

点阵夹芯圆柱壳自由振动分析的波有限元方法*

韩少燕¹, 高汝鑫^{2,3}

- (1. 西安交通大学城市学院 机械工程学院, 西安 710018;
2. 北京理工大学 先进结构技术研究院, 北京 100081;
3. 大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116024)

摘要: 针对点阵夹芯圆柱壳的自由振动分析发展了波有限元法, 首先基于自由波的传播规律, 建立了点阵夹芯圆柱壳胞元的二维波有限元控制方程, 相比于全尺寸有限元模型, 显著缩减了控制方程的自由度规模; 其次, 基于 Neumann 级数推导了约束动刚度矩阵求逆的显式表达式, 不仅可以提高计算效率, 而且使得固有频率从控制方程中分离出来, 从而将点阵夹芯圆柱壳的固有频率求解转化为单个胞元自由度规模的二次特征值问题; 最后, 根据结构振动模态与自由波的关系, 给出了圆柱壳轴向和周向的波传播参数的表达式, 进而求得点阵夹芯圆柱壳的固有频率和模态。数值算例考虑了多种边界条件下的点阵夹芯圆柱壳自由振动问题, 验证了该方法的正确性和高效性。

关键词: 点阵夹芯; 圆柱壳; 自由振动; 波有限元; 波传播

中图分类号: O302 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.440130

A Wave Finite Element Method for Free Vibration Analysis of Lattice Core Sandwich Cylindrical Shells

HAN Shaoyan¹, GAO Ruxin^{2,3}

- (1. School of Mechanical Engineering, Xi'an Jiaotong University City College, Xi'an 710018, P.R.China;
2. Institute of Advanced Structure Technology, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, P.R.China;
3. State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, P.R.China)

Abstract: A wave finite element method was developed for the free vibration analysis of lattice core sandwich cylindrical shells. Firstly, based on the propagation law of free waves, governing equations for a core element of the lattice core sandwich cylindrical shell was established. Compared with the full-scale finite element model, degrees of freedom of the governing equations for a core element are significantly reduced. Secondly, an explicit expression for the inverse of the constrained dynamic stiffness matrix was derived based on the Neumann series, which not only improves computation efficiency but also separates the natural frequency from the governing equations, thereby transforming the natural frequency solution of the lattice core sandwich cylindrical shell

* 收稿日期: 2023-04-30; 修订日期: 2023-10-10

基金项目: 国家自然科学基金青年科学基金(12102045)

作者简介: 韩少燕(1987—), 女, 讲师(E-mail: hanshaoyan0809@outlook.com);

高汝鑫(1991—), 男, 副教授, 博士生导师(通讯作者, E-mail: gaoruxin@bit.edu.cn).

引用格式: 韩少燕, 高汝鑫. 点阵夹芯圆柱壳自由振动分析的波有限元方法[J]. 应用数学和力学, 2024, 45(1): 25-33.

into a quadratic eigenvalue problem of a core element. Finally, according to the relationship between the structural vibration mode and the free wave, the expressions of the axial and circumferential wave propagation parameters of the cylindrical shell were given, and the natural frequencies and modes of the lattice core sandwich cylindrical shell were obtained. Numerical examples of the free vibration analysis on a lattice core sandwich cylindrical shell under different boundary conditions verify the validity and efficiency of the proposed method.

Key words: lattice core; cylindrical shell; free vibration; wave finite element; wave propagation

0 引言

点阵夹芯结构被认为是最具应用前景的下一代轻量化多功能结构形式之一,其有着传统材料结构所不具备的力学性能,例如较高的比刚度、比强度、能量吸收能力和性能可设计等^[1].常见的点阵夹芯结构单胞的拓扑构型有金字塔型^[2]、四面体型^[2]、Kagome型^[2]、三维全三角型^[3]和八面体型^[4]等.点阵夹芯结构,如点阵夹芯梁、板和壳结构,因其上述的优异性能已成功应用于航空航天领域^[5].国内外学者针对点阵夹芯结构的力学和热学性能开展了众多研究^[6-7].根据点阵夹芯结构的构成特点,其多用于抗冲吸能结构设计^[8].点阵夹芯结构应用于航空航天、船舶等机械结构时,通常会遭遇复杂的振动环境,所以研究点阵夹芯结构的振动特性是十分必要的.近年来,学者们针对点阵夹芯结构的线性和非线性振动开展了相关研究工作^[9-11].

