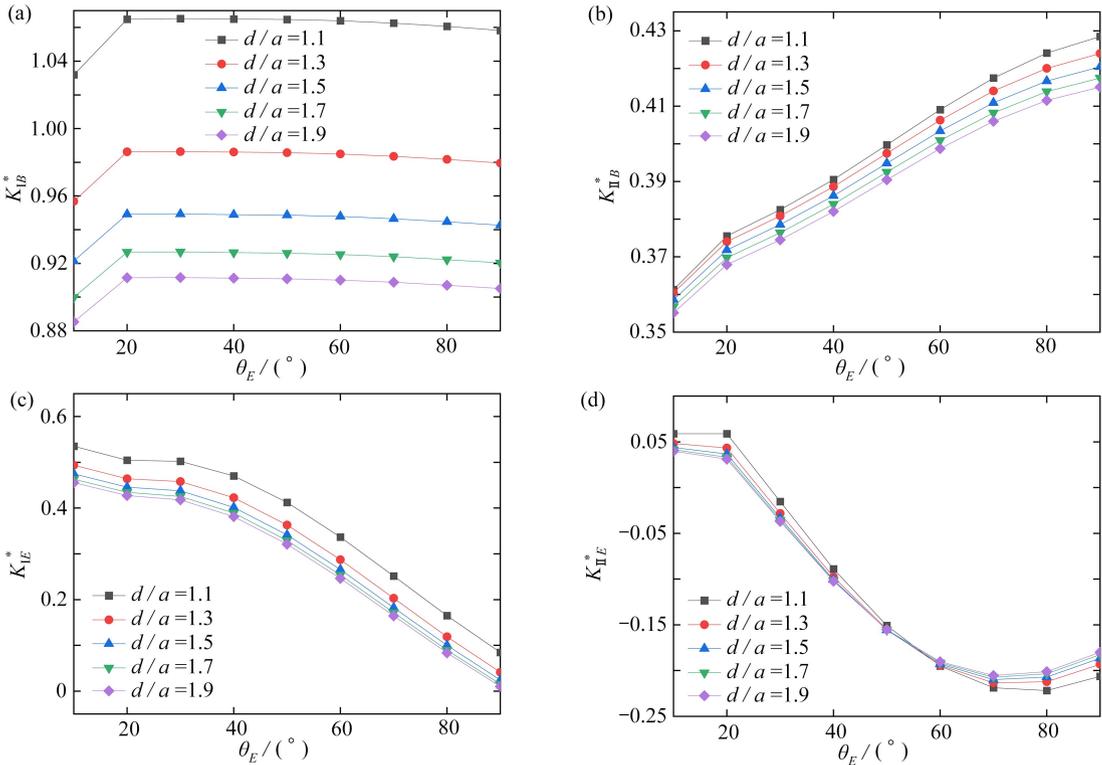


图5 埋置深度对归一化应力强度因子的影响

Fig. 5 Effects of burial depths on normalized stress intensity factors

4.3 荷载比值 τ/σ 对 K_{I}^* 和 K_{II}^* 的影响

令 $b/a = 0.1, c/b = 0.5, d/a = 1.1, \theta_B = 30^\circ$, 研究荷载比值 τ/σ 对应力强度因子的影响, 从图 6 可知: 对裂纹尖端 B 来说, $K_{I B}^*$ 随着切应力比值增大而迅速减小; 而对 $K_{II B}^*$ 来说, 随着切应力比值的增加, 其数值迅速上升, 且拉伸荷载和切向荷载均会增强 $K_{II B}^*$. 这说明荷载比值的改变会显著影响分支 DB 的扩展方式, 当切应力与正应力大小相当时, 其由 I 型扩展过渡到 II 型扩展. 对尖端 E 来说, 由于分支方向不同, $K_{I E}^*$ 和 $K_{II E}^*$ 随着荷载比值的增加而增大, 即荷载比值增大可以加速分支 DE 的扩展.

