

表面效应对热电材料中纳米孔周围热应力的影响*

赵婕燕¹, 杨海兵²

(1. 华南理工大学 土木与交通学院, 广州 510641;

2. 河海大学 力学与材料学院, 南京 211100)

摘要: 基于完整 Gurtin-Murdoch (G-M) 低阶表面能模型, 进一步探讨了纳米尺度下表面效应的影响. 建立了合理考虑构型变化的应力边界条件, 实现了研究尺度从宏观到微观的转变. 利用复变函数理论和保角映射技术, 构建了用于纳米尺度下的热-电-力理论框架模型, 得到了热电基体中纳米孔周围热场、温度场以及应力场的半解析解. 数值结果表明, 相对于完整 G-M 模型, 简化 G-M 模型(忽略孔洞构型变化的影响)往往会高估表面效应和远场热电载荷对热应力分布的影响. 此外, 表面效应的存在将在一定程度上缓解纳米孔周围的热应力集中.

关键词: 热电材料; 完整 Gurtin-Murdoch 模型; 表面效应; 复变函数理论; 纳米孔

中图分类号: TB332; O39 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.440151

Surface Effects on Thermal Stresses Around the Nanohole in Thermoelectric Material

ZHAO Jieyan¹, YANG Haibing²

(1. School of Civil Engineering and Transportation, South China University of Technology, Guangzhou 510641, P.R.China;

2. College of Mechanics and Materials, Hohai University, Nanjing 211100, P.R.China)

Abstract: Based on the complete Gurtin-Murdoch (G-M) low-order surface energy model, the surface effects at nanoscale were further explored. The transition from macroscale to microscale was achieved through construction of reasonable stress boundary conditions in view of the change of hole geometry configuration. With the series expansion techniques and complex variable methods, the semi-analytic solutions for the electric field, the temperature field, and the full stress field in the vicinity of the nanohole within the thermoelectric matrix were derived eventually with a built thermal-electrical-force theoretical framework model at nanoscale. Numerical results show that, compared with the complete G-M model, the simplified G-M model (neglecting the effects of nanohole geometry changes) would overestimate the surface effects and far-field thermoelectric loading effects on the thermal stress distributions. In addition, the surface effects can relieve the thermal stress concentration around the nanohole to some extent.

Key words: thermoelectric material; complete Gurtin-Murdoch model; surface effect; complex function theory; nanohole

* 收稿日期: 2023-05-15; 修订日期: 2023-06-15

基金项目: 国家自然科学基金项目(11902116); 广东省自然科学基金项目(2022A1515011773)

作者简介: 赵婕燕(1998—), 女, 硕士生(E-mail: 18768174161@163.com);

杨海兵(1988—), 男, 讲师, 博士(通讯作者. E-mail: yanghb@scut.edu.cn).

引用格式: 赵婕燕, 杨海兵. 表面效应对热电材料中纳米孔周围热应力的影响[J]. 应用数学和力学, 2023, 44(11): 1311-1324.

0 引言

热电材料因其固有的热电转换特性,在温差制冷、温差发电和传感器等领域具有十分重要的应用价值。近年来,无论是在学术研究领域,还是在工业应用领域,对高性能热电材料的探索都引起了人们的极大关注^[1-2]。研究发现,纳米结构具有开发高性能热电材料的重要潜力,通过引入一些新的散射机制,可以断开热电传输间的联系。同时,纳米结构的存在能够有效地增强材料中电热输运性能的协同调控,提高热电材料的热电优值(ZT),是获得高性能热电材料的重要手段^[3-5]。在纳米复合热电材料中,纳米第二相的存在可以引起额外的声子散射从而降低晶格热导率,而纳米相(孔洞或夹杂)和基体相形成的界面结构也可降低对电子的散射作用,从而显著优化材料的热电性能^[6]。

近年来,通过纳米结构工程开发纳米复合热电材料已成为提高材料热电性能的重要途径。其中一种有效的方法就是在材料基体中引入纳米孔洞或夹杂,诱导额外的声子散射并降低材料的晶格导热性。Wang等^[7]成功地在材料基体中引入了纳米孔洞,从而在材料内部产生了强烈的声子散射,显著降低了材料的晶格导热性。Xu等^[8]进一步证明了纳米多孔热电材料的潜力,他们利用孔洞诱导了界面上的强声子散射,在488 K时获得了晶格热导率低至 $0.13 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ 的纳米多孔热电材料。与块状热电材料相比,纳米多孔热电材料具有更高的ZT值,可以减少近三分之一的材料消耗,降低了整体生产成本,进一步提高了材料的便携性。此外,Tarkhanyan和Niarchos^[9]发现,当孔隙率达到35%时,孔径约为1.65 nm的多孔热电材料的晶格导热系数降低约为块状热电材料的1/30。

基于此,研究具有纳米结构的高性能热电材料的制备、结构和性能就显得尤为重要和迫切,尤其是纳米复合材料的结构与力学性能之间的关系一直是研究的热点^[10]。然而,纳米结构造成的不连续性将导致热应力在不均匀周围的分布发生突变,从而影响纳米复合热电材料的力学性能^[11-12]。因此,基于纳米尺度上纳米不均匀性对提高热电材料转换效率的重要作用,研究纳米尺度上热电连续介质模型的可靠性,计算和分析热电材料中热应力集中的大小和位置,不仅对控制材料性能,而且对提高热电材料的效率也具有重要的意义。

但与宏观问题不同的是,在微观尺度下,由于表面及表面附近原子所具有的能量通常与基体原子所具有的能量不同,导致固体中产生多余的自由能,即表面自由能,而表面效应与表面自由能的变化息息相关。为了准确表征这些效应,Gurtin和Murdoch^[13]提出了表面效应理论,为研究纳米复合材料提供了理论框架,充分考虑了表面效应中的表面弹性和表面张力。Dai等^[14]研究了弹性平面问题中的应力集中,具体分析了孔洞形状和界面表面张力的影响。Wang等^[15]研究了两个具有表面张力的纳米椭圆孔之间的相互作用,发现当两个孔间的距离足够小时,孔间的强相互作用会改变应力的分布。冯国益等^[16]研究了纳米尺度下孔边均布径向多裂纹的Ⅲ型断裂性能,讨论了裂纹数量、裂纹/孔径比和缺陷表面性能对应力强度因子的影响。Wang等^[17]研究了任意形状的纳米夹杂周围由表面张力引起的应力,发现夹杂物和基体两侧的最大法向应力均出现在拐角处。Wang等^[18]考虑了表面张力引起的纳米纤维截面形状变化,发现无论截面大小如何,截面边界处的位移与表面张力呈线性关系。黄汝超等^[19]基于三种构型的表面/界面能理论,研究了热弹性纳米复合材料的有效性能,讨论了残余界面应力对纳米尺度夹杂填充的热弹性复合材料有效热膨胀系数的影响。此外,Song等^[20]分析了热电材料中表面弹性和电流密度对圆形纳米孔周围热应力的影响。

但目前对纳米复合材料的研究主要集中在简化的G-M模型上,该模型利用变形前的几何构型来计算表面效应引起的热应力。与一般弹性材料不同,热电材料中纳米孔的几何形状易受到外部热电载荷的影响,忽略变形对材料法向量和界面平均曲率的影响将引起较大误差,从而影响预测结果的准确性^[21-22]。因此,本研究基于完整的G-M低阶表面能模型,建立了一个积分应力边界条件来描述平面变形下界面表面效应引起的应力跳跃。重点研究了纳米尺度下热电材料表面弹性和表面张力对纳米孔周围热应力集中的影响。

1 基本方程

设热电基体内包含有一个具有表面效应的纳米孔洞,如图1所示。在基体无限远处受到均匀电流密度 (J_x, J_y) 与能流密度 (J_{ux}, J_{uy}) 的共同作用。孔洞与基体的边界用 L 表示,在此边界上,考虑了表面弹性 γ 与残余表面张力 τ_s 的作用,并无额外的电荷与热流输入。