波在周期结构中传播时满足 Bloch 定理^[12],点阵夹芯结构通常具有周期性,故波有限元法为周期结构的振动分析提供了一种快速求解方案.然而,波有限元方法往往面临较多的数值问题,通常可分为三类^[13]: ① 当频率较高时出现的有限元离散误差和色散误差^[14]; ② 当胞元长度与变形波长相当时出现的空间离散和周期结构效应^[12,15]; ③ 传递矩阵的条件数过大,矩阵病态导致本征值和本征向量无法求解^[16].对于前两种数值问题,可以通过减小单元尺寸加密网格来避免;而传递矩阵数值病态的问题,就只能通过建立高精度的数值求解方法来解决.为此,学者们针对传递矩阵本征值和本征向量的求解提出了众多方法:Zhong 和 Williams^[16]应用结构力学和最优控制理论的类比关系,提出了一种直接求解方法,该方法将传递矩阵的本征值的求解转化为两个非病态矩阵的广义特征值的求解;传递矩阵的本征值问题可以转化为回文二次特征值问题,Huang 等^[17]针对回文二次特征值问题提出了保结构算法;Wang 等^[18]进一步扩展了 Zhong 和 Williams 的直接求解法,突破了原方法只能处理单根的限制,使得该方法可以处理多重根问题.但是上述传递矩阵特征值的求解方法多用来处理较为简单的胞元或者自由度规模较小的传递矩阵,当矩阵规模较大时,上述方法会出现累积误差.鉴于上述原因,目前波有限元方法通常将较为规则的一维或二维单元作为单胞求解均质结构的振动分析问题^[19-21],或用来处理胞元构型较为简单的周期(点阵)结构的振动分析问题^[22-24].

本文基于波传播理论和有限元方法,针对点阵夹芯圆柱壳的自由振动分析,发展了波有限元方法.首先,根据自由波在圆柱壳轴向和周向的传播规律,基于波有限元方法建立了胞元的振动控制方程.该振动控制方程虽然建立在胞元自由度上,但可描述整个点阵夹芯圆柱壳的自由振动行为.其次,对于胞元振动控制方程,基于 Neumann 级数推导了约束刚度矩阵的逆矩阵的显式表达式,不仅提高了求逆效率,而且将振动控制方程中的频率分离出来,从而将点阵夹芯圆柱壳的固有频率求解转化为胞元边界自由度规模的二次特征值问题.最后,根据驻波形成的条件,给出了圆柱壳轴向和周向的波传播参数,进而求解二次特征值问题即可得到点阵夹芯圆柱壳的固有频率.相比于全尺寸有限元模型,本文的方法可显著降低计算模型的自由度规模,从而显著降低计算成本,提高计算效率,且没有数值病态的问题.另外,推导过程不指定胞元的结构形式,且其刚度矩阵和质量矩阵可以方便地从任意的商业有限元软件中导出,便于工程应用.

1 胞元的波有限元控制方程

考虑点阵夹芯圆柱壳的自由振动,其中一个胞元的有限元模型如图 1 所示,该胞元的有限元振动方程可以写为

$$Dq = f, \quad (1)$$

其中

$$\mathbf{D} = \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} \quad (2)$$

为胞元的动刚度矩阵, \mathbf{q} 为胞元的节点自由度向量, \mathbf{f} 为胞元的节点力向量, \mathbf{K} 和 \mathbf{M} 分别为胞元的刚度矩阵和质量矩阵, ω 为点阵夹芯圆柱壳自由振动的圆频率.

根据图 1 对节点自由度的划分, 可以将式(1)写为分块的形式:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{ee} & \mathbf{D}_{ei} \\ \mathbf{D}_{ie} & \mathbf{D}_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_e \\ \mathbf{q}_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_e \\ \mathbf{f}_i \end{Bmatrix}, \quad (3)$$

其中

$$\mathbf{q}_e = \{ \mathbf{q}_1^T \quad \mathbf{q}_L^T \quad \mathbf{q}_2^T \quad \mathbf{q}_R^T \quad \mathbf{q}_b^T \quad \mathbf{q}_4^T \quad \mathbf{q}_t^T \quad \mathbf{q}_3^T \}^T. \quad (4)$$

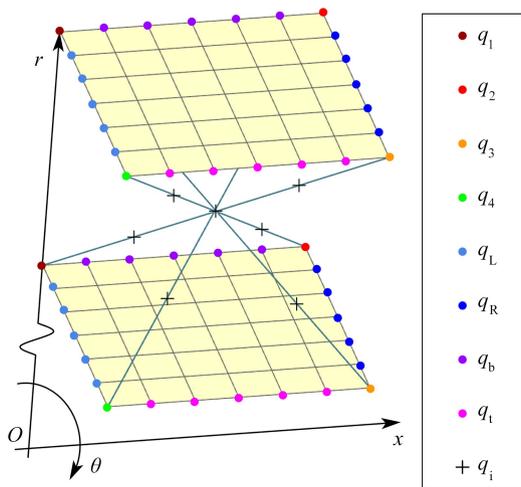


图 1 点阵夹芯圆柱壳胞元的有限元模型

Fig. 1 The finite element model for a core element in a lattice core sandwich cylindrical shell

注 为了解释图中的颜色, 读者可以参考本文的电子网页版本, 后同.