由图 6(a) 可知, 在 θ_B 不变的情况下, 相较于荷载比值对 $K_{I B}^*$ 产生的影响, θ_E 产生的影响并不显著. 由图 6(b) 可知, 随着 θ_E 的增加, $K_{II B}^*$ 整体呈现增大的趋势. 当 $\tau/\sigma < 0.5$ 时, 当 θ_E 超过 40° 后, $K_{II B}^*$ 开始有明显变化, τ/σ 比值为 0.7 和 0.9 时, $K_{II B}^*$ 在略微减小后逐渐增大. 由图 6(c) 可知, 当 $\tau/\sigma < 0.5$ 时, 随着 θ_E 的增加, $K_{I E}^*$ 逐渐减小, τ/σ 比值为 0.7 和 0.9 时, $K_{I E}^*$ 先增大逐渐减小, 峰值发生在 $\theta_E = 40^\circ$ 左右. 这说明荷载比值的

改变会显著增加分支 DE 的 I 型扩展角度峰值.由图 6(d)可知,随着 θ_E 的增加,当 θ_E 超过 20° 后, $K_{II E}^*$ 开始有明显变化,正向 $K_{II E}^*$ 逐渐减小,随后反向 $K_{II E}^*$ 逐渐增加,即分支 DE 滑动方向发生改变.

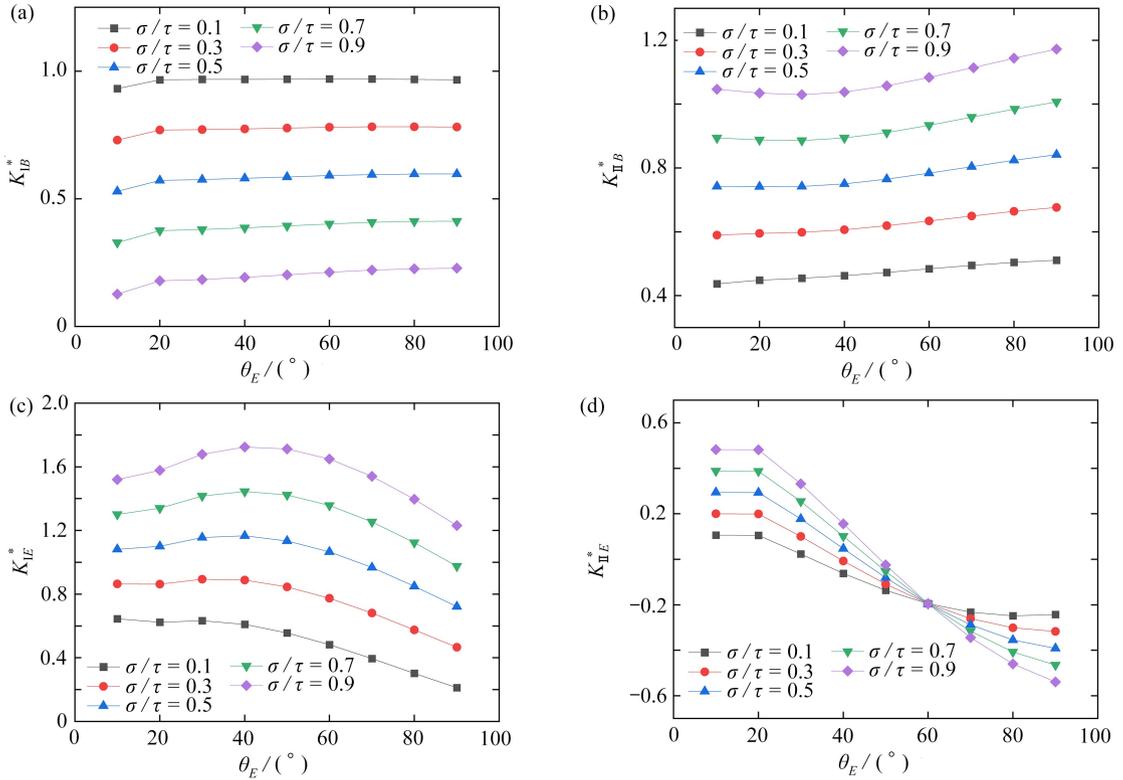
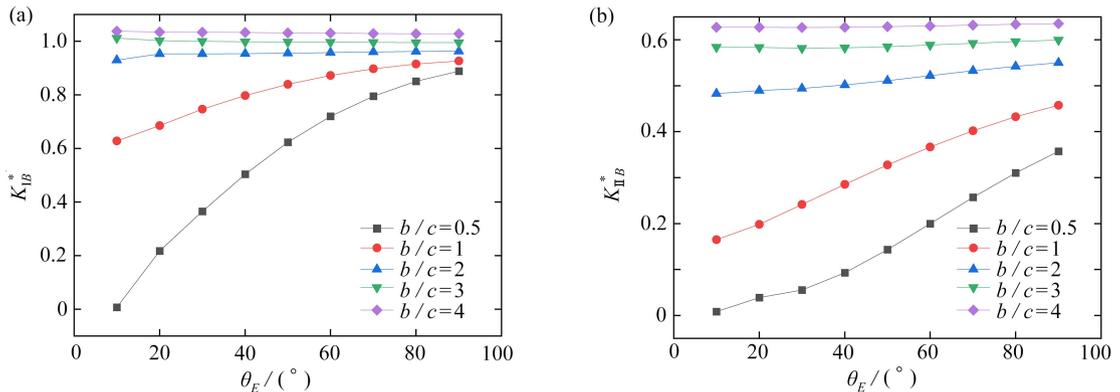