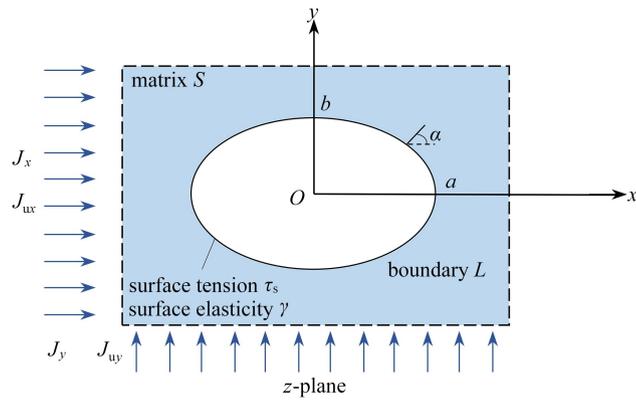


图 1 包含纳米孔的无限大热电基体

Fig. 1 The infinite thermoelectric matrix with a nanohole

1.1 热电场基本方程

假设基体为均匀且各向同性的热电材料,热电材料内的电流密度 \mathbf{J} 、热流密度 \mathbf{J}_q 和能流密度 \mathbf{J}_u 可以表示为^[11,23]

$$\mathbf{J} = -\delta \nabla \phi - \delta \varepsilon \nabla T = -\delta \nabla (\phi + \varepsilon T), \quad (1)$$

$$\mathbf{J}_q = -T \varepsilon \delta \nabla \phi - (T \varepsilon^2 \delta + \kappa) \nabla T = \varepsilon T \mathbf{J} - \kappa \nabla T, \quad (2)$$

$$\mathbf{J}_u = \mathbf{J}_q + \phi \mathbf{J} = (\phi + \varepsilon T) \mathbf{J} - \kappa \nabla T, \quad (3)$$

其中, $\delta, \varepsilon, \kappa, \phi$ 和 T 分别为基体材料的电导率、Seebeck 系数、导热系数、电势和温度。

当处于稳态时,基体内部与热电传输相关的电荷与能量均保持守恒,可表示为

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_u = 0. \quad (5)$$

根据材料内部的电荷守恒条件,将式(1)代入式(4)中,可得到

$$\nabla^2 (\phi + \varepsilon T) = 0, \quad (6)$$

式中 ∇^2 表示二阶 Laplace 算子。

利用复变函数理论,对式(6)进行求解,得到其通解为

$$\phi + \varepsilon T = \text{Re}[f'(z)], \quad (7)$$

其中, $f(z)$ 为任意解析的复势函数。

同样地,根据能流密度守恒条件,将能流密度方程(3)代入能量守恒方程(5)中,可以得到

$$\kappa \nabla^2 T + \frac{\delta}{2} \nabla^2 [(\phi + \varepsilon T)^2] = 0. \quad (8)$$

再将电荷守恒条件(6)与(7)代入,式(8)可以表示为

$$\nabla^2 T = -\frac{\delta}{2\kappa} \nabla^2 [(\phi + \varepsilon T)^2] = -\frac{\delta}{\kappa} f''(z) \overline{f''(z)}. \quad (9)$$

通过求解,可得到式(9)的通解为

$$T = -\frac{\delta}{4\kappa} f'(z) \overline{f'(z)} + \text{Re}[g'(z)], \quad (10)$$

其中, $g(z)$ 为任意解析的复势函数, $\text{Re}(\cdot)$ 表示复势函数中的实部, $\overline{f'(z)}$ 为函数 $f'(z)$ 的共轭函数。最后利用式(7)和(10),可得到热电场中的电势分布为

$$\phi = \text{Re}[f'(z)] + \frac{\delta \varepsilon}{4\kappa} f'(z) \overline{f'(z)} - \varepsilon \text{Re}[g'(z)]. \quad (11)$$

将温度分布(10)与电势分布(11)代入式(1)–(3)中,即可得到材料内部相对应的电流密度、能量通量和热流密度:

$$J_x - iJ_y = -\delta f''(z), \quad (12)$$

$$J_{ux} - iJ_{uy} = -\frac{\delta}{2} f''(z) f'(z) - \kappa g''(z), \quad (13)$$

$$J_{qx} - J_{qy} = -\kappa g''(z) + \frac{\delta}{2} f''(z) \overline{f'(z)} + \frac{\varepsilon \delta^2}{4\kappa} f''(z) f'(z) \overline{f'(z)} - \varepsilon \delta f''(z) \operatorname{Re}[g'(z)]. \quad (14)$$

利用式(12)–(14),积分后可得到孔洞边界上的合电流密度、合能流密度和合热流密度表达式:

$$\int J_n(s) ds = -\operatorname{Im}[\delta f'(z)], \quad (15)$$

$$\int J_{un}(s) ds = -\operatorname{Im}\left[\frac{\delta}{4} f'^2(z) + \kappa g'(z)\right], \quad (16)$$

$$\int J_{qn}(s) ds = -\operatorname{Im}\left[\frac{\delta}{4} f'^2(z) + \kappa g'(z)\right] - \int \phi J_n(s) ds, \quad (17)$$

式中,下标 n 表示沿法线方向的分量, $\operatorname{Im}(\cdot)$ 表示复势函数中的虚部.式(15)–(17)为积分形式的电流场与温度场的边界条件.

1.2 热弹场基本方程

根据材料内的平衡方程、变形协调方程和应力-应变关系,可以得到用 Airy 应力函数 U 表示的热应力控制方程^[24]:

$$\nabla^4 U + E\lambda \nabla^2 T = 0. \quad (18)$$

将温度分布(10)代入式(18)中可得到

$$\nabla^4 U = \frac{E\lambda\delta}{\kappa} f''(z) \overline{f''(z)}. \quad (19)$$

当为平面应力状态时, $\kappa = E\lambda$; 当为平面应变状态时, $\kappa = E\lambda/(1-\nu)$. 利用叠加原理和复变函数方法,对式(19)进行求解,可得到相对应的应力和位移分量:

$$\sigma_y + \sigma_x = \frac{\mu\lambda_v\delta}{2\kappa} f'(z) \overline{f'(z)} + 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}], \quad (20)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = \frac{\mu\lambda_v\delta}{2\kappa} f''(z) \overline{f(z)} + 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)], \quad (21)$$

$$2\mu(u_x + iu_y) = \beta\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} - \frac{\mu\lambda_v\delta}{4\kappa} \overline{f'(z)f(z)} + 2\mu\lambda g(z), \quad (22)$$

其中

$$\lambda = \begin{cases} \lambda, & \text{plane stress,} \\ (1+\nu)\lambda, & \text{plane strain,} \end{cases} \quad \lambda_v = \begin{cases} (1+\nu)\lambda, & \text{plane stress,} \\ \frac{(1+\nu)\lambda}{1-\nu}, & \text{plane strain,} \end{cases}$$

$$\beta = \begin{cases} \frac{3-\nu}{1+\nu}, & \text{plane stress,} \\ 3-4\nu, & \text{plane strain,} \end{cases}$$

式中, $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 为与热弹场相关的复势函数,函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 已在上小节的热电场中定义.

另外,对路径 s 进行积分,可以得到满足应力相容条件(19)的合力函数 (F_x, F_y) :

$$i \int (F_x + iF_y) ds = \left[\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} + \frac{\mu\lambda_v\delta}{4\kappa} \overline{f'(z)f(z)} \right]. \quad (23)$$

1.3 完整考虑表面效应的应力边界方程

当孔洞的尺寸大小由宏观尺度减小到微纳米尺度时,孔洞界面上的表面积与体积之比会显著增加,与宏观尺度时的力学性能产生显著差异.此时,纳米孔洞附近的应力集中情况不仅仅由远端荷载所决定,与受孔洞尺寸和形状影响的表面效应也息息相关.因此准确表征表面效应,并研究其对纳米孔洞周围热应力的影响

有着十分重要的意义.完整的 G-M 低阶表面能模型提供了一种精确描述应力边界条件的方法,充分考虑了微纳米尺度下的表面弹性 γ 与表面张力 τ_s .

