ⓒ 应用数学和力学编委会,ISSN 1000-0887　http://www.applmathmech.cn

随机广义拟变分不等式的迭代解法及应用*

王雁南，　曾嘉钦，　黄南京

（四川大学 数学学院，成都 610064）

（我刊编委黄南京来稿）

摘要：　为了获得 Hilbert 空间中一类随机广义拟变分不等式的迭代解法，证明了点到由具闭(凸)值的随机集值映射所刻画的变约束集上的投影算子的可测性.利用该可测性结果和可测选择定理，构造了求解随机广义拟变分不等式的随机迭代算法.在单调性及 Lipschitz 连续性条件下，获得了由算法生成的随机序列的收敛性.作为应用，给出了随机广义 Nash 博弈和随机 Walrasian 均衡问题的一些刻画性结果.

关　键　词：　随机拟变分不等式；　随机迭代算法；　收敛性；　随机 Nash 均衡；　随机 Walrasian 均衡

中图分类号：　O177.91；O221.5　　**文献标志码：**　A　　DOI：10.21656/1000-0887.440199

Iterative Methods for Random Generalized Quasi Variational Inequalities With Applications

WANG Yannan,　ZENG Jiaqin,　HUANG Nanjing

(*School of Mathematics*, *Sichuan University*, *Chengdu* 610064, *P.R.China*)

(Contributed by HUANG Nanjing, M. AMM Ediorial Board)

Abstract: To obtain the iterative methods for solving a class of random generalized quasi variational inequalities (RGQVIs) in the Hilbert spaces, the measurability of the projection operators on varying-constraint sets depicted by the mapping from points to random-value sets with closed (convex) values, was proved. Moreover, the random iterative algorithm was proposed for solving RGQVIs, and the convergence of the random sequences generated with the random iterative algorithm was obtained under some suitable conditions of monotony and Lipschitz continuity. Finally, 2 applications were given with depicting results of the random generalized Nash games and random Walrasian equilibrium problems, respectively.

Key words: random quasi variational inequality; random iterative algorithm; convergence; random Nash equilibrium; random Walrasian equilibrium

0　引　　言

变分和拟变分不等式问题是非线性分析和优化的重要研究内容之一，为解决产生于经济和金融、物理

* **收稿日期：**　2023-06-29；**修订日期：**　2023-07-21

基金项目：　国家自然科学基金项目(12171339)；国家重点研发项目(2020YFC0832404)

作者简介：　王雁南(1998—),男,硕士生(E-mail：1255819341@qq.com)；
曾嘉钦(1999—),男,硕士生(E-mail：185459413@qq.com)；
黄南京(1962—),男,教授,博士生导师(通讯作者. E-mail：nanjinghuang@hotmail.com；njhuang@scu.edu.cn).

引用格式：　王雁南，曾嘉钦，黄南京. 随机广义拟变分不等式的迭代解法及应用[J]. 应用数学和力学，2023，**44**(11)：1378-1388.

和力学、运筹和控制等领域的一些实际问题提供了强有力的工具[1-15].众所周知, 随机泛函分析是概率论与泛函分析的交叉学科[16], 而随机变分和拟变分不等式问题是随机泛函分析的重要组成部分, 可以用于刻画随机环境下的许多现实问题[17].

据笔者所知, 最早的随机拟变分不等式问题是由 Tan 在文献[18]中提出的.随后, 国内外有大量的学者对随机变分和拟变分不等式的理论、算法和应用进行了研究, 获得了丰硕的研究成果[8,19-23].注意到在已有的随机拟变分不等式问题研究中, 约束映射往往需要满足紧性条件假设[17-18], 从而在现实应用时条件略显苛刻; 或者是假设具有特殊的结构(通常为一单值映射加上一个固定的非空闭凸子集), 从而本质上可以转化为随机变分不等式问题[8,19-21].

为了获得随机拟变分不等式问题解的存在性以及构造逼近解的迭代算法, 通常需要在 Hilbert 空间框架下研究该类问题[8,19-21,23].设 $(\Omega,\mathscr{A})$ 为可测空间, $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 为 Hilbert 空间, $s:\Omega\times H\to H$ 为单值映射, $K,M:\Omega\times H\to 2^H$ 为集值映射, 使得对任意的 $(\omega,x)\in\Omega\times H$, $K(\omega,x)$ 是 H 的非空闭凸子集.考虑下述随机广义拟变分不等式: 找可测映射 $x,u:\Omega\to H$, 使得 $x(\omega)\in K(\omega,x(\omega))$, $u(\omega)\in M(\omega,x(\omega))$, 且

$$\langle s(\omega,x(\omega))+u(\omega),\ y-x(\omega)\rangle\geqslant 0,\qquad \forall y\in K(\omega,x(\omega)).\tag{1}$$

特别地, 若对任意的 $(\omega,x)\in\Omega\times H$, $K(\omega,x)$ 是 H 的非空闭凸锥, 则问题(1)等价于下述随机广义拟相补问题: 找可测映射 $x,u:\Omega\to H$, 使得 $x(\omega)\in K(\omega,x(\omega))$, $u(\omega)\in M(\omega,x(\omega))$, 且

$$s(\omega,x(\omega))+u(\omega)\in K^*(\omega,x(\omega)),\ \langle s(\omega,x(\omega))+u(\omega),\ x(\omega)\rangle=0,\tag{2}$$

其中

$$K^*(\omega,x(\omega))=\{y\in H\mid\langle y,z\rangle\geqslant 0,\forall z\in K(\omega,x(\omega))\},\qquad\forall\omega\in\Omega.$$

显然, 随机广义拟变分不等式问题(1)和随机广义拟相补问题(2)包含了许多已知的(随机)拟变分不等式和(随机)拟相补问题作为特例.

注意到问题(1)中, $K:\Omega\times H\to 2^H$ 通常是可测的集值映射, 当应用投影方法求解时, 需要用到 Hilbert 空间中点到闭(凸)子集 $K(\omega,x(\omega))$ 上投影算子的可测性.但是, 据笔者所知, 现在还没有这种可测性研究结果.本文通过引入集值映射相关技巧, 证明了 σ- 紧 Hilbert 空间中的点到闭(凸)子集 $K(\omega,x(\omega))$ 上投影算子的可测性, 继而结合可测选择定理, 构造出求解随机广义拟变分不等式问题(1)和随机广义拟相补问题(2)的随机迭代序列, 得到了随机迭代序列收敛的一些充分性条件, 为解决随机环境下的一些现实问题提供了有效的方法.

1　预备知识

本节先回顾一些定义和引理.

定义 1[24]　设 $(\Omega,\mathscr{A})$ 为一可测空间, H 为一 Hilbert 空间.(i) 单值映射 $f:\Omega\to H$ 称为(开、闭、紧)可测的, 如果对任意的 Borel(开、闭、紧)子集 $B\subset H$, 有 $f^{-1}(B)=\{x\in\Omega\mid f(x)\in B\}\in\mathscr{A}$; (ii) 集值映射 $F:\Omega\to 2^H$ 称为(开、闭、紧)可测的, 如果对任意的 Borel(开、闭、紧)子集 $B\subset H$, 有 $F^{-1}(B)=\{x\in\Omega\mid F(x)\cap B\neq\varnothing\}\in\mathscr{A}$.

定义 2[24]　拓扑空间 X 称为 σ- 紧的, 如果存在 X 中的紧集 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得 $X=\cup_{n=1}^{\infty}X_n$.

注 1　由定义 2 知, 紧空间一定是 σ- 紧的, 但反之不然.例如: 欧氏空间 R^n 是 σ- 紧的, 但 R^n 不是紧的.事实上, 任意有限维赋范空间都是 σ- 紧的, 即: 若 X 是一有限维赋范空间, 则 $X=\cup_{n=1}^{\infty}B_n$, 其中 $B_n=\{x\mid\|x\|\leqslant n\}$.