胞元内部节点作用力为零, 即 $\mathbf{f}_i = \mathbf{0}$, 展开式(3)第 2 行并移项可得

$$\mathbf{q}_i = -\mathbf{D}_{ii}^{-1} \mathbf{D}_{ie} \mathbf{q}_e. \quad (5)$$

将式(5)代入到式(3)第 1 行可得

$$(\mathbf{D}_{ee} - \mathbf{D}_{ei} \mathbf{D}_{ii}^{-1} \mathbf{D}_{ie}) \mathbf{q}_e = \mathbf{f}_e. \quad (6)$$

根据 Bloch-Floquet 定理, 胞元相邻边界上的节点自由度向量具有以下关系:

$$\mathbf{q}_2 = \lambda_x \mathbf{q}_1, \quad \mathbf{q}_R = \lambda_x \mathbf{q}_L, \quad \mathbf{q}_4 = \lambda_\theta \mathbf{q}_1, \quad \mathbf{q}_t = \lambda_\theta \mathbf{q}_b, \quad \mathbf{q}_3 = \lambda_\theta \lambda_x \mathbf{q}_1, \quad (7)$$

其中 λ_x 和 λ_θ 分别为胞元在轴向和周向的波传播参数.

根据式(7)和(4), 可以将 \mathbf{q}_e 表示为

$$\mathbf{q}_e = \mathbf{A} \mathbf{Q}, \quad (8)$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \lambda_x \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_x \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \lambda_\theta \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \lambda_\theta \mathbf{I} \\ \lambda_x \lambda_\theta \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_1 \\ \boldsymbol{q}_L \\ \boldsymbol{q}_b \end{bmatrix}. \quad (10)$$

将式(8)代入式(6)得到

$$(\boldsymbol{D}_{ee} - \boldsymbol{D}_{ei}\boldsymbol{D}_{ii}^{-1}\boldsymbol{D}_{ie})\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{f}_e. \quad (11)$$

根据胞元力的平衡条件^[25]有

$$\boldsymbol{f}_1 + \lambda_x^{-1}\boldsymbol{f}_2 + \lambda_\theta^{-1}\boldsymbol{f}_4 + \lambda_\theta^{-1}\lambda_x^{-1}\boldsymbol{f}_3 = \mathbf{0}, \quad (12)$$

$$\boldsymbol{f}_L + \lambda_x^{-1}\boldsymbol{f}_R = \mathbf{0}, \quad (13)$$

$$\boldsymbol{f}_b + \lambda_\theta^{-1}\boldsymbol{f}_1 = \mathbf{0}. \quad (14)$$

将式(12)–(14)写为矩阵形式有

$$\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{f}_e = \mathbf{0}. \quad (15)$$

将式(11)代入式(15)有

$$\boldsymbol{A}^H\tilde{\boldsymbol{D}}_{ee}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \mathbf{0}, \quad (16)$$

其中

$$\tilde{\boldsymbol{D}}_{ee} = \boldsymbol{D}_{ee} - \boldsymbol{D}_{ei}\boldsymbol{D}_{ii}^{-1}\boldsymbol{D}_{ie}. \quad (17)$$

式(16)即为点阵夹芯圆柱壳胞元的波有限元控制方程。

2 约束动刚度矩阵的显式求逆

由式(17)可以看出 $\tilde{\boldsymbol{D}}_{ee}$ 是轴向波传播参数 λ_x 、周向传播参数 λ_θ 和频率 ω 的函数,然而式(17)中 \boldsymbol{D}_{ii}^{-1} 的存在使得 $\tilde{\boldsymbol{D}}_{ee}$ 为 ω 的隐函数.为此,将 \boldsymbol{D}_{ii}^{-1} 写为如下形式:

$$\boldsymbol{D}_{ii}^{-1} = (\boldsymbol{I} - \omega^2\boldsymbol{K}_{ii}^{-1}\boldsymbol{M}_{ii})^{-1}\boldsymbol{K}_{ii}^{-1}. \quad (18)$$

利用 Neumann 级数^[26]将式(18)近似为

$$\boldsymbol{D}_{ii}^{-1} \approx \boldsymbol{K}_{ii}^{-1} + \omega^2\boldsymbol{K}_{ii}^{-1}\boldsymbol{M}_{ii}\boldsymbol{K}_{ii}^{-1} + \omega^4\boldsymbol{K}_{ii}^{-1}\boldsymbol{M}_{ii}\boldsymbol{K}_{ii}^{-1}\boldsymbol{M}_{ii}\boldsymbol{K}_{ii}^{-1}. \quad (19)$$

将式(19)代入到式(17),可得

$$\tilde{\boldsymbol{D}}_{ee} = \omega^4\tilde{\boldsymbol{A}} + \omega^2\tilde{\boldsymbol{B}} + \tilde{\boldsymbol{C}}, \quad (20)$$