完整考虑表面效应影响的应力边界条件可表示为^[25]

$$\begin{cases} \sigma_{nn} = \gamma \varepsilon_{nn} \frac{d\alpha}{ds} + \tau_s \left(\frac{d\alpha}{ds} + \frac{d^2\alpha}{ds^2} u_t + \frac{d\alpha}{ds} \frac{du_t}{ds} - \frac{d^2 u_n}{ds^2} \right), \\ \sigma_{nt} = -\gamma \frac{d\varepsilon_{nn}}{ds} + \tau_s \left[\left(\frac{d\alpha}{ds} \right)^2 u_t - \frac{d\alpha}{ds} \frac{du_n}{ds} \right], \end{cases} \quad \text{on } L, \quad (24)$$

式中, σ_{nn} 和 σ_{nt} 分别为边界 L 上沿法向方向和切向方向上的应力分量, u_n 和 u_t 分别为边界 L 上沿法向方向和切向方向上的位移分量, ε_{nn} 为边界 L 上沿切线方向的法向应变.

根据文献[26]中给出的积分型应力边界条件

$$i \int (F_x + iF_y) ds = e^{i\alpha} \left[\tau_s - ie^{-i\alpha} \frac{\gamma + \tau_s}{2} \frac{d(u_x + iu_y)}{ds} - ie^{i\alpha} \frac{\gamma - \tau_s}{2} \frac{d(u_x - iu_y)}{ds} \right], \quad (25)$$

将位移分量(22)代入式(25)中,即可得到基于完整 G-M 模型下的应力边界条件:

$$\begin{aligned} i \int (F_x + iF_y) ds = & \tau_s \cdot e^{i\alpha} + e^{i\alpha} \left[\frac{(\gamma + \tau_s)}{4\mu} (\beta \varphi'(z) - \overline{\varphi'(z)} + e^{-2i\alpha} (z \varphi''(z) + \overline{\psi'(z)})) \right] - \\ & \frac{\lambda_v \delta (\gamma + \tau_s)}{16\kappa} [-\overline{f''(z)} f(z) e^{-2i\alpha} + f'(z) \overline{f'(z)}] + \frac{(\gamma - \tau_s) \lambda}{2} \overline{g'(z)} + \\ & \frac{(\gamma - \tau_s)}{4\mu} (\beta \overline{\varphi'(z)} - \varphi'(z) + e^{2i\alpha} (\bar{z} \varphi''(z) + \psi'(z))) - \\ & \frac{\lambda_v \delta (\gamma - \tau_s)}{16\kappa} [-f''(z) \overline{f(z)} e^{2i\alpha} + f'(z) \overline{f'(z)}] + \frac{(\gamma + \tau_s) \lambda}{2} g'(z) \Big], \end{aligned} \quad (26)$$

其中, τ_s 和 γ 分别为孔洞界面上的表面张力和表面弹性.分析边界条件(26)发现,当忽略式中右侧的第 2 项时,完整 G-M 模型可退化为简易 G-M 模型,也可称为简化表面张力模型,忽视了纳米孔变形对曲率和边界法向分量的影响.当式(26)中的所有表面弹性项都为零时,可退化为完整表面张力模型,此时,模型中考虑了孔洞变形对曲率和边界法向分量的贡献,但忽略了表面弹性的影响.此外,当式(26)中的所有表面张力项都为零时,完整 G-M 模型可退化为表面弹性体模型,即仅考虑表面弹性的影响.

2 分析与求解

为了充分利用级数展开法进行求解,本文引入了保角映射技术,将 z 平面上的孔外无限区域与复势 ξ 平面上单位圆外的无限区域联系起来:

$$z = \omega(\xi) = R \left(\xi + \sum_{j=1}^M m_j \xi^{-j} \right), \quad |\xi| \geq 1, \quad (27)$$

其中, M 为正整数,常数 R 和 $m_j (j = 1, 2, \dots, M)$ 用来确定孔洞的整体尺寸大小与形状.

2.1 热电场

根据上一节给出的孔洞界面上的电流密度方程(15),以及在此孔洞界面上无电荷与热流的输入,可以看出复势函数 $f'(z)$ 为一单值函数,且热电基体中的复势函数 $f(z)$ 可表示为

$$f(z) = \frac{\zeta_1}{2} z^2 + \zeta_{10} z + A \ln \xi + \sum_{j=1}^N a_j \xi^{-j}, \quad (28)$$

$$f'(z) = \zeta_1 z + \zeta_{10} + \left(A \xi^{-1} - \sum_{j=1}^N j a_j \xi^{-j-1} \right) / \omega'(\xi), \quad (29)$$

式中, ζ_1 为由远端电流密度决定的复常数, ζ_{10} 为描述基体内热电势变化的实常数, A 和 $a_j (j = 1, 2, \dots, N-1)$ 是待确定的未知复数.将式(28)代入电流密度(12)中,取极限 $z \rightarrow \infty$ 时,可得

$$\zeta_1 = -\frac{J_x^\infty - iJ_y^\infty}{\delta}. \quad (30)$$

将式(29)代入式(7)中,取极限 $z \rightarrow \infty$ 时,可得

$$\zeta_{10} = \phi + \varepsilon T. \quad (31)$$

根据积分形式的合电流密度(15)可知,孔洞界面上的电绝缘边界条件可表示为

$$\text{Im}[\delta f'(z)] = 0. \quad (32)$$

再将式(29)代入式(32)中,界面上的电绝缘边界条件为

$$\zeta_1 \omega(\xi) + \zeta_{10} + \frac{1}{\omega'(\xi)} \left(A\xi^{-1} - \sum_{j=1}^N ja_j \xi^{-j-1} \right) = \overline{\zeta_1 \omega(\xi)} + \zeta_{10} + \frac{1}{\overline{\omega'(\xi)}} \left(\overline{A\xi} - \sum_{j=1}^N j \overline{a_j} \overline{\xi}^{j+1} \right). \quad (33)$$

利用级数展开法将方程(33)中的项进行 Fourier 展开,得到级数展开后的电场边界条件:

$$\begin{aligned} \zeta_1 \omega(\sigma) + \zeta_{10} + A\xi^{-1} \sum_{j=-N}^{N+2} h_{1j} \sigma^j - \sum_{j=1}^N ja_j \sigma^{-j-1} \sum_{j=-N+1}^{2N+2} h_{2j} \sigma^j = \\ \overline{\zeta_1 \omega(\sigma)} + \zeta_{10} + \overline{A\sigma} \sum_{j=-N-2}^N h_{3j} \sigma^j - \sum_{j=1}^N j \overline{a_j} \sigma^{j+1} \sum_{j=-2N-2}^{N-1} h_{4j} \sigma^j. \end{aligned} \quad (34)$$

式(34)中的截断函数 h_{1j}, h_{2j}, h_{3j} 和 h_{4j} 均可由 Fourier 级数展开所得到

$$\begin{cases} h_{1j} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\omega'(\sigma)} \cdot \sigma^{-j} d\theta, & j = -N, \dots, N+2, \\ h_{2j} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\omega'(\sigma)} \cdot \sigma^{-j} d\theta, & j = -N+1, \dots, 2N+2, \\ h_{3j} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\omega'(\sigma)} \cdot \sigma^{-j} d\theta, & j = -N-2, \dots, N, \\ h_{4j} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\omega'(\sigma)} \cdot \sigma^{-j} d\theta, & j = -2N-2, \dots, N-1. \end{cases} \quad (35)$$

通过对比式(34)两边的相同幂次项 $\sigma^j (j = -N-1, \dots, -1, 1, \dots, N+1)$,可以得到一组包含未知复系数 A 和 $a_j (j = 1, 2, \dots, N)$ 的线性方程组.再求解此方程组,即可得到 A 和 $a_j (j = 1, 2, \dots, N)$ 的值,并确定复势函数 $f(z)$.