定义 3[8,25]　设 X,Y 为拓扑空间, $F:X\to 2^Y$ 为集值映射.(i) 若 $x_0\in X$, 对 $F(x_0)$ 的任一给定的邻域 $V\subset Y$, 存在 x_0 的邻域 U, 使得 $F(U)\subset V$, 则称 F 在 x_0 处上半连续; (ii) 若 $x_0\in X$, 对任意的与 $F(x_0)$ 相交的开集 $V\subset Y$, 存在 x_0 的邻域 U, 使得当 $x\in U$, 有 $F(x)\cap V\neq\varnothing$, 则称 F 在 x_0 处下半连续; (iii) 若 $x_0\in X$, 且 F 在 x_0 处既上半连续又下半连续, 则称 F 在 x_0 处连续.

定义 4[8,26]　设 M 为一完备度量空间, X,Y 为 M 中非空闭子集, 则

$$d_{\mathscr{H}}=\max\left\{\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}d(x,y),\ \sup_{y\in Y}\inf_{x\in X}d(x,y)\right\}$$

为集合 X 与 Y 的 Hausdorff 距离.

引理 1[24] 设 $(\Omega,\mathscr{A})$ 为完全可测空间(即存在一个定义在 $\mathscr{A}$ 上的完备的 σ-有限测度), X 为可分完备度量空间, $F:\Omega\to 2^X$ 为闭值集值映射.则下列陈述等价:(i) F 是可测的; (ii) F 是开可测的; (iii) F 是闭可测的; (iv) 对任意 $z\in X$, 由 $d(\omega)=d(z,F(\omega))$ 所定义的函数 $d:\Omega\to[0,+\infty)$ 是可测的; (V) $\mathrm{Gr}(F)\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}(X)$, 其中 $\mathrm{Gr}(F)$ 表示 F 的图像, $\mathscr{B}(X)$ 是 X 中的 Borel σ 代数.进一步地, 如果假设 X 还是 σ-紧的, 则(i)—(V)中的任意一个陈述均等价于: (vi) F 是紧可测的.

引理 2[26] 设 $(\Omega,\mathscr{A})$ 为可测空间, X 为可分度量空间, $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}:\Omega\to 2^X$ 为闭值集值映射列.若 $\{F_n\}$ 开可测, $n=1,2,\cdots$, 则 $\mathrm{Gr}(\cap_{n=1}^{\infty}F_n)\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}(X)$.

引理 3[24] 设 $(\Omega,\mathscr{A})$ 为完全可测空间, X 为可分完备度量空间, Y 为度量空间, $g:\Omega\times X\to Y$ 为单值映射, 满足: (i) 对任意 $x\in X, g(\cdot,x)$ 可测; (ii) 对任意 $\omega\in\Omega, g(\omega,\cdot)$ 连续.若 $F:\Omega\to 2^X$ 为具有闭值的可测映射, 则由 $G(\omega)=g(\omega,F(\omega))=\cup_{x\in F(\omega)}g(\omega,x)$ 所定义的集值映射 $G:\Omega\to 2^Y$ 是可测的.

引理 4[26] 设 $(\Omega,\mathscr{A})$ 为可测空间, X,Y 为可分度量空间, $F:\Omega\times X\to 2^Y$ 为闭值映射,满足:(i) 对任意 $x\in X$, 映射 $F(\cdot,x):\Omega\to 2^Y$ 是开可测的; (ii) 对任意的 $\omega\in\Omega$, 映射 $F(\omega,\cdot):X\to 2^Y$ 是连续的或者 Hausdorff 连续的.则 $F:\Omega\times X\to 2^Y$ 是开可测的.

引理 5 设 $(\Omega,\mathscr{A})$ 为完全可测空间, X 为可分度量空间, Y 为可分完备度量空间, $F:\Omega\times X\to 2^Y$ 为闭值映射,满足:(i) 对任意 $x\in X$, 映射 $F(\cdot,x):\Omega\to 2^Y$ 是可测的; (ii) 对任意的 $\omega\in\Omega$, 映射 $F(\omega,\cdot):X\to 2^Y$ 是连续的或者 Hausdorff 连续的.如果 $\xi:\Omega\to X$ 为可测映射, 则 $F(\cdot,\xi(\cdot)):\Omega\to 2^Y$ 是可测的.

证明 对任意的 Borel 子集 $B\subset Y$, 需要证明 $\{\omega\mid F(\omega,\xi(\omega))\cap B\neq\varnothing\}\in\mathscr{A}$.由假设条件和引理 4 知 $F:\Omega\times X\to 2^Y$ 是开可测的, 从而由引理 1 得知 $F:\Omega\times X\to 2^Y$ 是乘积可测的.这样, $\{(\omega,x)\mid F(\omega,x)\cap B\neq\varnothing\}\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}(X)$.对任意的 $\omega\in\Omega$, 定义 $\phi(\omega)=(\omega,\xi(\omega))$, 则 $\phi:\Omega\to\Omega\times X$.记 $C_B=\{(\omega,x)\mid F(\omega,x)\cap B\neq\varnothing\}$, 则

$$\phi^{-1}(C_B)=\{\omega\in\Omega\mid(\omega,\xi(\omega))\in C_B\}=\{\omega\in\Omega\mid F(\omega,\xi(\omega))\cap B\neq\varnothing\}.$$

这样, 我们只需证明 $\phi^{-1}(C_B)\in\mathscr{A}$.又因为 $C_B\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}$, 故只需证明 $\phi^{-1}(\mathscr{A}\times\mathscr{B})\subset\mathscr{A}$.根据测度论, 只需要证明对任意的 $M\in\mathscr{A}$ 和 $N\in\mathscr{B}$, 有 $\phi^{-1}(M\times N)\in\mathscr{A}$.又因为 $\xi:\Omega\to X$ 可测, 故 $\xi^{-1}(N)\in\mathscr{A}$, 从而

$$\phi^{-1}(M\times N)=\{\omega\in\Omega\mid(\omega,\xi(\omega))\in M\times N\}=M\cap\xi^{-1}(N)\in\mathscr{A}.$$

因此, $F(\cdot,\xi(\cdot)):\Omega\to 2^Y$ 是可测的. □

由 Hausdorff 度量的定义及集值可测映射的 Castaing 表示定理(文献[24]中定理 5.6), 容易证明下述引理成立.

引理 6 设 $(\Omega,\mathscr{A})$ 为可测空间, X 为可分完备度量空间, $F,G:\Omega\to 2^X$ 为两个可测闭值映射.如果 $u:\Omega\to H$ 是 F 的一个可测选择, 且 $\gamma:\Omega\to(1,+\infty)$ 是任一可测函数, 则存在 G 的一个可测选择 $v:\Omega\to H$, 使得对任意的 $\omega\in\Omega$, 有 $\|u(\omega)-v(\omega)\|\leqslant\gamma(\omega)d_{\mathscr{H}}(F(\omega),G(\omega))$.

我们还需要 Hilbert 空间中投影算子的下述刻画结果[8,10].

定义 5 设 H 为一 Hilbert 空间, $K\subset H$, 投影算子 $P_K:H\to 2^K$ 定义如下:

$$P_K(z)=\left\{x\in K\mid\|x-z\|=\inf_{y\in K}\|y-z\|\right\}.$$

引理 7 若 K 是 Hilbert 空间 H 中的闭凸集, 则 P_K 为单值映射.