其中

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = -\boldsymbol{K}_{ei}\boldsymbol{K}_{ii}^{-1}\boldsymbol{M}_{ii}\boldsymbol{K}_{ii}^{-1}\boldsymbol{M}_{ii}\boldsymbol{K}_{ii}^{-1}\boldsymbol{K}_{ie} - \boldsymbol{M}_{ei}\boldsymbol{K}_{ii}^{-1}\boldsymbol{M}_{ie} + \boldsymbol{K}_{ei}\boldsymbol{K}_{ii}^{-1}\boldsymbol{M}_{ii}\boldsymbol{K}_{ii}^{-1}\boldsymbol{M}_{ie} + \boldsymbol{M}_{ei}\boldsymbol{K}_{ii}^{-1}\boldsymbol{M}_{ii}\boldsymbol{K}_{ii}^{-1}\boldsymbol{K}_{ie}, \quad (21)$$

$$\tilde{\boldsymbol{B}} = -\boldsymbol{K}_{ei}\boldsymbol{K}_{ii}^{-1}\boldsymbol{M}_{ii}\boldsymbol{K}_{ii}^{-1}\boldsymbol{K}_{ie} - \boldsymbol{M}_{ee} + \boldsymbol{K}_{ei}\boldsymbol{K}_{ii}^{-1}\boldsymbol{M}_{ie} + \boldsymbol{M}_{ei}\boldsymbol{K}_{ii}^{-1}\boldsymbol{K}_{ie}, \quad (22)$$

$$\tilde{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{K}_{ee} - \boldsymbol{K}_{ei}\boldsymbol{K}_{ii}^{-1}\boldsymbol{K}_{ie}. \quad (23)$$

将式(20)代入到式(16),可得

$$(\mu^2\boldsymbol{A} + \mu\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})\boldsymbol{Q} = \mathbf{0}, \quad (24)$$

其中

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^H\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}, \quad (25)$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^H\tilde{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{A}, \quad (26)$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}^H\tilde{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{A}, \quad (27)$$

$$\mu = \omega^2. \quad (28)$$

取 $\boldsymbol{z} = [\mu\boldsymbol{Q}^T \quad \boldsymbol{Q}^T]^T$, 则式(24)变换为

$$\left(\mu \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \\ -\boldsymbol{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \boldsymbol{z} = \mathbf{0}. \quad (29)$$

从式(29)容易看出,其中的系数矩阵是轴向波传播参数 λ_x 和周向波传播参数 λ_θ 的函数,均与圆频率 ω 无关.对于给定的轴向波传播参数 λ_x 和周向波传播参数 λ_θ , 点阵夹芯圆柱壳的频率求解转换为求解式(29)的广义特征值问题.另外,从式(29)还可以看出,本文方法的求解自由度规模为通常不大于一个胞元的自由度,不需要对整个点阵夹芯圆柱壳进行建模,且对胞元的具体构型没有特别要求,即胞元的结构矩阵可由现

有的商业软件导出。

3 点阵夹芯圆柱壳中的波传播分析

根据结构中自由波的传播与自振模式的对应关系:当波传播参数取适当的值,使得波在结构中反射叠加后形成驻波时,结构达到了某一阶自振模式^[27-28]。圆柱壳自由振动涉及周向和轴向两个方向的波传播,首先考虑周向,考虑周期性边界条件,容易知道圆柱壳周向的波数为整数,则胞元在周向的波传播参数为

$$\lambda_{\theta} = e^{in\theta_{\text{cell}}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (30)$$

其中 θ_{cell} 为胞元在周向掠过的弧度。

其次考虑胞元轴向波传播参数的求解,本文利用自由波在梁中的传播分析来求解圆柱壳轴向的波传播参数。根据驻波形成的条件,波在轴向传播一个周期需要满足以下条件:

$$2kL + (\phi_L + \phi_R) = 2m\pi, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (31)$$

其中 L 为圆柱壳的长度, k 为轴向半波数, ϕ_L 为入射波和反射波在圆柱壳左端边界上的相位差, ϕ_R 为入射波和反射波在圆柱壳右端边界上的相位差。对于简支边界条件,入射波和反射波的相位差为 $-\pi$, 对于固支或自由边界条件,入射波和反射波的相位差为 $-\pi/2$ ^[27-28]。

将式(31)移项可得轴向半波数,进而轴向的波传播参数为

$$\lambda_x = e^{i\frac{2m\pi - \phi_L - \phi_R}{2L}L_{\text{cell}}}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (32)$$

其中 L_{cell} 为胞元沿轴向的长度。

需要注意的是,根据文献[27-28],自由波在梁中传播的通解可以由 4 个分量叠加而成,分别为 e^{-ikx} , e^{ikx} , e^{-kx} , e^{kx} , 其中 k 的正负号分别代表着波的传播方向。可以看出,前两个分量为传播波分量,后两个分量为近场波(near field wave),也称倏逝波(evanescent field wave)。随着传播距离的增加,近场波呈指数衰减。考虑不同的边界条件,在两端简支的边界条件下,近场波为零^[27-28];而在其他边界条件,如固支、自由边界条件等情况下,近场波不为零。然而,需要指出的是,由于近场波衰减很快,且频率越高,衰减越快,所以当频率较高、波数较大时,近场波的影响可以忽略不计。鉴于上述分析,本文方法在推导过程中没有考虑近场波的影响,故本文方法在两端简支边界条件下,具有较高的计算精度,而在其他非简支边界条件下,精度受近场波的影响;对于较低阶的自振频率,本文方法的计算精度较差;对于高阶自振频率的求解,波数的增加使得近场波影响变小,计算精度会越来越高。