图 6 荷载比值对归一化应力强度因子的影响

Fig. 6 Effects of load ratios on normalized stress intensity factors

4.4 分支长度比值 b/c 对 K_I^* 和 K_{II}^* 的影响

令 $c/a = 0.1, d/a = 1.1, \theta_B = 30^\circ$ 以及 $\tau/\sigma = 0.1$, 研究分支长度比值 b/c 对应力强度因子的影响.由图 7 可知,对于尖端 B 来说,随着其所在分支长度的增加, K_{IB}^* 和 $K_{II B}^*$ 均在迅速的增大后趋于平稳,这说明,分岔裂纹的分支长度越长,其应力强度因子越大.对于尖端 E 来说,随着分支 DB 长度的增加, K_{IE}^* 和 $K_{II E}^*$ 均有不同程度的下降.这说明较长的分支对较短的分支有一定的抑制作用,当分支比值仅为 2 时,较短分支的应力强度就被削弱了大约 50%.由图 7(a)、7(b)可知: b/c 较小时, K_{IB}^* 和 $K_{II B}^*$ 随着 θ_E 的增加而增加; b/c 较大时, θ_E 对于 K_{IB}^* 和 $K_{II B}^*$ 的影响并不显著.由图 7(c)可知: b/c 较小时, K_{IE}^* 随着 θ_E 的增加而减小; b/c 较大时, K_{IE}^* 随着 θ_E 先增加后减小,峰值大约在 $\theta_E = 20^\circ \sim 30^\circ$.由图 7(d)可知: $K_{II E}^*$ 在 b/c 较小的时候,均是负值,且其绝对值随着 θ_E 的增加先增加后减小,峰值大约在 $\theta_E = 60^\circ \sim 70^\circ$; 而 b/c 较大时,随着 θ_E 的增加,正向的 $K_{II E}^*$ 逐渐减小,随后负向的 $K_{II E}^*$ 逐渐增大,当 θ_E 超过 70° , 负向的 $K_{II E}^*$ 再次发生减小.