引理 8 若 K 是 Hilbert 空间 H 中的闭凸集, 则下述结论成立:

(i) 对任意 $x,y\in H$, 有 $\|P_Kx-P_Ky\|\leqslant\|x-y\|$;

(ii) 对任意给定的 $z\in H, P_K(z)=y$ 当且仅当对任意的 $x\in K$, 有 $\langle y-z,x-y\rangle\geqslant 0$;

(iii) 对任意 $x,y\in H$, 有 $\|x-y-(P_K(x)-P_K(y))\|\leqslant\|x-y\|$.

2 随机迭代算法

为了获得逼近问题(1)解的随机迭代序列, 先刻画 Hilbert 空间中由具闭值的可测集值映射所刻画的子

集上投影算子的可测性.

定理 1　设 $(\Omega,\mathcal{A})$ 为完全可测空间, H 为 σ- 紧 Hilbert 空间, $K:\Omega\to 2^H$ 为一可测闭值映射.则对任意 $z_0\in H$, 由 $P_0(\omega)=P_{K(\omega)}(z_0)$ 所定义的映射 $P_0:\Omega\to 2^H$ 是可测的.

证明　对任意 $\omega\in\Omega$, 记 $d(\omega)=d(z_0,K(\omega))$, 则由 K 的可测性及引理 1 知 $d:\Omega\to[0,+\infty)$ 是可测函数.定义 $X:\Omega\to 2^H$ 如下:

$$X(\omega)=\{x\in H\mid\|x-z_0\|=d(\omega)\},\qquad\forall\omega\in\Omega,$$

则对任意的 $\omega\in\Omega$, 有 $P_0(\omega)=X(\omega)\cap K(\omega)$.由引理 2 及 K 的可测性, 若 X 可测, 则 P_0 可测.因 H 是 σ-紧的, 由引理 1, 只需证明 X 是紧可测的.

定义映射 $B:[0,+\infty)\to 2^H$ 为

$$B(r)=\{x\in H\mid\|x-z_0\|=r\},\qquad r\in[0,+\infty).$$

对任意给定的紧集 $C\subset H$, 记 $F=\{r\in[0,+\infty)\mid B(r)\cap C\neq\varnothing\}$.现证 F 是 $[0,+\infty)$ 中闭集, 即对任意的序列 $\{r_n\}\subset F$ 满足 $r_n\to r_0$ 有 $r_0\in F$.事实上, 由 F 的定义, 存在 $x_n\in C$ 使得 $\|x_n-z_0\|=r_n$.由于 C 是 H 中紧集, 存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$, 使得 $x_{n_k}\to x_0\in C$.又 $\|x_{n_k}-z_0\|=r_{n_k}$, 等式两边令 $n\to\infty$, 得 $\|x_0-z_0\|=r_0$, 即 $x_0\in B(r_0)\cap C$, 从而 $r_0\in F$, 故 F 是闭的.

现在证明 $d^{-1}(F)=X^{-1}(C)$.事实上, 由于 $\omega\in d^{-1}(F)\Leftrightarrow d(w)\in F\Leftrightarrow\{x\in H\mid\|x-z_0\|=d(\omega)\}\cap C\neq\varnothing\Leftrightarrow X(\omega)\cap C\neq\varnothing\Leftrightarrow\omega\in X^{-1}(C)$, 故 $d^{-1}(F)=X^{-1}(C)$.又因为 d 是可测的, F 是闭集, 我们知道 $d^{-1}(F)\in\mathcal{A}$, 从而 $X^{-1}(C)\in\mathcal{A}$, 即 X 是紧可测的.因此, 映射 $P_0:\Omega\to 2^H$ 是可测的.

定理 2　设 $(\Omega,\mathcal{A})$ 为完全可测空间, H 为 σ- 紧 Hilbert 空间, $K:\Omega\times H\to 2^H$ 为闭凸值映射, 使得对任意的 $x\in H, K(\cdot,x):\Omega\to 2^H$ 是可测的, 且对任意的 $\omega\in\Omega$ 及 $z_0\in H, P_{K(\omega,\cdot)}z_0:H\to H$ 是连续的.则对任意给定的 $z_0\in H$ 及可测映射 $\xi:\Omega\to H$, 由 $P_1(\omega)=P_{K(\omega,\xi(\omega))}(z_0)$ 所定义的映射 $P_1:\Omega\to H$ 是可测的.

证明　对任意 $\omega\in\Omega$ 及 $x\in H$, 记 $\tilde{P}(\omega,x)=P_{K(\omega,x)}z_0$.则由定理 1, $\tilde{P}(\cdot,x):\Omega\to H$ 是可测的.根据假设知 $\tilde{P}(\omega,\cdot):H\to H$ 是连续的.这样, 由 ξ 的可测性及引理 3 可得, $\tilde{P}(\cdot,\xi(\cdot)):\Omega\to H$ 是可测的, 从而映射 $P_1:\Omega\to H$ 是可测的.　□

注 2　(i) 设 H 为 Hilbert 空间, $K:\Omega\times H\to 2^H$ 为闭凸值映射, 使得对任意 $\omega\in\Omega, K(\omega,\cdot)$ 是 Hausdorff 连续的,则对任意的 $\omega\in\Omega$ 及任意的 $z_0\in H, P_{K(\omega,\cdot)}z_0:H\to H$ 是连续的[27]; (ii) 设 H 为欧氏空间, $K:\Omega\times H\to 2^H$ 为闭凸值映射, 使得对任意的 $\omega\in\Omega, K(\omega,\cdot)$ 是连续的,则对任意的 $\omega\in\Omega$ 及任意的 $z_0\in H, P_{K(\omega,\cdot)}z_0:H\to H$ 是连续的[2].

定理 3　设 $(\Omega,\mathcal{A})$ 为一完全可测空间, H 为 σ- 紧 Hilbert 空间, $K:\Omega\times H\to 2^H$ 为一闭凸值映射, 使得对任意的 $x\in H, K(\cdot,x)$ 是可测的, 且对任意的 $\omega\in\Omega, K(\omega,\cdot)$ 是连续的或者 Hausdorff 连续的.则对任意给定的 $z_0\in H$ 及可测映射 $\xi:\Omega\to H$, 由 $P_1(\omega)=P_{K(\omega,\xi(\omega))}(z_0)$ 所定义的映射 $P_1:\Omega\to H$ 是可测的.

证明　对任意的 $\omega\in\Omega$, 记 $\tilde{K}(\omega)=K(\omega,\xi(\omega))$.则由引理 5, $\tilde{K}:\Omega\to 2^H$ 是可测的.又根据定理 1, $P_1(\cdot)=P_{K(\cdot,\xi(\cdot))}(z_0)$ 是可测的.　□

定理 4　假设定理 2 或定理 3 的条件成立.若 $z:\Omega\times H\to H$ 满足对任意的 $\omega\in\Omega, z(\omega,\cdot)$ 是连续的, 且对任意的 $x\in H, z(\cdot,x)$ 是可测的, 则对任意的可测映射 $\xi:\Omega\to H$,由 $P(\omega)=P_{K(\omega,\xi(\omega))}(z(\omega,\xi(\omega)))$ 所定义的映射 $P:\Omega\to H$ 是可测的.

证明　对任意 $\omega\in\Omega$, 记 $\tilde{z}(\omega)=z(\omega,\xi(\omega))$.则由引理 3, $\tilde{z}:\Omega\to H$ 是可测的.对任意的 $\omega\in\Omega$ 及 $z\in H$, 记 $\tilde{P}_1(\omega,z)=P_{K(\omega,\xi(\omega))}(z)$.根据定理 2 或定理 3, 对任意的 $z_0\in H, \tilde{P}_1(\cdot,z_0)$ 是可测的.又由引理 8, 对任意的 $\omega\in\Omega, \tilde{P}_1(\omega,\cdot)$ 是连续的.这样, 结合 $\tilde{z}(w)$ 的可测性及引理 3 知, 映射 $P:\Omega\to H$ 是可测的.　□

我们还需要下述等价性刻画结果, 其证明可由投影算子的性质直接得到.