同样地,复势函数 $g(z)$ 与其导数 $g'(z)$ 可写为以下形式:

$$g(z) = \frac{\zeta_3}{3} z^3 + \frac{\zeta_2}{2} z^2 + \zeta_{20} z + C \ln \xi + \sum_{j=1}^N c_j \xi^{-j}, \quad (36)$$

$$g'(z) = \zeta_3 z^2 + \zeta_2 z + \zeta_{20} + \left(C\xi^{-1} - \sum_{j=1}^N jc_j \xi^{-j-1} \right) / \omega'(\xi), \quad (37)$$

其中, ζ_2 和 ζ_3 为两个复常数,由远端能流密度矢量条件所确定, ζ_{20} 为表示基体内部表征温度场变化的实常数.将式(29)、(37)代入合能流密度(16)中,再取极限 $z \rightarrow \infty$,可得到

$$\zeta_2 = -\frac{J_{ux}^\infty - iJ_{uy}^\infty}{\kappa} - \frac{\delta}{2\kappa} \zeta_{10} \zeta_1, \quad \zeta_3 = -\frac{\delta}{4\kappa} \zeta_1^2, \quad \zeta_{20} = T + \frac{\delta}{4\kappa} (\zeta_{10})^2, \quad (38)$$

其余的复系数 C 和 $c_j (j = 1, 2, \dots, N)$ 可由孔洞界面上的温度边界条件确定.根据合电流表达式(15)和合热流表达式(17),孔洞界面上的热绝缘边界条件可表示为

$$\text{Im} \left[\frac{\delta}{4} f'^2(z) + \kappa g'(z) \right] = 0, \quad (39)$$

其中,复势函数 $f'(z)$ 已在上文确定.

将式(37)代入,温度场边界条件(39)可改写为

$$\frac{\delta}{4} [f'^2(\sigma) - \overline{f'^2(\sigma)}] + \kappa \left[\zeta_3 \omega(\sigma)^2 + \zeta_2 \omega(\sigma) + \zeta_{20} + \frac{1}{\omega'(\sigma)} \left(C\sigma^{-1} - \sum_{j=1}^N jc_j \sigma^{-j-1} \right) \right] =$$

$$\kappa \left[\bar{\xi}_3 \omega(\sigma)^2 + \bar{\xi}_2 \omega(\sigma) + \bar{\xi}_{20} + \frac{1}{\omega'(\sigma)} \left(\bar{C}\sigma - \sum_{j=1}^N j \bar{c}_j \sigma^{j+1} \right) \right]. \quad (40)$$

与上文电场边界条件的求解方法相同,将式(40)中的项进行 Fourier 展开,通过求解包含未知复系数 C 和 $c_j(j=1,2,\dots,N)$ 的线性方程组,得到未知的复系数 C 和 $c_j(j=1,2,\dots,N)$,即可确定材料内部的温度场。

2.2 热弹场

根据孔洞界面上应力连续的边界条件,利用式(23)和(26)可以得到热弹场上的边界条件:

$$\begin{aligned} \varphi(z) + z \overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} + \frac{\mu \lambda_v \delta}{4\kappa} f'(z) \overline{f'(z)} = \\ \tau_s e^{i\alpha} + e^{i\alpha} \left[\frac{(\gamma + \tau_s)}{4\mu} (\beta \overline{\varphi'(z)} - \overline{\varphi'(z)} + e^{-2i\alpha} (z \overline{\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)})) - \right. \\ \left. \frac{\lambda_v \delta (\gamma + \tau_s)}{16\kappa} [-\overline{f''(z)} f(z) e^{-2i\alpha} + f'(z) \overline{f'(z)}] + \frac{(\gamma + \tau_s) \lambda}{2} g'(z) + \right. \\ \left. \frac{(\gamma - \tau_s)}{4\mu} (\beta \overline{\varphi'(z)} - \overline{\varphi'(z)} + e^{2i\alpha} (\bar{z} \overline{\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)})) - \right. \\ \left. \frac{\lambda_v \delta (\gamma - \tau_s)}{16\kappa} [-\overline{f''(z)} f(z) e^{2i\alpha} + f'(z) \overline{f'(z)}] + \frac{(\gamma - \tau_s) \lambda}{2} \overline{g'(z)} \right], \quad (41) \end{aligned}$$

其中复势函数 $f(z)$, $f'(z)$ 和 $f''(z)$ 等都已在上一小节的热电场中求解确定。复势函数 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 可以用截断级数表示为

$$\begin{cases} \varphi(z) = P(z) \ln \xi + \sum_{j=1}^N p_j \xi^{-j}, \\ \psi(z) = Q(z) \ln \xi + R \sum_{j=1}^N q_j \xi^{-j} / \omega'(\xi), \end{cases} \quad z \in L, \quad (42)$$

式中 p_j 和 q_j 为待确定的复系数。值得注意的是,对于包含纳米非均匀相的无限大平面问题,复势函数 $\varphi(z)$ 中的线性项可完全忽略^[27]。并将式(42)代入应力边界条件(41)中,系数 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 即可得以确定:

$$P(z) = P_0 = -\frac{2\mu \lambda_v C}{\beta + 1}, \quad Q(z) = \overline{P_0} + \frac{\mu \lambda_v \delta \bar{A}}{4\kappa} f'(z). \quad (43)$$

将式(43)代入式(41)中,应力边界条件可进一步表示为

$$\begin{aligned} P(z) \ln \sigma + \sum_{j=1}^N p_j \sigma^{-j} + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \left(\overline{P(z)} \sigma + \sum_{j=1}^N \bar{p}_j (-j) \sigma^{j+1} \right) - \\ \overline{Q(z)} \ln \sigma + \frac{R}{\omega'(\sigma)} \sum_{j=1}^N \bar{q}_j \sigma^j + \frac{\mu \lambda_v \delta}{4\kappa} f'(z) \overline{f(z)} = \\ \tau_s \frac{\xi \omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|} + \frac{(\gamma + \tau_s)}{4\mu} \left[\beta \frac{1}{|\omega'(\sigma)|} \left(P(z) + \sum_{j=1}^N p_j (-j) \sigma^{-j} \right) - \right. \\ \left. \frac{\omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)| \cdot \overline{\omega'(\sigma)}} \left(\sigma^2 \overline{P(z)} - \sum_{j=1}^N \bar{p}_j (-j) \sigma^{j+2} \right) \right] + \\ \frac{\gamma + \tau_s}{4\mu} \left[-\frac{|\omega'(\sigma)| \cdot \omega(\sigma) \cdot \overline{\omega''(\sigma)}}{\omega'(\sigma) \cdot \overline{\omega'(\sigma)}^3} \left(\overline{P(z)} + \sum_{j=1}^N \bar{p}_j (-j) \sigma^j \right) + \right. \\ \left. \frac{|\omega'(\sigma)| \cdot \omega(\sigma)}{\omega'(\sigma) \cdot \overline{\omega'(\sigma)}^2} \left(\sum_{j=1}^N \bar{p}_j j(j+1) \sigma^{j+1} - P(z) \sigma \right) + \right. \\ \left. \frac{|\omega'(\sigma)|}{\omega'(\sigma) \cdot \overline{\omega'(\sigma)}} \left(\overline{Q(z)} + \frac{R}{\omega'(\sigma)} \sum_{j=1}^N \bar{q}_j (-j) \sigma^j - \frac{R \cdot \overline{\omega''(\sigma)}}{\omega'(\sigma)^2} \sum_{j=1}^N \bar{q}_j \sigma^{j-1} \right) \right] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda_s \delta(\gamma + \tau_s)}{16\kappa} \left[-\overline{f''(z)} f(z) \frac{|\omega'(\sigma)|}{\sigma \omega'(\sigma)} + f'(z) \overline{f'(z)} \frac{\sigma \omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|} \right] + \\
& \frac{(\gamma + \tau_s) \lambda}{2} \frac{\sigma \omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|} g'(z) + \\
& \frac{\gamma - \tau_s}{4\mu} \left[\frac{\beta \cdot \omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)| \cdot \overline{\omega'(\sigma)}} \left(\overline{P(z)} \cdot \sigma^2 + \sum_{j=1}^N \overline{p_j} (-j) \sigma^{j+2} \right) - \right. \\
& \left. \frac{1}{|\omega'(\sigma)|} \left(P(z) + \sum_{j=1}^N p_j (-j) \sigma^{-j} \right) \right] + \\
& \frac{\gamma - \tau_s}{4\mu} \left[-\frac{\overline{\omega(\sigma)} \cdot \omega''(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|^3} \left(P(z) \sigma^2 + \sum_{j=1}^N p_j (-j) \sigma^{-j+2} \right) + \right. \\
& \left. \frac{\omega'(\sigma) \cdot \overline{\omega(\sigma)}}{|\omega'(\sigma)|^3} \left(\sum_{j=1}^N p_j j(j+1) \sigma^{-j+1} - P(z) \sigma \right) + \right. \\
& \left. \frac{1}{|\omega'(\sigma)|^3} \left(Q(z) \omega'(\sigma)^2 \sigma^2 + R \omega'(\sigma) \sum_{j=1}^N q_j (-j) \sigma^{j+2} - R \omega''(\sigma) \sum_{j=1}^N q_j \sigma^{-j+3} \right) \right] - \\
& \frac{\lambda_s \delta(\gamma - \tau_s)}{16\kappa} \left[-f''(z) \overline{f(z)} \frac{\sigma^3 \omega'(\sigma)^3}{|\omega'(\sigma)|^3} + f'(z) \overline{f'(z)} \frac{\sigma \omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|} \right] + \\
& \frac{(\gamma - \tau_s) \lambda}{2} \frac{\sigma \omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|} \overline{g'(z)}. \tag{44}
\end{aligned}$$