最后,点阵夹芯圆柱壳的模式可以通过入射波和反射波叠加得到^[27-28],例如,对于两端简支的点阵夹芯圆柱壳,其模式 φ 可以表示为

$$\varphi = \begin{bmatrix} q_e \\ q_i \end{bmatrix} \lambda_{\theta} (\lambda_x - \lambda_x^{-1}). \quad (33)$$

综上,本文方法求解点阵夹芯圆柱壳自振频率和模式的步骤如下:

- ① 根据式(30)和(32),求得点阵夹芯圆柱壳在轴向和周向的波传播参数 λ_x 和 λ_{θ} ;
- ② 将两个方向的波传播参数代入式(9),并结合式(25)~(27)可得式(29)中的系数矩阵 \mathbf{A} , \mathbf{B} 和 \mathbf{C} ;
- ③ 求解式(29)的广义特征值问题即可得到广义特征值 μ 和广义特征向量 \mathbf{z} ;
- ④ 结合广义特征值 μ 和式(28)即可得到自振频率 ω , 结合广义特征向量 \mathbf{z} 、式(8)和(10)即可得到 \mathbf{q}_e ;
- ⑤ 将 \mathbf{q}_e 代入式(5)可以得到 \mathbf{q}_i , 进一步利用式(33)即可得到点阵夹芯圆柱壳的模式。

4 数值算例

本节利用一个点阵夹芯圆柱壳来验证本文方法的正确性和高效性,其周向有 300 个胞元,轴向有 250 个胞元,如图 2(a)所示。胞元为金字塔型,如图 2(b)所示,其前后面板分别为半径为 0.99 m 和 1.01 m 的圆柱面,轴向长度均为 20 mm,周向掠过的角度均为 1.2° ,厚度均为 2 mm,四根连接梁的截面为圆形,连接梁半径为 1 mm。胞元材料的质量密度为 $2\,711 \text{ kg/m}^3$,弹性模量为 68.98 GPa, Poisson 比为 0.33。点阵夹芯圆柱壳两端的边界条件依次考虑为简支-简支(SS)、固支-固支(CC)、自由-自由(FF)、固支-简支(CS)和固支-自由(CF),分别利用本文方法和有限元方法对其进行自由振动分析。

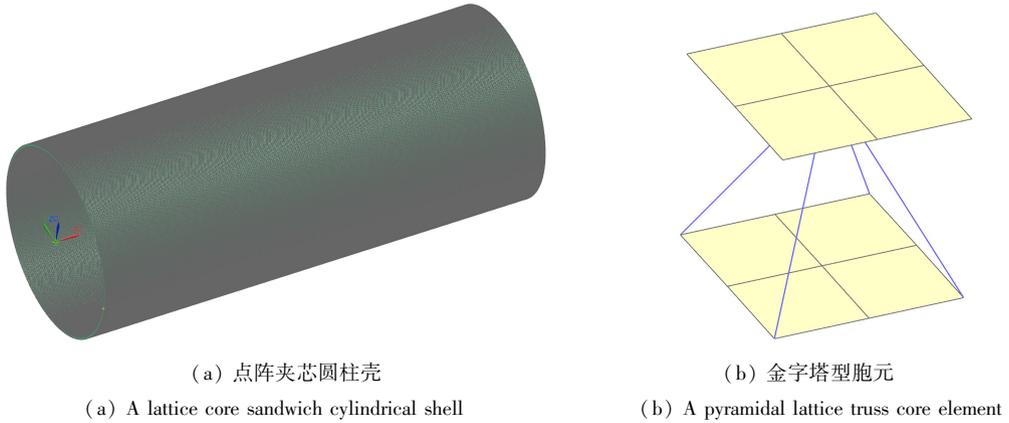


图2 点阵夹芯圆柱壳及其胞元示意图

Fig. 2 The lattice core sandwich cylindrical shell and a pyramidal lattice truss core element

4.1 两端简支

首先考虑两端简支边界条件,胞元的上下面板均使用4个相同大小的壳单元建模,芯子中的4根连杆均使用3个梁单元建模,胞元有限元模型共有156个自由度;全尺寸有限元模型由胞元有限元模型在两个方向上阵列得到,共有7 207 200个自由度。

本文方法中使用的胞元刚度矩阵和质量矩阵从Nastran中导出,并使用MATLAB编写计算程序,使用CPU为8核*3.60 GHz,内存为32 GB的桌面级电脑,单核计算一个工况所花费时间大概为1 s。全尺寸有限元模型使用Nastran建模,计算在CPU为80核*2.3 GHz、内存为512 GB的高性能工作站上进行,使用18核计算一个工况(前100阶模态)所花费时间大概为40 min。需要指出的是,计算时间除了受计算规模、硬件配置影响以外,还受其他因素的影响,故此处两者的计算时间为多次计算时间取的平均值。以上的计算时间对比验证了本文方法的高效性。