引理 9　设 $(\Omega,\mathcal{A})$ 为可测空间, H 为 Hilbert 空间, $K:\Omega\times H\to 2^H$ 为闭凸值映射, $M:\Omega\times H\to 2^H$ 为闭值映射, $s:\Omega\times H\to H$ 为单值映射.则可测映射 $x^*, u^*:\Omega\to H$ 满足随机广义拟变分不等式(1)当且仅当存在可测映射 $x^*,u^*:\Omega\to H$ 使得对任意的 $\omega\in\Omega, x^*(\omega)\in K(\omega,x^*(\omega)), u^*(\omega)\in M(\omega,x^*(\omega))$, 且

$$P_{K(\omega,x^*(\omega))}[x^*(\omega)-\rho(\omega)(s(\omega,x^*(\omega))+u^*(\omega))]=x^*(\omega),$$

其中 $\rho:\Omega\to(0,+\infty)$ 为任一可测函数.

现在，由引理 9 和定理 4，我们构造求解随机广义拟变分不等式(1)的随机迭代算法如下.

算法 1 设 $(\Omega,\mathscr{A})$ 为一完全可测空间，H 为 σ- 紧 Hilbert 空间，$K:\Omega\times H\to 2^H$ 为闭凸值映射，$M:\Omega\times H\to 2^H$ 为闭值映射，$s:\Omega\times H\to H$ 为单值映射，满足下述条件：(i) 对任意的 $x\in H$，$K(\cdot,x)$，$M(\cdot,x)$ 和 $s(\cdot,x)$ 是可测的；(ii) 对任意的 $\omega\in\Omega$，$M(\omega,\cdot)$ 是 Hausdorff 连续的，$s(\omega,\cdot)$ 是连续的，且对任意给定的 $z_0\in H$，$P_{K(\omega,\cdot)}z_0$ 是连续的.任意选取可测映射 $x_0:\Omega\to H$，由假设条件及引理 5 知 $M(\cdot,x_0(\cdot))$ 是可测的，从而 $M(\cdot,x_0(\cdot))$ 存在可测选择 $u_0:\Omega\to H$ 使得对任意的 $\omega\in\Omega$，$u_0(\omega)\in M(\omega,x_0(\omega))$.令

$$x_1(\omega)=P_{K(\omega,x_0(\omega))}[x_0(\omega)-\rho(\omega)(s(\omega,x_0(\omega))+u_0(\omega))],\qquad \forall\omega\in\Omega,$$

其中，$\rho:\Omega\to(0,+\infty)$ 为一个任意给定的可测函数.这样，由定理 4 及文献[16]中的基本性质Ⅴ(iii)易知 $x_1:\Omega\to H$ 是可测的，从而 $M(\cdot,x_1(\cdot))$ 是可测的.根据引理 6，存在 $M(\cdot,x_1(\cdot))$ 的可测选择 $u_1(\omega)\in M(\omega,x_1(\omega))$，使得

$$\|u_1(\omega)-u_0(\omega)\|\leqslant\left(1+\frac{1}{1}\right)d_{\mathscr{H}}(M(\omega,x_1(\omega)),M(\omega,x_0(\omega))),\qquad\forall\omega\in\Omega.$$

令

$$x_2(\omega)=P_{K(\omega,x_1(\omega))}[x_1(\omega)-\rho(\omega)(s(\omega,x_1(\omega))+u_1(\omega))],\qquad\forall\omega\in\Omega.$$

继续上述过程，可得可测映射序列 $\{x_n(\omega)\}$ 和 $\{u_n(\omega)\}$ 满足

$$\begin{cases}u_n(\omega)\in M(\omega,x_n(\omega)),\qquad\forall\omega\in\Omega,\\ \|u_{n+1}(\omega)-u_n(\omega)\|\leqslant\\ \qquad\left(1+\dfrac{1}{1+n}\right)d_{\mathscr{H}}(M(\omega,x_{n+1}(\omega)),M(\omega,x_n(\omega))),\qquad\forall\omega\in\Omega,\\ x_{n+1}(\omega)=P_{K(\omega,x_n(\omega))}[x_n(\omega)-\rho(\omega)(s(\omega,x_n(\omega))+u_n(\omega))],\qquad\forall\omega\in\Omega,\\ \qquad\qquad n=0,1,2,\cdots.\end{cases}\tag{3}$$

注 3 随机迭代算法 1 包含了一些已知的随机迭代算法作为特例.

3 随机迭代算法的收敛性

本节在适当的假设条件下证明随机迭代算法 1 的收敛性.

定理 5 设 $(\Omega,\mathscr{A})$ 为完全可测空间，H 为 σ- 紧 Hilbert 空间，$K,M:\Omega\times H\to 2^H$ 为两个集值映射，$s:\Omega\times H\to H$ 为单值映射，满足下述条件：

(i) 对任意的 $\omega\in\Omega$ 及 $x\in H$，$K(\omega,x)$ 是 H 中的闭凸集；对任意的 $x\in H$，$K(\cdot,x)$ 是可测的；存在函数 $l:\Omega\to(0,1)$，使得

$$\|P_{K(\omega,x)}(z)-P_{K(\omega,y)}(z)\|\leqslant l(\omega)\|x-y\|,\qquad\forall\omega\in\Omega,\ \forall x,y,z\in H.\tag{4}$$

(ii) 存在函数 $\eta:\Omega\to(0,+\infty)$，使得

$$d_{\mathscr{H}}(M(\omega,x),M(\omega,y))\leqslant\eta(\omega)\|x-y\|,\qquad\forall\omega\in\Omega,\ \forall x,y\in H.$$

(iii) 存在函数 $\alpha,\beta:\Omega\to(0,+\infty)$，使得

$$\|s(\omega,x)-s(\omega,y)\|\leqslant\alpha(\omega)\|x-y\|,\qquad\forall\omega\in\Omega,\ \forall x,y\in H,$$

且

$$\langle s(\omega,x)-s(\omega,y),x-y\rangle\geqslant\beta(\omega)\|x-y\|^2,\qquad\forall\omega\in\Omega,\ \forall x,y\in H.$$

如果

$$l(\omega)+\rho(\omega)\eta(\omega)+\sqrt{1+\rho^2(\omega)\alpha^2(\omega)-2\rho(\omega)\beta(\omega)}<1,\qquad\forall\omega\in\Omega,\tag{5}$$

则存在可测映射 $x^*,u^*:\Omega\to H$ 满足随机广义拟变分不等式(1)，且

$$\lim_{n\to\infty}x_n(\omega)=x^*(\omega),\ \lim_{n\to\infty}u_n(\omega)=u^*(\omega),\qquad\forall\omega\in\Omega,$$

其中，$\{x_n(\omega)\}$ 和 $\{u_n(\omega)\}$ 是由随机迭代算法 1 生成的可测映射序列.