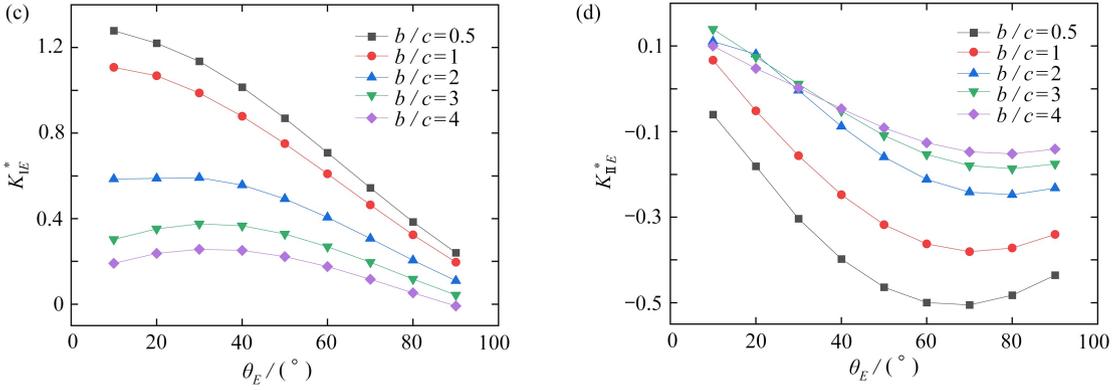


图7 分支长度比值对归一化应力强度因子的影响

Fig. 7 Effects of branch length ratios on normalized stress intensity factors

4.5 分岔角度对 K_I^* 和 K_{II}^* 的影响

令 $b/a = 0.1, c/b = 0.5, d/a = 1$ 以及 $\tau/\sigma = 0.1$, 研究分岔角度 θ_B 对应力强度因子的影响. 由图 8 可知, 分岔角度的改变会影响主导的扩展模式, 从 I 型主导的扩展转换为 II 型, 发生转换的角度大致在 45° 至 60° . 从图 8(a)、8(c) 可知: 分岔角 θ_E 的变化对 $K_{I B}^*$ 基本没有影响, 但对 $K_{I E}^*$ 的影响很明显. 随着分岔角 θ_B 的增加, $K_{I E}^*$ 呈现快速的增加, 且在 90° 时出现最大值, 这是因为分支 DB 与分支 DE 距离增加, 从而抑制作用减弱; 而随着分岔角 θ_E 的增加, $K_{I E}^*$ 快速下降. 由图 8(b) 可知: $K_{II B}^*$ 随着分岔角 θ_B 的增加先增加后减小, 峰值出现在 $\theta_B = 45^\circ \sim 60^\circ$, $K_{II B}^*$ 随着分岔角 θ_E 的增加而增加. 由图 8(d) 可知: 随着分岔角 θ_B 的增加, 正向 $K_{II E}^*$ 会逐渐向负向发展, 即整条曲线向下移动; 随着分岔角 θ_E 的增加, 正向的 $K_{II E}^*$ 逐渐减小, 而后负向的值逐渐增加; 当峰值超过 $\theta_E = 70^\circ$ 时, 其负向的值再次减小.