表1给出了本文方法和全尺寸有限元模型计算得到的频率结果,由于本文重点关注圆柱壳的呼吸模态,所以表中没有给出周向波数为0或1对应的固有频率。可以看出,两端简支边界条件下,本文方法计算的点阵夹芯圆柱壳的固有频率与全尺寸有限元模型的结果吻合很好,验证了本文方法的有效性。

表1 两端简支边界条件下(SS)点阵夹芯圆柱壳的自由振动频率对比

Table 1 Comparison of natural frequencies of the lattice core sandwich shell with simply supported boundary conditions at both ends

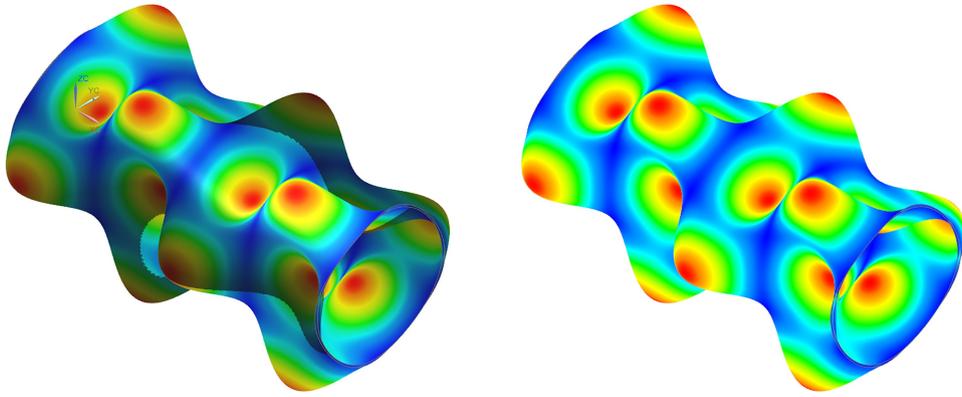
m	$n = 2$			$n = 3$			$n = 4$			$n = 5$		
	present	FEM	error									
	F/Hz	F/Hz	$\delta/\%$									
1	63.85	63.84	0.015	72.41	72.36	0.069	123.59	123.55	0.032	192.13	192.09	0.021
2	188.95	188.97	-0.011	127.99	127.91	0.063	145.66	145.51	0.103	204.58	204.41	0.083
3	321.37	321.43	-0.019	217.41	217.32	0.041	194.79	194.54	0.129	232.03	231.71	0.138
4	431.87	431.95	-0.019	311.86	311.77	0.029	261.98	261.67	0.118	275.34	274.87	0.171
5	516.00	516.07	-0.014	398.52	398.42	0.025	335.31	334.96	0.104	330.19	329.62	0.173

图3给出了本文方法和有限元方法计算得到的点阵夹芯圆柱壳的模态形状($m=4, n=3$)对比,可以看出两种方法计算的模态形状吻合较好。

4.2 其他边界条件

本小节考虑了其他边界条件下的点阵夹芯圆柱壳的自由振动问题,依次为固支-固支(CC)、自由-自由(FF)、固支-简支(CS)和固支-自由(CF)。表2—5给出了上述4种边界条件下,本文方法和有限元方法计算得到的点阵夹芯圆柱壳的固有频率对比。从表中数据可以看出,在上述4种边界条件下,本文方法的计算结果与有限元方法的计算结果误差比在两端简支边界条件下的结果误差大,这是由上述4种边界条件下近场波的影响造成的。随着波数的增加近场波迅速衰减,其对结果的影响越来越小,表2—5中的误差数据验证了这一点。另外,从表中还可以看出,虽然本文方法在上述4种边界条件下的计算结果与有限元计算结果存在

误差,但是误差大小整体在可接受范围内。



(a) 有限元方法 (b) 本文方法
(a) The finite element method (b) The present method

图 3 本文方法和有限元方法计算的模态对比 ($m = 4, n = 3$)

Fig. 3 Natural mode shapes ($m = 4, n = 3$) obtained with the 2 methods

表 2 两端固支边界条件下 (CC) 点阵夹芯圆柱壳的自由振动频率对比

Table 2 Comparison of natural frequencies of the lattice core sandwich shell with clamped boundary conditions at both ends

m	$n = 2$			$n = 3$			$n = 4$			$n = 5$		
	present	FEM	error									
	F / Hz	F / Hz	$\delta / \%$	F / Hz	F / Hz	$\delta / \%$	F / Hz	F / Hz	$\delta / \%$	F / Hz	F / Hz	$\delta / \%$
1	122.00	101.70	19.961	93.63	87.42	7.104	131.34	127.91	2.682	196.78	193.72	1.580
2	256.90	212.26	21.031	170.71	151.09	12.986	167.13	158.03	5.758	216.22	210.19	2.869
3	380.00	331.64	14.582	265.10	235.26	12.684	226.97	210.42	7.865	251.90	241.61	4.259
4	477.01	436.91	9.178	356.53	323.48	10.217	298.44	276.14	8.076	301.67	286.81	5.181
5	549.70	520.28	5.655	437.62	406.78	7.581	371.90	347.02	7.170	360.24	341.75	5.410