证明 首先证明由算法 1 生成的随机序列 $\{x_n(\omega)\}$ 是 Cauchy 序列.为简单起见,记 $z(\omega,x)=x-\rho(\omega)(s(\omega,x)+u(\omega))$.则由引理 8 及条件(4)可得

$$
\begin{aligned}
&\|x_{n+1}(\omega)-x_n(\omega)\| = \|P_{K(\omega,x_n(\omega))}[z(\omega,x_n(\omega)]-P_{K(\omega,x_{n-1}(\omega))}[z(\omega,x_{n-1}(\omega))]\| \leqslant \\
&\quad \|P_{K(\omega,x_n(\omega))}[z(\omega,x_n(\omega))]-P_{K(\omega,x_{n-1}(\omega))}[z(\omega,x_n(\omega))]\| + \\
&\quad \|P_{K(\omega,x_{n-1}(\omega))}[z(\omega,x_n(\omega))]-P_{K(\omega,x_{n-1}(\omega))}[z(\omega,x_{n-1}(\omega))]\| \leqslant \\
&\quad l(\omega)\|x_n(\omega)-x_{n-1}(\omega)\| + \|z(\omega,x_n(\omega))-z(\omega,x_{n-1}(\omega))\| \leqslant \\
&\quad l(\omega)\|x_n(\omega)-x_{n-1}(\omega)\| + \rho(\omega)\|u_n(\omega)-u_{n-1}(\omega)\| + \\
&\quad \|x_n(\omega)-x_{n-1}(\omega)-\rho(\omega)(s(\omega,x_n(\omega))-s(\omega,x_{n-1}(\omega)))\| \leqslant \\
&\quad l(\omega)\|x_n(\omega)-x_{n-1}(\omega)\| + \left(1+\frac{1}{n}\right)\rho(\omega)\eta(\omega)\|x_n(\omega)-x_{n-1}(\omega)\| + \\
&\quad \|x_n(\omega)-x_{n-1}(\omega)-\rho(\omega)(s(\omega,x_n(\omega))-s(\omega,x_{n-1}(\omega)))\|.
\end{aligned}
$$

又由假设条件(iii)可得

$$
\begin{aligned}
&\|x_n(\omega)-x_{n-1}(\omega)-\rho(\omega)(s(\omega,x_n(\omega))-s(\omega,x_{n-1}(\omega)))\|^2 = \\
&\quad \|x_n(\omega)-x_{n-1}(\omega)\|^2 - 2\rho(\omega)\langle s(\omega,x_n(\omega))-s(\omega,x_{n-1}(\omega)),x_n(\omega)-x_{n-1}(\omega)\rangle + \\
&\quad \rho^2(\omega)\|s(\omega,x_n(\omega))-s(\omega,x_{n-1}(\omega))\|^2 \leqslant \\
&\quad (1+\rho^2(\omega)\alpha^2(\omega)-2\rho(\omega)\beta(\omega))\|x_n(\omega)-x_{n-1}(\omega)\|^2.
\end{aligned}
$$

综合上述两个不等式, 对任意 $\omega\in\Omega$, 有

$$
\begin{aligned}
&\|x_{n+1}(\omega)-x_n(\omega)\| \leqslant \\
&\quad \left[l(\omega)+\left(1+\frac{1}{n}\right)\rho(\omega)\eta(\omega)+\sqrt{1+\rho^2(\omega)\alpha^2(\omega)-2\rho(\omega)\beta(\omega)}\right]\|x_n(\omega)-x_{n-1}(\omega)\|.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

根据式(5), 当 n 充分大时, 有

$$
l(\omega)+\left(1+\frac{1}{n}\right)\rho(\omega)\eta(\omega)+\sqrt{1+\rho^2(\omega)\alpha^2(\omega)-2\rho(\omega)\beta(\omega)} < 1.
$$

故由不等式(6), 对任意 $\omega\in\Omega$, 易知 $\{x_n(\omega)\}$ 是 H 中的 Cauchy 序列, 从而存在唯一的 $x^*(\omega)\in H$ 使得 $x^*(\omega)=\lim_{n\to\infty}x_n(\omega)$.又由于 $\{x_n(\cdot)\}$ 可测, 根据文献[16]中的基本性质Ⅴ(iii)易知 $x^*:\Omega\to H$ 是可测的.

因为 $\{x_n(\omega)\}$ 是 H 中的 Cauchy 序列, 由式(3)及假设条件(ii)易知, 对任意 $\omega\in\Omega$, $\{u_n(\omega)\}$ 也是 H 中的 Cauchy 序列.这样, 存在可测映射 $u^*:\Omega\to H$, 使得 $u^*(\omega)=\lim_{n\to\infty}u_n(\omega)$.

下面证明, 对任意 $\omega\in\Omega$, 有 $u^*(\omega)\in M(\omega,x^*(\omega))$.事实上,

$$
\begin{aligned}
&d(u^*(\omega),M(\omega,x^*))\leqslant d(u^*(\omega),u_n(\omega))+d(u_n(\omega),M(\omega,x^*(\omega)))\leqslant \\
&\quad d(u^*(\omega),u_n(\omega))+d_{\mathscr{H}}(M(\omega,x_n(\omega)),M(\omega,x^*(\omega)))\to 0.
\end{aligned}
$$

注意到 M 是闭值映射, 可得 $u^*(\omega)\in M(\omega,x^*(\omega))$.

最后, 由假设条件易知 $\lim_{n\to\infty}z(\omega,x_n(\omega))=z(\omega,x^*(\omega))$, 从而

$$
\begin{aligned}
&x^*(\omega)=\lim_{n\to\infty}x_n(\omega)=\lim_{n\to\infty}P_{K(\omega,x_n(\omega))}[z(\omega,x_n(\omega))]= \\
&\quad P_{K(\omega,x^*(\omega))}[z(\omega,x^*(\omega))], \qquad \forall\omega\in\Omega.
\end{aligned}
$$

故 $x^*(\omega)\in K(\omega,x^*(\omega))$.由引理 9, 可测映射 $x^*,u^*:\Omega\to H$ 满足随机广义拟变分不等式(1). □

注 4 (i) 假设条件(4)可以认为是文献[28]中相应连续性假设($\alpha=1$)的随机化版本;(ii) 在一些实际问题中, K 具有一定的特殊结构,比如

$$
K(\omega,x)=m(\omega,x)+K_0, \qquad \forall\omega\in\Omega,\ \forall x\in H,
$$

其中, K_0 是 H 中非空闭凸集, $m:\Omega\times H\to H$ 使得对任意 $x\in H$, $m(\cdot,x)$ 可测, 且存在函数 $l:\Omega\to(0,1)$, 使得

$$
\|m(\omega,x)-m(\omega,y)\|\leqslant l(\omega)\|x-y\|, \qquad \forall x,y\in H,\ \forall\omega\in\Omega.
$$

则由引理 8, 容易验证假设条件(4)成立.这时, 随机广义拟变分不等式(1)等价于一类随机广义变分不等式问题, 从而 H 只需要是可分的 Hilbert 空间.

由定理 5，容易获得下述结果.

定理 6 设 $(\Omega,\mathscr{A})$ 为完全可测空间，H 为 σ- 紧 Hilbert 空间，$K,M:\Omega\times H\to 2^H$ 为两个集值映射，$s:\Omega\times H\to H$ 为单值映射，满足定理 5 的所有条件，其中 K 具有闭凸锥值.则存在可测映射 $x^*,u^*:\Omega\to H$ 满足随机广义拟相补问题(2)，且

$$\lim_{n\to\infty} x_n(\omega)=x^*(\omega),\ \lim_{n\to\infty} u_n(\omega)=u^*(\omega),\qquad \forall\omega\in\Omega,$$

其中，$\{x_n(\omega)\}$ 和 $\{u_n(\omega)\}$ 是由随机迭代算法 1 生成的可测映射序列.

注 5 (i) 定理 5 和 6 包含了一些已知随机(拟)变分不等式和随机(拟)拟相补问题解的存在性和算法的收敛性结果作为特例；(ii) 由文献[29]知，具有闭值的 Hausdorff 连续集值映射一定是下半连续的(具紧值的集值映射连续当且仅当它是 Hausdorff 连续的)，且单调的下半连续集值映射一定是单值映射[30].注意到定理 5 和 6 的假设条件中，集值映射 M 只假设是 Hausdorff 连续的，故定理 5 和 6 是已有(随机)拟变分不等式和(随机)拟相补问题相关研究工作的改进和推广.