同样地,如上文中对热电场边界方程的求解一样,将式(44)中的项进行 Fourier 级数展开,可求解出所有未知的复系数,从而确定复势函数 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$, 最后得到热电材料的应力场。

根据应力变换公式,可以得到材料在极坐标下的应力分量:

$$\begin{cases} \sigma_{nn} + \sigma_{tt} = \sigma_{yy} + \sigma_{xx}, \\ \sigma_{tt} - \sigma_{nn} + 2i\tau_{nt} = e^{2i\alpha} (\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\tau_{xy}), \end{cases} \tag{45}$$

式中, σ_{nn} , σ_{tt} 和 τ_{nt} 分别为法向应力、环向应力和剪应力, α 为外法向方向与边界间的夹角。

3 数值算例

下面的算例中,本文选用室温热电材料 Bi_2Te_3 与中温热电材料 PbTe 为基体材料(相应材料性能见表 1), 材料上温度分布均匀,分别为 $T = 400 \text{ K}$, $T = 800 \text{ K}$, 并假设远场电流密度与能流密度为 $J_x = 2 \times 10^5 \text{ A/m}^2$ 和 $J_{ux} = 5 \times 10^3 \text{ W/m}^2$ [28-29]。

表 1 Bi_2Te_3 和 PbTe 的材料性能

Table 1 Properties of the Bi_2Te_3 material and the PbTe material

	$\delta/(\text{S/m})$	E/GPa	$\varepsilon/(\text{V/K})$	$\kappa/(\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K}))$	λ/K^{-1}	ν
Bi_2Te_3	1.1×10^5	47	2×10^{-4}	1.6	2.7×10^{-5}	0.4
PbTe	1×10^4	58	3×10^{-4}	1.5	2×10^{-5}	0.29

已知纳米孔洞界面上的表面效应包含表面弹性与表面张力两部分,为了详细研究表面弹性与表面张力分布对孔洞上环向热应力的具体影响,我们计算了在不同表面弹性与表面张力作用下,处于 x 轴端点处的环向应力值,具体数值如表 2 所示。

通过对表 2 的分析可知,纳米孔界面处的表面弹性恒定时,即使表面张力的微小改变也会导致纳米孔周围热应力的显著变化.另一方面,在保持表面张力不变的情况下,增加表面弹性对环向热应力没有较大影响.因此,在二维纳米圆孔问题中,表面张力对热应力的影响相对于表面弹性更为显著.因此,在后面的算例中我们将着重研究纳米孔界面上的表面张力对孔周环向热应力的影响。

表 2 不同表面弹性与表面张力共同作用下的环向应力值(单位:MPa)

Table 2 Hoop stresses under the combined actions of different surface elasticities and surface tensions (unit: MPa)

surface elasticity $\gamma / (\text{N/m})$	$\delta_{\text{II}} / \text{MPa}$		
	$\tau_s = 0.2 \text{ N/m}$	$\tau_s = 0.6 \text{ N/m}$	$\tau_s = 1.0 \text{ N/m}$
0	138.587 0	136.587 0	134.587 0
0.2	138.573 3	136.573 3	134.573 4
0.6	138.545 8	136.546 0	134.546 1
1.0	138.518 3	136.518 6	134.518 9

3.1 纳米圆孔问题

图 2 中, σ_{II}^* 代表无表面效应作用下的环向热应力值,并将此结果与文献[11]进行对比.可以看出,本文结果与文献中的结果十分吻合,这也证明了文中所构建的热-电-力耦合边界模型的准确性与计算结果的精确性.

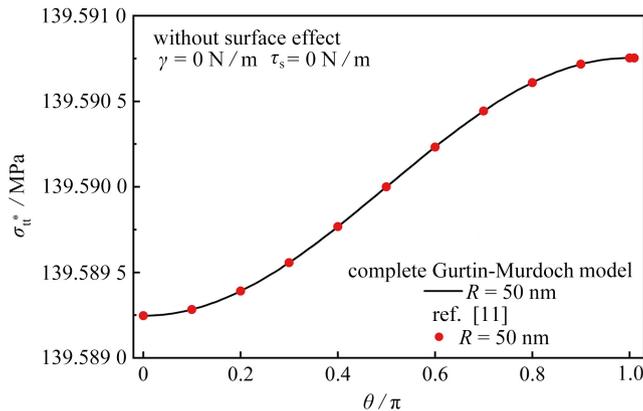


图 2 微观尺度下,本文工作与前人工作的比较

Fig. 2 Comparison of this work with previous work at microscale

图 3 中给出了不同表面张力作用下,纳米圆孔周围完整考虑表面效应的环向热应力 σ_{II} 随纳米孔径 R 变化的趋势.可以看出,是否考虑表面张力所得的预测结果间存在着明显差异,且这个差异随着孔径尺寸的减小或表面张力的增大而愈发显著,两者间最大误差可高达几十兆帕.因此,当研究尺度由宏观转为微观时,忽略孔洞界面上的表面张力将导致环向应力结果的显著误差.此外,我们还对比了基于简易 G-M 模型与完整 G-M 模型下的热应力分布.分析发现,当纳米孔洞为圆形时,两模型结果一致.这与文献[30]中的结论一致,即当不均匀相为圆形时,完整 G-M 模型与简化 G-M 模型得到的环向应力相同.因此对于纳米圆孔问题,可以优先选择简易 G-M 模型,节省计算时间.

为了进一步分析由表面张力引起的热应力变化,我们对计算结果进行了一定处理.图 4 中, σ_{II} 代表考虑表面效应作用下的环向应力, σ_{II}^* 代表不考虑表面效应的环向应力,因此 $\sigma_{\text{II}} - \sigma_{\text{II}}^*$ 代表了仅由表面效应引起的环向热应力变化.由图 4 可知,由表面效应引起的环向热应力会随着表面张力的增加而线性减小,且圆孔孔径越小,这一线性变化越明显.

3.2 纳米椭圆孔问题

为了分析表面效应与热电材料参数对孔周环向热应力的影响,图 5 中给出了在 Bi_2Te_3 基体和 PbTe 基体中,纳米孔周围的环向热应力分布.可以看出,对于 Bi_2Te_3 基体和 PbTe 基体,表面张力的增加将产生一定的压应力,使得孔洞周围的环向热应力减小,从而一定程度上缓解了孔周上的应力集中.值得注意的是,在长径比 (a/b) 越大的椭圆孔中,此现象愈发明显.