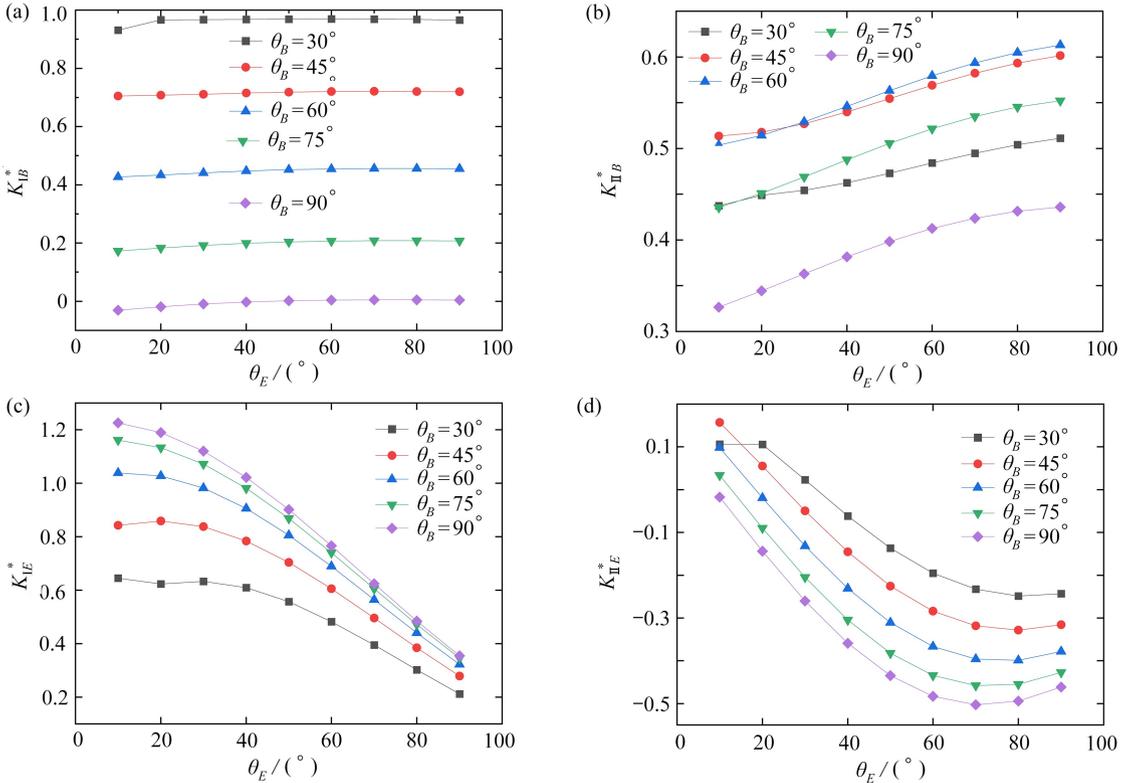


图8 分岔角度对归一化应力强度因子的影响

Fig. 8 Effects of bifurcation angles on normalized stress intensity factors

4.6 多分支分岔裂纹的应力强度因子

本文所讨论的理论方法可以方便地应用到多分支的分岔裂纹问题(图 9)中,相比较于以往解决的问题^[15-17]更具工程价值,同时无需复杂的公式推导^[18-19],只需要根据裂纹条数增加式(9)的个数,以及在分岔处根据式(11)进行相应的设置,便可以得到解答.令 $2a = 4, 2b = 1, 2c = 0.5, \theta_B = 60^\circ, \theta_F = 45^\circ$, 将本文计算的结果与有限元进行比对,如表 1 所示.可见,本文给出的结果是可靠的,且相较于有限元计算而言,此方法可以方便快捷地用于解决多分支分岔裂纹问题,具有一定实际应用的价值.

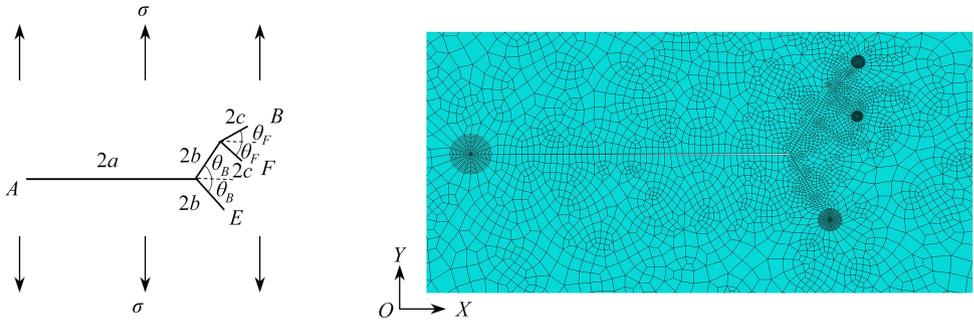


图 9 多分支分岔裂纹示意图以及有限元网格划分局部图

Fig. 9 Schematic diagram of the multiple branch bifurcation crack and the local partial finite element mesh

表 1 多分支分岔裂纹有限元计算与本文结果对照

Table 1 Comparison between the results of finite element calculation of the multi branch bifurcation crack and the results in this paper

	$K_{IA} / (\text{MPa} \cdot \sqrt{\text{mm}})$	$K_{IE} / (\text{MPa} \cdot \sqrt{\text{mm}})$	$K_{IB} / (\text{MPa} \cdot \sqrt{\text{mm}})$	$K_{IF} / (\text{MPa} \cdot \sqrt{\text{mm}})$
FEM	2.832	0.618	1.313	1.686
DDT	2.807	0.613	1.289	1.607
	$K_{IIA} / (\text{MPa} \cdot \sqrt{\text{mm}})$	$K_{IIE} / (\text{MPa} \cdot \sqrt{\text{mm}})$	$K_{IIB} / (\text{MPa} \cdot \sqrt{\text{mm}})$	$K_{IIF} / (\text{MPa} \cdot \sqrt{\text{mm}})$
FEM	-0.032 4	-1.028	1.132	-0.760
DDT	-0.023 8	-1.020	1.165	-0.714

5 结 论

1) 由上述推导过程及计算结果可知,本文研究分岔裂纹的方法可靠且便捷,可用于更加复杂的多分支分岔裂纹问题(如鹿角型分岔裂纹)。

2) 随着埋入深度的增加,分岔裂纹两分支的应力强度因子均逐渐减小,且裂纹长度越长对于埋深变化越敏感.当埋深达到 $d/a = 1.5$ 时,分支裂尖应力强度因子最大的削弱程度可达 15% 左右,这说明随着埋深的增加,分岔裂纹向内部扩展会更加困难。

3) 分岔裂纹的分支长度越长,其应力强度因子越大,且长度较大的分支对长度较小的分支有一定的屏蔽作用,导致分岔裂纹更易向长分支方向扩展.在两分支裂纹长度比达到 $b/c = 2$ 以上时,屏蔽效应可达 50% 以上。

4) 随着荷载比值 τ/σ 的增加,当切应力大小与正应力大小相当时,分岔裂纹其中一分支的主导扩展模式由 I 型扩展转变为 II 型扩展,另一分支的 I 型应力强度因子峰值角度会增大。

5) 分岔角度的增加会导致 K_I^* 的下降,但会使得 K_{II}^* 上升,使得主导的扩展模式由 I 型转换为 II 型,发生转换的角度大约在 45° 至 60° ,且分岔角度的增加会减小对较短分支的抑制作用。

参考文献 (References):

- [1] THEOCARIS P S, IOAKIMIDIS N. The symmetrically branched crack in an infinite elastic medium[J]. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 1976, 27(6): 801-814.
- [2] LAM K Y, ONG P P, WUDE N. Interaction between a circular inclusion and a symmetrically branched crack [J]. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 1998, 28(3): 197-211.