4 应 用

本节给出对随机广义 Nash 博弈及随机 Walrasian 均衡的应用.

4.1 随机广义 Nash 博弈

考虑随机环境下的 n 人非合作博弈问题.设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为完备概率空间，H 为可分 Hilbert 空间，参与者集合为 $N=\{1,2,\cdots,n\}$.对任意 $i\in N$，设 X_i 是 H 的非空子集.记 $X=\prod_{i\in N}X_i$ 和 $X_{-i}=\prod_{j\in N\setminus\{i\}}X_j$.假设第 i 个参与者的随机策略 $x_i:\Omega\to X_i$ 为单值映射，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n):\Omega\to X$ 为 n 人随机策略组合，$x_{-i}=(x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n):\Omega\to X_{-i}$ 为除去第 i 个参与者外其他参与者的随机策略组合，$K_i:\Omega\times X_{-i}\to 2^{X_i}$ 为非空闭凸值映射，其表示当除去参与者 i 以外的其他参与者给出随机策略值组合后，第 i 个参与者的随机策略满足 $x_i(\omega)\in K_i(\omega,x_{-i}(\omega))$ 几乎必然成立(a.s.).假设 $f_i:\Omega\times X\to R$ 为第 i 个参与者的随机收益函数，其期望收益满足条件 $E[f_i(\omega,x_i,x_{-i})]<+\infty$.

若存在可测映射 $x^*=(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*):\Omega\to X$，使得对任意 $i\in N$ 及满足 $y(\omega)\in K_i(\omega,x_{-i}^*(\omega))$ a.s.的任意可测映射 $y:\Omega\to X_i$，有

$$\begin{cases} x_i^*(\omega)\in K_i(\omega,x_{-i}^*(\omega)), & \text{a.s.},\\ E[f_i(\omega,x^*(\omega))]\geqslant E[f_i(\omega,x_{-i}^*(\omega),y(\omega))], \end{cases}$$

则称其为随机环境下的 n 人非合作博弈问题的随机广义 Nash 均衡点.

若存在可测映射 $x^*=(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*):\Omega\to X$，使得对任意 $i\in N$ 及满足 $y(\omega)\in K_i(\omega,x_{-i}^*(\omega))$ a.s.的任意可测映射 $y:\Omega\to X_i$，有

$$\begin{cases} x_i^*(\omega)\in K_i(\omega,x_{-i}^*(\omega)), & \text{a.s.},\\ f_i(\omega,x^*(\omega))\geqslant f_i(\omega,x_{-i}^*(\omega),y(\omega)), & \text{a.s.}, \end{cases}$$

则称其为随机环境下的 n 人非合作博弈问题的强随机广义 Nash 均衡点.

在给出等价性结果之前，先证明下述引理.

引理 10 设 $(\Omega,\mathscr{A})$ 和 $(E,\mathscr{E})$ 为可测空间，$y,z:\Omega\to E$ 为可测映射.对任意给定的 $B\in\mathscr{A}$，定义

$$y_B=\begin{cases} y(\omega), & \omega\in B,\\ z(\omega), & \omega\in\Omega\setminus B, \end{cases}$$

则 $y_B:\Omega\to E$ 是可测的.

证明 对任意 $C\subset\mathscr{E}$，有

$$\begin{aligned} y_B^{-1}(C)={}&\{\omega\mid y_B(\omega)\in C\}=\\ &\{\omega\in B\mid y_B(\omega)\in C\}\cup\{\omega\in\Omega\setminus B\mid y_B(\omega)\in C\}=\\ &\{\omega\in B\mid y(\omega)\in C\}\cup\{\omega\in\Omega\setminus B\mid z(\omega)\in C\}=\\ &(B\cap y^{-1}(C))\cup((\Omega\setminus B)\cap z^{-1}(C))\in\mathscr{A}. \end{aligned}$$

这样，$y_B:\Omega\to E$ 是可测的. □

定理 7　对于随机环境下的 n 人非合作博弈问题,强随机广义 Nash 均衡点存在的充分必要条件是随机广义 Nash 均衡点存在.

证明　必要性　设 $x^*=(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)$ 为强随机广义 Nash 均衡点.则对任意的 $i\in N$ 及满足 $y(\omega)\in K_i(\omega,x_{-i}^*(\omega))$ a.s.的任意可测映射 $y:\Omega\to X_i$,有

$$f_i(\omega,x_i^*(\omega),x_{-i}^*(\omega))\geqslant f_i(\omega,y(\omega),x_{-i}^*(\omega)),\quad \text{a.s.}.$$

因此,

$$\begin{aligned}E[f_i(\omega,x_i^*(\omega),x_{-i}^*(\omega))]&=\int_\Omega f_i(\omega,x_i^*(\omega),x_{-i}^*(\omega))\mathrm{d}P\geqslant\\ &\int_\Omega f_i(\omega,y(\omega),x_{-i}^*(\omega))\mathrm{d}P=\\ &E[f_i(\omega,y(\omega),x_{-i}^*(\omega))].\end{aligned}$$

即 x^* 是随机广义 Nash 均衡点.

充分性　设 $x^*=(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)$ 为随机广义 Nash 均衡点,即对任意 $i\in N$ 及满足 $y(\omega)\in K_i(\omega,x_{-i}^*(\omega))$ a.s.的任意可测映射 $y:\Omega\to X_i$,有

$$E[f_i(\omega,x_i^*(\omega),x_{-i}^*(\omega))]\geqslant E[f_i(\omega,y(\omega),x_{-i}^*(\omega)].$$

下面用反证法证明 x^* 是强随机广义 Nash 均衡点.假设存在 $i\in N$,存在 $B\subset\Omega$ 满足 $P(B)>0$,且存在可测映射 $z_i:\Omega\to X_i$,满足 $z_i(\omega)\in K_i(\omega,x_{-i}^*(\omega))$ a.s.,使得

$$f_i(\omega,x_i^*(\omega),x_{-i}^*(\omega))<f_i(\omega,z_i(\omega),x_{-i}^*(\omega)),\qquad \forall\,\omega\in B.$$

定义 $\bar{x}:\Omega\to X$ 如下:

$$\bar{x}(\omega)=\begin{cases}(x_{-i}^*(\omega),z_i(\omega)), & \omega\in B,\\ x^*(\omega), & \omega\in\Omega\backslash B.\end{cases}$$

则由引理 7,$\bar{x}:\Omega\to X$ 可测,且易知 $\bar{x}_i(\omega)\in K_i(\omega,x_{-i}^*(\omega))$ a.s..因此,

$$\begin{aligned}E[f_i(\omega,x_i^*(\omega),x_{-i}^*(\omega))]&=\int_\Omega f_i(\omega,x_i^*(\omega),x_{-i}^*(\omega))\mathrm{d}P=\\ &\int_B f_i(\omega,x_i^*(\omega),x_{-i}^*(\omega))\mathrm{d}P+\int_{\Omega\backslash B}f_i(\omega,x_i^*(\omega),x_{-i}^*(\omega))\mathrm{d}P<\\ &\int_B f_i(\omega,z_i(\omega),x_{-i}^*(\omega))\mathrm{d}P+\int_{\Omega\backslash B}f_i(\omega,x_i^*(\omega),x_{-i}^*(\omega))\mathrm{d}P=\\ &E[f_i(\omega,\bar{x}(\omega))],\end{aligned}$$

矛盾.因此,x^* 是强随机广义 Nash 均衡点.　□

类似于文献[8]中命题 1.2.1 的证明,容易证得下述结果.