已知图 5 中的环向热应力由两部分组成:① 由表面效应引起的残余应力,② 远端载荷作用产生的环向热应力.为了进一步研究各部分应力的具体影响,我们在图 6 中给出了基于不同模型得到的孔周残余应力.其中, σ_s 代表基于简化表面张力模型的孔周残余应力, σ_c 代表基于完整表面张力模型的孔周残余应力, σ_0

代表基于完整 G-M 模型的孔周残余应力。

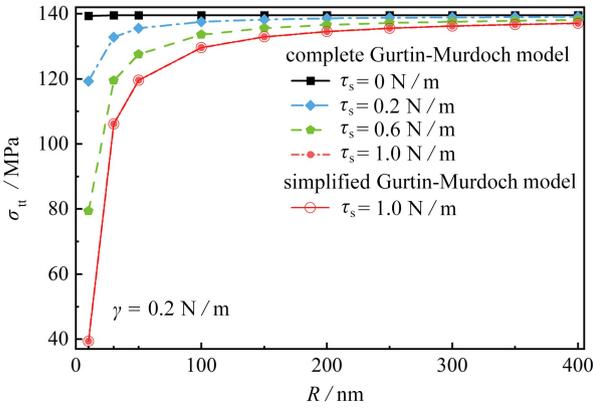


图3 表面张力对圆孔周围环向热应力的影响

Fig. 3 Effects of surface tensions on hoop thermal stresses around the circular hole

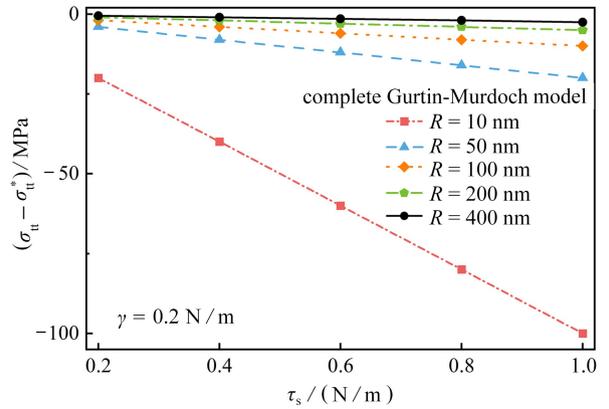
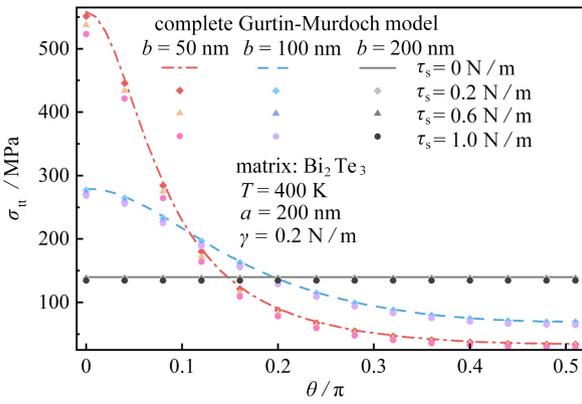


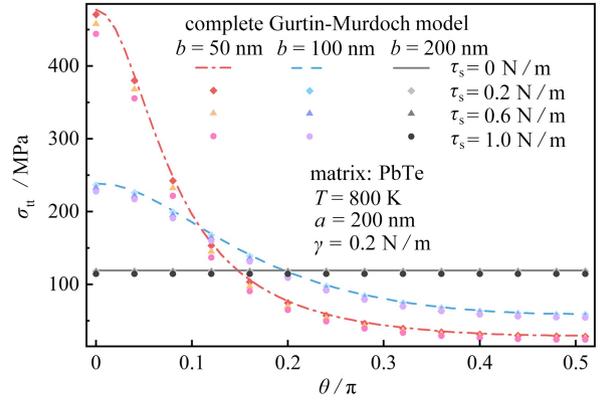
图4 环向热应力随表面张力的线性变化

Fig. 4 Linear variations of hoop thermal stresses with the surface tension



(a) Bi₂Te₃ 基体中纳米孔周围的环向热应力

(a) The hoop thermal stresses around the nanohole in the Bi₂Te₃ matrix

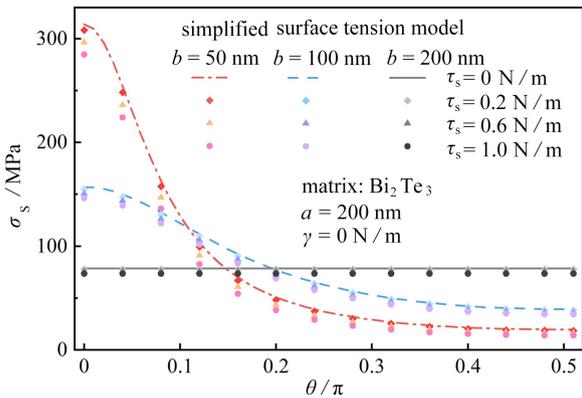


(b) PbTe 基体中纳米孔周围的环向热应力

(b) The hoop thermal stresses around the nanohole in the PbTe matrix

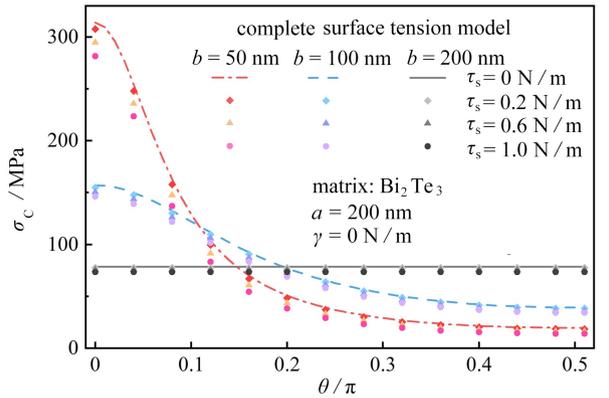
图5 纳米孔周围的环向热应力

Fig. 5 Hoop thermal stresses around the nanohole



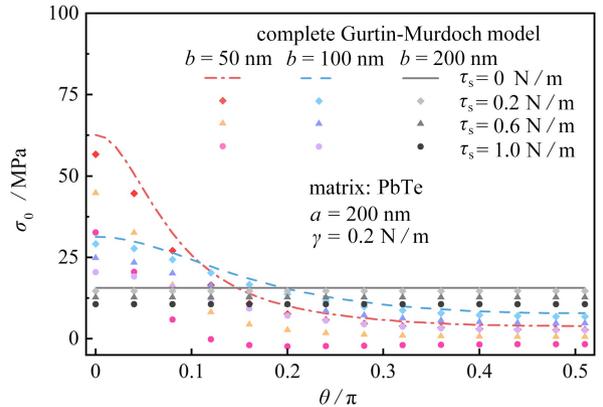
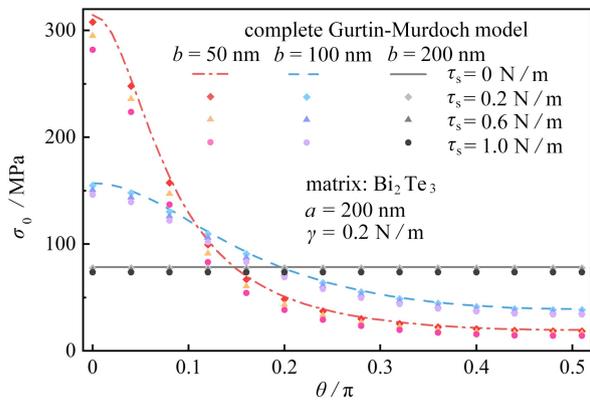
(a) 基于简化表面张力模型的孔周残余环向应力

(a) The residual hoop stresses around the nanohole derived from the simplified surface tension model



(b) 基于完整表面张力模型的孔周残余应力

(b) The residual hoop stresses around the nanohole derived from the complete surface tension model