表 3 两端自由边界条件下 (FF) 点阵夹芯圆柱壳的自由振动频率对比

Table 3 Comparison of natural frequencies of the lattice core sandwich shell with free boundary conditions at both ends

m	$n = 2$			$n = 3$			$n = 4$			$n = 5$		
	present	FEM	error									
	F / Hz	F / Hz	$\delta / \%$	F / Hz	F / Hz	$\delta / \%$	F / Hz	F / Hz	$\delta / \%$	F / Hz	F / Hz	$\delta / \%$
$-1/2(\lambda_x = 0)$	22.80	22.71	0.396	63.59	63.33	0.411	119.66	119.10	0.470	189.09	188.16	0.494
1	28.18	24.04	17.221	64.68	65.04	-0.554	120.42	120.84	-0.348	189.79	189.79	0.000
2	122.00	129.83	-6.031	93.63	97.27	-3.742	131.34	134.23	-2.153	196.78	199.29	-1.259
3	256.90	269.57	-4.700	170.71	177.66	-3.912	167.13	172.35	-3.029	216.22	220.94	-2.136
4	380.00	396.43	-4.144	265.10	275.78	-3.873	226.97	234.54	-3.228	251.90	258.51	-2.557
5	477.01	492.12	-3.070	356.53	369.24	-3.442	298.44	308.07	-3.126	301.67	309.92	-2.662

表 4 一端固支一端简支边界条件下 (CS) 点阵夹芯圆柱壳的自由振动频率对比

Table 4 Comparison of natural frequencies of the lattice core sandwich shell with one end clamped and the other end simply supported

m	$n = 2$			$n = 3$			$n = 4$			$n = 5$		
	present	FEM	error									
	F / Hz	F / Hz	$\delta / \%$	F / Hz	F / Hz	$\delta / \%$	F / Hz	F / Hz	$\delta / \%$	F / Hz	F / Hz	$\delta / \%$
1	91.16	82.72	10.203	81.16	78.88	2.890	126.75	125.35	1.117	194.12	192.80	0.685
2	223.16	201.60	10.694	148.62	139.91	6.225	155.54	151.58	2.612	209.89	207.13	1.332
3	351.49	326.67	7.598	241.27	226.64	6.455	210.42	202.59	3.865	241.48	236.58	2.071
4	406.80	434.46	-6.367	288.68	317.77	-9.154	244.21	269.05	-9.232	263.21	280.86	-6.284
5	497.23	518.16	-4.039	377.88	402.64	-6.149	316.87	341.08	-7.098	315.70	335.73	-5.966

表5 一端固支一端自由边界条件下(CF)点阵夹芯圆柱壳的自由振动频率对比

Table 5 Comparison of natural frequencies of the lattice core sandwich shell with one end clamped and the other end free

m	n = 2			n = 3			n = 4			n = 5		
	present	FEM	error									
	F / Hz	F / Hz	δ / %	F / Hz	F / Hz	δ / %	F / Hz	F / Hz	δ / %	F / Hz	F / Hz	δ / %
1	28.18	31.89	-11.634	64.68	64.82	-0.216	120.42	119.95	0.392	189.79	189.01	0.413
2	122.00	110.66	10.248	93.63	91.28	2.574	131.34	130.96	0.290	196.78	196.49	0.148
3	256.90	239.50	7.265	170.71	163.47	4.429	167.13	164.90	1.352	216.22	215.57	0.302
4	380.00	363.26	4.608	265.10	254.43	4.194	226.97	221.95	2.262	251.90	249.97	0.772
5	477.01	465.45	2.484	356.53	345.96	3.055	298.44	291.65	2.328	301.67	298.22	1.157

5 结 论

本文针对点阵夹芯圆柱壳的自由振动分析发展了波有限元方法.首先,基于二维波有限元方法建立了点阵夹芯圆柱壳单个胞元的控制方程,该控制方程的自由度规模显著小于全尺寸有限元模型;然后,利用 Neumann 级数推导了约束刚度矩阵的显式表达式,使得控制方程中的频率分离出来,从而将固有频率求解转化为胞元的二次特征值问题;最后,考虑驻波的形成条件求得圆柱壳轴向和周向的参数,得到了点阵夹芯圆柱壳的固有频率.数值算例表明:本文方法对两端简支点阵夹芯圆柱壳的自由振动具有很高的预测精度,而对于其他边界条件,受近场波的影响预测精度略差,然而随着波数的增加,近场波快速衰减,本文方法的预测精度会越来越高.

致谢 本文作者衷心感谢大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室开放课题(GZ21110)对本文的资助.