定理 8　对任意 $i\in N$,假设随机收益函数 $f_i:\Omega\times X\to R$ 在 X_i 上是一个 Gâteaux 可微的凹泛函,对任意给定的 $(\omega,x_{-i})\in\Omega\times X_{-i}$,其微分 $D_if_i(\omega,x_{-i},\cdot):X_i\to H$ 定义为

$$\langle D_if_i(\omega,x_{-i},x_i),w_i\rangle=\lim_{t\to0^+}\frac{f_i(\omega,x_{-i},x_i+tw_i)-f_i(\omega,x_{-i},x_i)}{t},\qquad \forall\,x_i,w_i\in X_i.$$

则强随机广义 Nash 均衡点存在的充分条件为存在可测映射 $x^*=(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*):\Omega\to X$,使得对任意 $i\in N$,

$$\begin{cases}x_i^*(\omega)\in K_i(\omega,x_{-i}^*(\omega)),\\ \langle -D_if_i(\omega,x_{-i}^*(\omega),x_i^*(\omega)),y_i-x_i^*(\omega)\rangle\geqslant0,\qquad \forall\,y_i\in K_i(\omega,x_{-1}{}^*(\omega)).\end{cases}$$

注 6　根据定理 5、7、8,容易获得随机广义 Nash 均衡点及强随机广义 Nash 均衡点存在的一些充分性条件.

4.2　随机 Walrasian 均衡问题

基于文献[6]的工作,考虑随机因素干扰下具有完全竞争结构市场中的 Walrasian 均衡问题.设 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 为完备概率空间,市场中有 n 种商品,其价格 $p:\Omega\to R^n$ 为随机变量.设 $E:\Omega\times R^n\to2^{R^n}$ 为随机过度需求映射,它刻画了市场的过度需求,受商品价格及随机因素的影响.

对于随机变量 $p^*(\omega) \geqslant 0$(即 $p_i^*(\omega) \geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,n$) a.s., 若存在随机变量 $q^*(\omega) \in E(\omega, p^*(\omega))$ a.s.且 $q^*(\omega) \leqslant 0$ a.s., 使得

$$\langle p^*(\omega), q^*(\omega)\rangle = 0, \quad \text{a.s.},$$

则称价格 $p^*(\omega)$ 为随机 Walrasian 均衡价格.

定理 9 价格 $p^*(\omega)$ 是随机 Walrasian 均衡价格当且仅当对随机变量 $p^*(\omega) \geqslant 0$ a.s., 存在随机变量 $q^*(\omega) \in E(\omega, p^*(\omega))$ a.s., 使得对任意的 $p(\omega) \geqslant 0$ a.s., 有

$$\langle -q^*(\omega), p(\omega) - p^*(\omega)\rangle \geqslant 0, \quad \text{a.s.}. \tag{7}$$

证明 必要性 若 $p^*(\omega)$ 是随机 Walrasian 均衡价格, 则存在 $B \subset \Omega$ 满足 $P(B)=1$, 且存在 $q^*: \Omega \to R^n$, 使得

$$q^*(\omega) \in E(\omega, p^*(\omega)),\ q^*(\omega) \leqslant 0,\ p^*(\omega) \geqslant 0,\ \langle p^*(\omega), q^*(\omega)\rangle = 0, \qquad \forall \omega \in B. \tag{8}$$

对任意的 $p(\omega) \geqslant 0$ a.s.,存在 $C \subset \Omega$ 满足 $P(C)=1$, 使得对任意 $\omega \in C$, 有 $p(\omega) \geqslant 0$.下面证明式(7)成立.事实上, 对任意 $\omega \in B \cap C$, 由式(8)知

$$\langle -q^*(\omega), p(\omega) - p^*(\omega)\rangle = \langle -q^*(\omega), p(\omega)\rangle \geqslant 0.$$

又因为 $P(B \cap C) = 1$, 故式(7)成立.

充分性 由假设, 存在 $D \subset \Omega$ 满足 $P(D)=1$, 使得对任意的 $p(\omega) \geqslant 0$ a.s., 有

$$p^*(\omega) \geqslant 0,\ q^*(\omega) \in E(\omega, p^*(\omega)),\ \langle -q^*(\omega), p(\omega) - p^*(\omega)\rangle \geqslant 0, \qquad \forall \omega \in D. \tag{9}$$

现证对任意的 $\omega \in D$, 有 $q^*(\omega) \leqslant 0$.假设不真, 则存在 $\omega_0 \in D$, 使得 $q^*(\omega_0) \leqslant 0$ 不成立, 即存在 $i \in \{1, 2,\cdots,n\}$, 使得 $q_i^*(\omega_0) > 0$.对任意的 $\omega \in \Omega$ 及 $j \in \{1,2,\cdots,n\}$, 取

$$p_j(\omega) = \begin{cases} p_i^*(\omega) + 1, & j = i, \\ p_j^*(\omega), & j \neq i. \end{cases}$$

则 $p(\omega) \geqslant p^*(\omega) \geqslant 0$ a.s., 且

$$\langle q^*(\omega_0), p(\omega_0) - p^*(\omega_0)\rangle = q_i^*(\omega_0) > 0,$$

与式(9)矛盾.故 $q^*(\omega) \leqslant 0$ a.s..又因为 $p^*(\omega) \geqslant 0$ a.s., 所以 $\langle p^*(\omega), q^*(\omega)\rangle \leqslant 0$ a.s..另外, 在式(9)中取 $p(\omega) = 0$, 可得 $\langle p^*(\omega), q^*(\omega)\rangle \geqslant 0$ a.s., 从而 $\langle p^*(\omega), q^*(\omega)\rangle = 0$ a.s.. □

由于各种商品的生产和需求存在相互影响, 其价格也会相互影响.考虑刻画商品价格的随机变量 $p: \Omega \to R^n$, 记

$$p_{-i}(\omega) = (p_1(\omega), p_2(\omega), \cdots, p_{i-1}(\omega), p_{i+1}(\omega), \cdots, p_n(\omega)), \qquad \omega \in \Omega.$$

对任意 $i \in \{1,2,\cdots,n\}$, 假设 $K_i: \Omega \times R^{n-1} \to 2^R$ 为商品 i 的价格约束集, 其表示给定其余 $n-1$ 种商品的价格后, 商品 i 的价格被限制在 $K_i(\omega, p_{-i})$ 中, 即要求 $p_i(\omega) \in K_i(\omega, p_{-i}(\omega))$ a.s..

通常情况下, 随机过度需求映射有如下表示:

$$E(\omega, p) = D(\omega, p) - S(\omega, p), \qquad \forall (\omega, p) \in \Omega \times R^n, \tag{10}$$

其中 $D(\omega, p)$ 和 $S(\omega, p)$ 分别是随机需求映射和随机供给映射.一般假设随机需求映射是单值的, 并记 $G = -D$, 则由式(10)及定理 9, $p^*(\omega)$ 是随机 Walrasian 均衡价格等价于下述问题:寻找随机变量 $p^*(\omega) \in \bar{K}(\omega, p^*(\omega))$ a.s.及 $s^*(\omega) \in S(\omega, p^*(\omega))$ a.s., 使得

$$\langle G(\omega, p^*(\omega)) + s^*(\omega), p - p^*(\omega)\rangle \geqslant 0, \qquad \forall p \in \bar{K}(\omega, p^*(\omega)), \quad \text{a.s.}, \tag{11}$$

其中 $\bar{K}(\omega, p(\omega)) = \prod_{i=1}^{n} K_i(\omega, p_{-i}(\omega))$.

注 7 由于 R^n 是 σ- 紧的, 根据式(11)及定理 5, 在一定条件下, 我们可以获得随机 Walrasian 均衡价格的存在性和收敛性结果.