(c) Bi_2Te_3 基体中基于完整 Gurtin-Murdoch 模型的孔周残余应力

(d) PbTe 基体中基于完整 Gurtin-Murdoch 模型的孔周残余应力

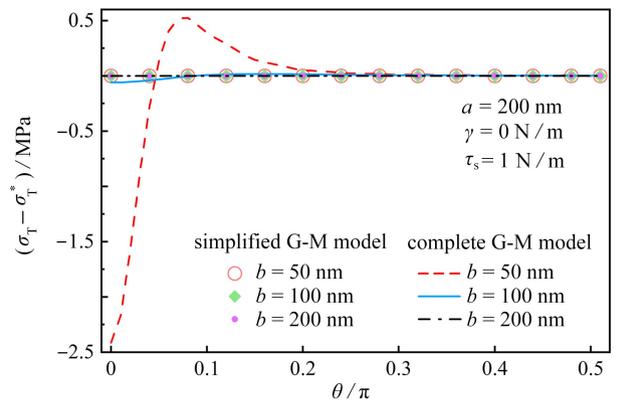
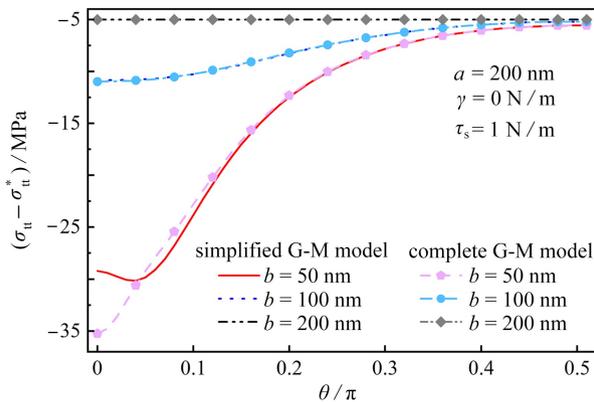
(c) The residual hoop stresses around the nanohole in the Bi_2Te_3 matrix derived from the complete Gurtin-Murdoch model

(d) The residual hoop stresses around the nanohole in the PbTe matrix derived from the complete Gurtin-Murdoch model

图 6 孔周残余应力分布

Fig. 6 The residual hoop stress distributions around the nanohole

分析图 6 可知,无论是简化 G-M 表面张力模型、完整 G-M 表面张力模型还是完整 G-M 模型,表面张力的引入与变化对残余应力都有显著影响,且此影响主要集中在曲率梯度变化较大的长轴端点附近.此外,表面张力的增加,将在长轴端点附近产生一个较大的压应力,从而影响孔周的残余应力分布.



(a) 表面张力对环向热应力的影响

(b) 表面张力对由热电外载引起的环向热应力的影响

(a) The influence of the surface tension on the hoop thermal stress

(b) The influence of the surface tension on the hoop thermal stress induced by thermoelectric external loading

图 7 表面张力的引入对环向热应力和由热电外载引起的环向热应力的影响

Fig. 7 The influences of the surface tension on the hoop thermal stress and the hoop thermal stress induced by thermoelectric external loading

为了进一步对比完整 G-M 模型与简化 G-M 模型对预测孔周环向热应力和远端热电载荷引起的环向热应力间的区别,图 7 中给出了基于两模型得到的孔周环向热应力与由热电外载引起的环向热应力分布.其中 $\sigma_{ii}, \sigma_{ii}^*, \sigma_{ii} - \sigma_{ii}^*$ 含义与图 4 相同, σ_T 代表考虑表面效应作用时由热电外载引起的环向应力值,可由环向热应力减去残余应力得到, σ_T^* 代表不考虑表面效应作用时由热电外载引起的环向应力值,因此 $\sigma_T - \sigma_T^*$ 代表表面张力对由热电外载诱导的这部分环向热应力的影响.

如图 7 所示,与纳米圆孔问题不同,对于非圆形纳米孔问题,完整的 G-M 模型和简化的 G-M 模型的预测环向热应力的结果间存在着显著差异,特别是在长轴端点附近.同时,随着长径比的增加,这些差异变得更加明显.因此,使用简化的 G-M 模型可能会高估孔周的环向应力,从而对纳米孔周围的应力分布预测产生较大

误差,特别是长轴端点处.此外,图7(b)表明,基于简化 G-M 模型与完整 G-M 模型,在对由远端热电载荷引起的热应力进行预测时,应力结果间存在一定的差异,但与在总环向热应力中观察到的总应力差异相比,此差异相对较小.

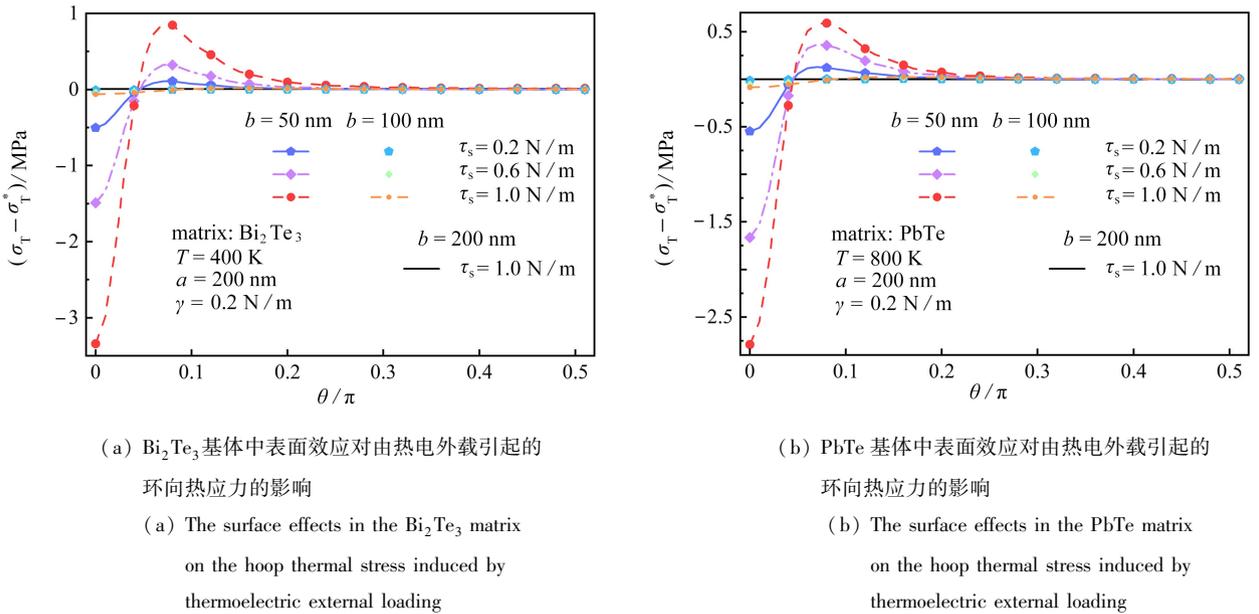


图8 表面效应对由热电外载引起的环向热应力的影响

Fig. 8 The surface effects on the hoop thermal stress induced by thermoelectric external loading

为深入研究表面效应对由远端热电载荷引起的热应力的影响,图8中给出了在不同表面张力情况下, Bi_2Te_3 和 PbTe 两种热电基体中由热电外载引起的环向热应力分布.可以看出,对于纳米圆孔问题,表面效应的影响主要集中在残余应力中,而对于热电外载引起的环向应力并无影响.但对于纳米非圆孔洞问题,即使在小变形情况下,表面效应的存在仍然会影响远端载荷引起的应力分布,并且随着表面张力的增大,这种影响变得更加显著.但相对于表面张力对残余应力的影响,此影响较小.

基于这些发现,简化的 G-M 模型可以替代完整的 G-M 模型,用于计算纳米圆孔周围的环向热应力,然而,对于长径比较大的椭圆孔,继续使用简化的 G-M 模型而非完整 G-M 模型来计算孔周的应力分布,可能会导致较大的误差.

4 结 论

基于复变函数理论,本文研究了无限大热电基体中包含纳米孔洞的二维平面问题,利用完整 G-M 界面模型精确表征了纳米孔洞界面上的表面弹性与表面张力,基于复变函数理论与保角映射方法,建立了纳米尺度下完整考虑表面效应的热-电-力模型.最后,通过数值算例分析了表面弹性与表面张力对环向热应力的贡献,研究了表面张力、孔径大小和材料参数等因素对热应力分布的影响.主要结论如下:

1) 在纳米尺度下,是否考虑表面效应的预测结果间存在着显著差异.因此,当研究尺度由宏观转为微观时,忽略表面效应的影响将导致热应力结果产生较大误差,且针对纳米复合热电材料,表面张力的影响对热应力分布的影响远大于表面弹性.