- [3] YAN X. Stress intensity factors for asymmetric branched cracks in plane extension by using crack-tip displacement discontinuity elements[J]. *Mechanics Research Communications*, 2005, **32**(4): 375-384.
- [4] YAVUZ A K, PHOENIX S L, TERMAATH S C. An accurate and fast analysis for strongly interacting multiple crack configurations including kinked (V) and branched (Y) cracks[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, **43**(22/23): 6727-6750.
- [5] DAHLAN H, RUSLI M, AS'AD A, et al. Numerical study on the symmetric and asymmetric orientation of the crack branching in 2D plate[J]. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2020, **830**(4): 42026.
- [6] 魏华建, 董茜茜, 王酉钰. 拉伸荷载下分支裂隙破坏机理研究[J]. *应用力学学报*, 2021, **38**(1): 150-157. (WEI Huajian, DONG Qianqian, WANG Youyu. Research on failure mechanism of branch crack under tensile loading[J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2021, **38**(1): 150-157. (in Chinese))
- [7] KORNEV V M, KURGUZOV V D. Prefracture zones in quasibrittle materials with branched and kinked cracks[J]. *Physical Mesomechanics*, 2010, **13**(1/2): 54-61.
- [8] CHEN J, ZHOU X. The enhanced extended finite element method for the propagation of complex branched cracks[J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2019, **104**: 46-62.
- [9] 张端, 董茜茜. 裂隙分支对单轴拉伸下裂纹破坏模式的影响[J]. *矿业研究与开发*, 2020, **40**(11): 64-70. (ZHANG Duan, DONG Qianqian. Effect of fissure branches on crack failure modes under uniaxial tension[J]. *Mining Research and Development*, 2020, **40**(11): 64-70. (in Chinese))
- [10] LI X, LI X, JIANG X. Influence of a micro-crack on the finite macro-crack[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2017, **177**: 95-103.
- [11] LI X, JIANG X, LI X, et al. Solution of an inclined crack in a finite plane and a new criterion to predict fatigue crack propagation[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2016, **119**: 217-223.
- [12] 邢帅兵, 王强胜, 生月, 等. 圆形杂质对裂纹扩展的影响[J]. *应用数学和力学*, 2019, **40**(2): 189-199. (XING Shuaibing, WANG Qiangsheng, SHENG Yue, et al. Effects of circular inhomogeneity on crack propagation[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(2): 189-199. (in Chinese))
- [13] YAN X. A numerical analysis of stress intensity factors at bifurcated cracks[J]. *Engineering Failure Analysis*, 2006, **13**(4): 629-637.
- [14] 文良华. 钢轨损伤行为的研究[D]. 硕士学位论文. 成都: 西南交通大学, 2015. (WEN Lianghua. The research of rail damage behavior[D]. Master Thesis. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2015. (in Chinese))
- [15] QUINN G D. On crack branching angles in glasses and ceramics[J]. *Journal of the European Ceramic Society*, 2020, **40**(14): 4711-4721.
- [16] CHEN Y Z, LIN X Y. Numerical solution for the T-stress in branch crack problem with infinitesimal branch length[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2010, **77**(13): 2593-2600.
- [17] GHORBANPOOR R, SABERI-NADJAFI J, LONG N M A N, et al. Stability and convergence analysis of singular integral equations for unequal arms branch crack problems in plane elasticity[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2022, **103**: 731-749.
- [18] 李煦, 苏睿, 张欢, 等. 微裂纹群对主裂纹尖端损伤行为的影响[J]. *应用数学和力学*, 2022, **43**(12): 1347-1358. (LI Xu, SU Rui, ZHANG Huan, et al. Influence of multiple micro cracks on the damage behavior of a macro-crack tip[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(12): 1347-1358. (in Chinese))
- [19] 郭钊, 郭子涛, 易玲艳. 多裂纹问题计算分析的本征 COD 边界积分方程方法[J]. *应用数学和力学*, 2019, **40**(2): 200-209. (GUO Zhao, GUO Zitao, YI Lingyan. Analysis of multicrack problems with eigen COD boundary integral equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(2): 200-209. (in Chinese))