参考文献(References):

- [1] EVANS A G, HUTCHINSON J W, FLECK N A, et al. The topological design of multifunctional cellular metals [J]. *Progress in Materials Science*, 2001, **46**(2-3): 309-327.
- [2] 张华. 点阵夹芯圆柱壳抗屈曲性能模拟研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2017. (ZHANG Hua. Simulation study on buckling resistance for lattice truss core sandwich cylinder[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2017.(in Chinese))
- [3] DESHPANDE V S, FLECK N A. Collapse of truss core sandwich beams in 3-point bending[J]. *International Journal of Solids & Structures*, 2001, **38**(36/37): 6275-6305.
- [4] KOOISTRA G W, WADLEY H N G. Lattice truss structures from expanded metal sheet[J]. *Materials & Design*, 2005, **28**(2): 507-514.
- [5] DEL OLMO E, GRANDE E, SAMARTIN C R, et al. Lattice structures for aerospace applications[C]//*Proceedings of the 12th European Conference on Spacecraft Structures, Materials and Environmental Testing*. Netherlands: ESTEC, 2012.
- [6] SUR A, DARVEKAR S, SHAH M. Recent advancements of micro-lattice structures: application, manufacturing methods, mechanical properties, topologies and challenges[J]. *Arabian Journal for Science and Engineering*, 2021, **46**: 11587-11600.
- [7] LIANG D, CHEN W, JU Y, et al. Comparing endwall heat transfer among staggered pin fin, Kagome and body centered cubic arrays[J]. *Applied Thermal Engineering*, 2021, **185**: 116306.
- [8] YIN H, ZHANG W, ZHU L, et al. Review on lattice structures for energy absorption properties[J]. *Composite Structures*, 2023, **304**(Part 1): 116397.
- [9] WU W, HU W, QIAN G, et al. Mechanical design and multifunctional applications of chiral mechanical metamaterials: a review[J]. *Materials and Design*, 2019, **180**: 107950.
- [10] 陈建恩. 轻质材料层合板的非线性动力学理论分析与实验研究[D]. 北京: 北京工业大学, 2013. (CHEN Jian'en. Theoretical and experimental investigations on nonlinear dynamics of light-weight sandwich plate[D].

- Beijing: Beijing University of Technology, 2013. (in Chinese))
- [11] 郭宇红, 张伟, 杨晓东. 1 : 2 内共振情况下点阵夹芯板动力学的奇异性分析[J]. 应用数学和力学, 2018, **39**(5): 506-528. (GUO Yuhong, ZHANG Wei, YANG Xiaodong. A singularity analysis on dynamics of symmetric cross-ply composite sandwich plates under 1 : 2 resonance[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(5): 506-528. (in Chinese))
- [12] BRILLOUIN L. *Wave Propagation in Periodic Structures*[M]. Dover, 1946.
- [13] WAKI Y, MACE B R, BRENNAN M J. Numerical issues concerning the wave and finite element method for free and forced vibrations of waveguides[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, **327**(1/2): 92-108.
- [14] PETYT M. *Introduction to Finite Element Vibration Analysis*[M]. Cambridge, MA: Cambridge University Press, 1990.
- [15] MEAD D J. Wave propagation in continuous periodic structures: research contributions from Southampton, 1964—1995[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, **190**(3): 495-524.
- [16] ZHONG W X, WILLIAMS F W. On the direct solution of wave propagation for repetitive structures[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, **181**(3): 485-501.
- [17] HUANG T M, LIN W W, SU W S. Palindromic quadratization and structure-preserving algorithm for palindromic matrix polynomials of even degree[J]. *Numerische Mathematik*, 2011, **118**(4): 713-735.
- [18] WANG W, FAN Y, LI L. Extending Zhong-Williams scheme to solve repeated-root wave modes[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2022, **519**: 116584.
- [19] MITROU G, FERGUSON N, RENNO J. Wave transmission through two-dimensional structures by the hybrid FE/WFE approach[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2017, **389**: 484-501.
- [20] RENNO J M, MACE B R. Calculating the forced response of two-dimensional homogeneous media using the wave and finite element method[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2011, **330**(24): 5913-5927.
- [21] ZHOU C W, LAINÉ J P, ICHCHOU M N, et al. Multi-scale modelling for two-dimensional periodic structures using a combined mode/wave based approach[J]. *Computers & Structures*, 2015, **154**: 145-162.
- [22] HOANG T, DUHAMEL D, FORET G. Wave finite element method for waveguides and periodic structures subjected to arbitrary loads[J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2020, **179**: 103437.
- [23] MENCİK J M, DUHAMEL D. A wave-based model reduction technique for the description of the dynamic behavior of periodic structures involving arbitrary-shaped substructures and large-sized finite element models [J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2015, **101**: 1-14.
- [24] GUO J, XIAO Y, ZHANG S, et al. Bloch wave based method for dynamic homogenization and vibration analysis of lattice truss core sandwich structures[J]. *Composite Structures*, 2019, **229**: 111437.
- [25] LANGLEY R S. A note on the force boundary conditions for two-dimensional periodic structures with corner freedoms[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1993, **167**(2): 377-381.
- [26] STEWART G W. *Matrix Algorithms, Volume 1: Basic Decompositions*[M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1998.
- [27] FAHY F J, GARDONIO P. *Sound and Structural Vibration: Radiation, Transmission and Response*[M]. Amsterdam: Academic Press, 2007.
- [28] CREMER L, HECKL M, PETERSSON B A T. *Structure-Borne Sound*[M]. 3rd ed. Berlin: Springer, 2005.