2) 当纳米孔为圆形时,简化 G-M 模型与完整 G-M 模型的预测结果一致.仅由表面张力引起的环向热应力会随着表面张力值的增加而线性减小,并当纳米圆孔的孔径不断减小时,这种线性变化会愈发明显.

3) 在预测非圆形孔洞周围的热应力分布时,使用简化 G-M 模型和完整 G-M 模型的预测结果间会产生较大差异,随着长径比的减小或表面张力的增加,这种差异会逐渐增加,且表面张力的引入可以在一定程度上缓解孔周的热应力集中情况.因此对于纳米圆孔问题,可以优先使用简化 G-M 模型进行计算;而对于椭圆孔问题,采用完整 G-M 模型可以得到更加精确的热应力分布情况.

参考文献(References):

- [1] BISWAS K, HE J Q, BLUM I D, et al. High-performance bulk thermoelectrics with all-scale hierarchical architectures[J]. *Nature*, 2012, **489**: 414-418.
- [2] ZHAO L D, LO S H, ZHANG Y S, et al. Ultralow thermal conductivity and high thermoelectric figure of merit in SnSe crystals[J]. *Nature*, 2014, **508**: 373-377.
- [3] MARTIN-GONZALEZ M, CABALLERO-CALERO O, DIAZ-CHAO P. Nanoengineering thermoelectrics for 21st century: energy harvesting and other trends in the field[J]. *Renewable & Sustainable Energy Reviews*, 2013, **24**: 288-305.
- [4] LIU W S, YAN X, CHEN G, et al. Recent advances in thermoelectric nanocomposites[J]. *Nano Energy*, 2012, **1**(1): 42-56.
- [5] DRESSELHAUS M S, CHEN G, TANG M Y, et al. New directions for low-dimensional thermoelectric materials[J]. *Advanced Materials*, 2007, **19**(8): 1043-1053.
- [6] WU Y H, ZHAI R S, ZHU T J, et al. Enhancing room temperature thermoelectric performance of *n*-type polycrystalline bismuth-telluride-based alloys via Ag doping and hot deformation[J]. *Materials Today Physics*, 2017, **2**: 62-68.
- [7] WANG Y, LIU W D, GAO H, et al. High porosity in nanostructured *n*-type Bi₂Te₃ obtaining ultralow lattice thermal conductivity[J]. *ACS Applied Materials & Interfaces*, 2019, **11**(34): 31237-31244.
- [8] XU B A, FENG T L, AGNE M T, et al. Highly porous thermoelectric nanocomposites with low thermal conductivity and high figure of merit from large-scale solution-synthesized Bi₂Te_{2.5}Se_{0.5} hollow nanostructures[J]. *Angewandte Chemie-International Edition*, 2017, **56**(13): 3546-3551.
- [9] TARKHANYAN R H, NIARCHOS D G. Reduction of thermal conductivity in porous “gray” materials[J]. *APL Materials*, 2014, **2**(7): 076107.
- [10] DUAN H L, WANG J, KARIHALOO B L, et al. Nanoporous materials can be made stiffer than non-porous counterparts by surface modification[J]. *ACTA Materialia*, 2006, **54**(11): 2983-2990.
- [11] YU C B, YANG H B, SONG K, et al. Stress concentration around an arbitrarily-shaped hole in nonlinear fully coupled thermoelectric materials[J]. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 2019, **14**(2): 259-276.
- [12] 崔春丽, 徐耀玲. 预测纳米纤维复合材料有效弹性性能的界面模型和界面相模型[J]. *应用数学和力学*, 2022, **43**(8): 877-887.(CUI Chunli, XU Yaoling. The interface model and the interphase model for predicting the effective elastic properties of nano-fiber composites[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(8): 877-887.(in Chinese))
- [13] GURTIN M E, MURDOCH A I. A continuum theory of elastic material surfaces[J]. *Archive for Rational Mechanics Analysis*, 1975, **57**(4): 291-323.
- [14] DAI M, GAO C F, RU C Q. Surface tension-induced stress concentration around a nanosized hole of arbitrary shape in an elastic half-plane[J]. *Meccanica*, 2014, **49**(12): 2847-2859.
- [15] WANG S, YANG H B, GAO C F, et al. In-plane stress analysis of two nanoscale holes under surface tension[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2020, **90**(6): 1363-1372.
- [16] 冯国益, 肖俊华, 苏梦雨. 考虑表面效应时孔边均布径向多裂纹Ⅲ型断裂力学分析[J]. *应用数学和力学*, 2020, **41**(4): 376-385.(FENG Guoyi, XIAO Junhua, SU Mengyu. Fracture mechanics analysis of mode-Ⅲ facial multi cracks on the edge of a hole with surface effects[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, **41**(4): 376-385.(in Chinese))
- [17] WANG S, DAI M, RU C Q, et al. Surface tension-induced interfacial stresses around a nanoscale inclusion of arbitrary shape[J]. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 2017, **68**(6): 127.
- [18] WANG S, LI X Y, YI X, et al. Morphological changes of nanofiber cross-sections due to surface tension[J]. *Extreme Mechanics Letters*, 2021, **44**: 101211.

- [19] 黄汝超, 陈永强. 残余界面应力对粒子填充热弹性纳米复合材料有效热膨胀系数的影响[J]. 应用数学和力学, 2011, **32**(11): 1283-1293. (HUANG Ruchao, CHEN Yongqiang. Effects of residual interface stress on effective thermal expansion coefficient of particle-filled composite[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2011, **32**(11): 1283-1293. (in Chinese))
- [20] SONG K, SONG H P, SCHIAVONE P, et al. The effects of surface elasticity on the thermal stress around a circular nano-hole in a thermoelectric material[J]. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2019, **24**(10): 3156-3166.
- [21] DAI M, GHARAH A, SCHIAVONE P. Note on the deformation-induced change in the curvature of a material surface in plane deformations[J]. *Mechanics Research Communications*, 2018, **94**: 88-90.
- [22] DAI M, SCHIAVONE P. Deformation-induced change in the geometry of a general material surface and its relation to the Gurtin-Murdoch model[J]. *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the ASME*, 2020, **87**(6): 061005.
- [23] ZHANG A B, WANG B L. Explicit solutions of an elliptic hole or a crack problem in thermoelectric materials [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2016, **151**: 11-21.
- [24] WANG P, WANG B L, WANG K F, et al. Analysis of inclusion in thermoelectric materials: the thermal stress field and the effect of inclusion on thermoelectric properties[J]. *Composites (Part B): Engineering*, 2019, **166**: 130-138.
- [25] MOGILEVSKAYA S G, CROUCH S L, STOLARSKI H K. Multiple interacting circular nano-inhomogeneities with surface/interface effects[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2008, **56**(6): 2298-2327.
- [26] DAI M, WANG Y J, SCHIAVONE P. Integral-type stress boundary condition in the complete Gurtin-Murdoch surface model with accompanying complex variable representation[J]. *Journal of Elasticity*, 2019, **134**(2): 235-241.
- [27] PEI P Y, YANG H B, DAI M. Consistency of the boundary value problem of an elastic body involving surface tension in small deformations[J]. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2023, **28**(6): 1488-1499.
- [28] MENG Q L, KONG S, HUANG Z W, et al. Simultaneous enhancement in the power factor and thermoelectric performance of copper sulfide by In_2S_3 doping[J]. *Journal of Materials Chemistry A*, 2016, **4**(32): 12624-12629.
- [29] DENNLER G, CHMIELOWSKI R, JACOB S, et al. Are binary copper sulfides/selenides really new and promising thermoelectric materials? [J]. *Advanced Energy Materials*, 2014, **4**(9): 1301581.
- [30] DAI M, LI M, SCHIAVONE P. Plane deformations of an inhomogeneity-matrix system incorporating a compressible liquid inhomogeneity and complete Gurtin-Murdoch interface model[J]. *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the ASME*, 2018, **85**(12): 121010.