5 结 论

通过引入集值映射分解技巧, 证明了 σ- 紧的 Hilbert 空间中由可测闭值集值映射刻画的子集上投影算

子的可测性.利用所得可测性结果及可测选择定理，构造了求解问题(1)和(2)的随机迭代算法.在恰当条件下，证明了由算法生成的随机序列的收敛性.最后，给出了对随机环境下广义 Nash 博弈和 Walrasian 均衡问题的应用.

随机微分变分不等式是由随机微分方程和随机变分不等式刻画的一类随机耦合系统，为解决产生于科学和工程的许多随机现实问题提供了统一的框架[23,31-32].因此，探索由随机微分方程和随机拟变分不等式所描述的随机耦合系统，有重要的理论和现实意义，值得我们进一步研究.

参考文献(References)：

[1] MOSCO U. Implicit variational problems and quasi-variational inequalities[J]. *Nonlinear Operators and the Calculus of Variations*, 1976, **543**: 83-156.

[2] CHAN D, PANG J S. The generalized quasi-variational inequality problem[J]. *Mathematics of Operations Research*, 1982, **7**(2): 159-318.

[3] BAIOCCHI C, CAPELO A. *Variational and Quasivariational Inequalities, Application to Free Boundary Problems*[M]. New York: Wiley, 1984.

[4] HARKERP T. Generalized Nash games and quasi-variational inequalities[J]. *European Journal of Operational Research*, 1991, **54**(1): 81-94.

[5] GIANNESSI F, MAUGERI A. *Variational Inequalities and Network Equilibrium Problems*[M]. Boston: Springer, 1995.

[6] KONNOV I V, VOLOTSKAYA E O. Mixed variational inequalities and economic equilibrium problems[J]. *Journal of Applied Mathematics*, 2002, **2**(6): 289-314.

[7] FACCHINEI F, FISCHER A, PICCIALLI V. On generalized Nash games and variational inequalities[J]. *Operations Research Letters*, 2007, **35**(2): 159-164.

[8] 张石生. 变分不等式及其相关问题[M]. 重庆：重庆出版社，2008.(ZHANG Shisheng. *Variational Inequality and Its Related Problems*[M]. Chongqing: Chongqing Publishing Group, 2008.(in Chinese))

[9] GWINNER J, RACITI F. Some equilibrium problems under uncertainty and random variational inequalities[J]. *Annals of Operations Research*, 2012, **200**(1): 299-319.

[10] LI X, LI X S, HUANG N J. A generalized f-projection algorithm for inverse mixed variational inequalities[J]. *Optimization Letters*, 2014, **8**: 1063-1076.

[11] NAGURNEY A. *Network Economics: a Variational Inequality Approach*[M]. Springer Dordrecht, 1999.

[12] PANG J S, FUKUSHIMA M. Quasi-variational inequalities, generalized Nash equilibria, and multi-leader-follower games[J]. *Computational Management Science*, 2005, **2**: 21-56.

[13] 王霄婷，龙宪军，彭再云. 求解非单调变分不等式的一种二次投影算法[J]. 应用数学和力学，2022，**43**(8)：927-934.(WANG Xiaoting, LONG Xianjun, PENG Zaiyun. A double projection algorithm for solving non-monotone variational inequalities[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(8): 927-934.(in Chinese))

[14] 杨军. 非单调变分不等式黄金分割算法研究[J]. 应用数学和力学，2021，**42**(7)：764-770.(YANG Jun. A golden ratio algorithm for solving nonmonotone variational inequalities[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, **42**(7): 764-770.(in Chinese))

[15] 刘爽，莫定勇，周志昂. Riemann 流形上 ρ-(η,d)-B 不变凸的向量变分不等式及向量优化问题[J]. 应用数学和力学，2020，**41**(4)：458-466.(LIU Shuang, MO Dingyong, ZHOU Zhiang. Vector variational-like inequalities and vector optimization problems involving ρ-(η,d)-B invexity on Riemannian manifolds[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, **41**(4): 458-466.(in Chinese))

[16] 王梓坤. 随机泛函分析引论[J]. 数学进展，1962，**5**(1)：45-71.(WANG Zikun. Introduction to random functional analysis[J]. *Advances in Mathematics*, 1962, **5**(1): 45-71.(in Chinese))

[17] 张石生，朱元国. 关于一类随机变分不等式和随机拟变分不等式问题[J]. 数学研究与评论，1989，**9**(3)：385-393.(ZHANG Shisheng, ZHU Yuanguo. On a class of random variational inequalities and random quasi-variational inequalities[J]. *Journal of Mathematical Research and Exposition*, 1989, **9**(3): 385-393.(in Chinese))

[18] TAN N X. Random quasi-variational inequality[J]. *Mathematische Nachrichten*, 1986, **125**: 319-328.

[19] 黄南京. 随机广义集值拟补问题[D]. 硕士学位论文. 成都: 四川大学, 1990.(HUANG Nanjing. Random general set-valued quasi complementarity problems[D]. Mater Thesis. Chengdu: Sichuan University, 1990.(in Chinese))

[20] 黄南京. 随机广义集值强非线性拟变分不等式[J]. 四川大学学报(自然科学版), 1994, **31**(4): 420-425. (HUANG Nanjing. Random general set-valued strongly nonlinear quasivariational inequalities[J]. *Journal of Sichuan University* (*Natural Science Edition*), 1994, **31**(4): 420-425.(in Chinese))

[21] HUANG N J, CHO Y J. Random completely generalized set-valued implicit quasi-variational inequalities[J]. *Positivity*, 1999, **3**: 201-213.

[22] DANIELE P, GIUFFRÈ S. Random variational inequalities and the random traffic equilibrium problem[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2014, **167**(1): 363-381.

[23] GWINNER J, JADAMBA B, KHAN A A, et al. *Uncertainty Quantification in Variational Inequalities*[M]. New York: Chapman and Hall/CRC, 2022.

[24] HIMMELBERG C J. Measurable relations[J]. *Fundamenta Mathematicae*, 1975, **87**: 53-72.

[25] CASTAING C, VALADIER M. *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*[M]. Berlin: Springer, 1977.

[26] 张文修, 李寿梅, 汪振鹏, 等. 集值随机过程引论[M]. 北京: 科学出版社, 2007.(ZHANG Wenxiu, LI Shoumei, WANG Zhenpeng, et al. *Introduction to Set-Valued Random Processes*[M]. Beijing: Science Press, 2007.(in Chinese))

[27] 周叔子. 椭圆变分不等式的扰动[J]. 中国科学(A 辑), 1991, **21**(3): 237-244.(ZHOU Shuzi. Perturbation of elliptic variational inequalities[J]. *Science China A*, 1991, **21**(3): 237-244.(in Chinese))

[28] 张讲社, 徐宗本. 拟变分不等式的迭代解法[J]. 工程数学学报, 1989, **6**(1): 40-43.(ZHANG Jiangshe, XU Zongben. Iterative methods for quasivariational inequalities[J]. *Journal of Engineering Mathematics*, 1989, **6**(1): 40-43.(in Chinese))

[29] GÓRNIEWICZ L. *Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings*[M]. Springer Dordrecht, 1999.

[30] HE X L. On ϕ-strongly accretive mappings and some set-valued variational problems[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2003, **277**(2): 504-511.

[31] ZHANG Y J, GOU Z, HUANG N J, et al. A class of stochastic differential variational inequalities with some applications[J]. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 2023, **24**: 75-100.

[32] ZHANG Y J, CHEN T, HUANG N J, et al. Penalty method for solving a class of stochastic differential variational inequalities with an application[J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2023, **73**: 103889.