非光滑半无限多目标优化的高阶 KKT 最优性充分条件*

曹　琪,　冯　敏

(重庆交通大学 数学与统计学院, 重庆 400074)

摘要： 考虑了一类非光滑半无限多目标优化问题.利用高阶 Studniarski 下导数,得到了问题的严格局部有效解的高阶弱 KKT 最优性充分条件.进一步地,若假设该最优性条件中目标函数相关的乘子均大于零,则得到严格局部 Borwein 真有效解的高阶强 KKT 充分条件.这些充分条件适用于处理无任何凸性假设下的问题.

关　键　词： 半无限多目标优化；　高阶 Studniarski 下导数；　高阶 KKT 充分条件

中图分类号： O221.6　　**文献标志码：** A　　DOI：10.21656/1000-0887.440245

Higher-Order KKT Sufficient Optimality Conditions for Nonsmooth Semi-Infinite Multiobjective Optimization

CAO Qi,　FENG Min

(*School of Mathematics and Statistics*, *Chongqing Jiaotong University*, *Chongqing* 400074, *P.R.China*)

Abstract: The nonsmooth semi-infinite multiobjective optimization problems were investigated. The higher-order weak KKT sufficient optimality conditions for strictly local efficient solutions were established in terms of higher-order lower Studniarski derivatives. Furthermore, under the assumption that all multipliers associated with objective functions are positive in optimality conditions, the higher-order strong KKT sufficient optimality conditions for strictly local Borwein-properly efficient solutions would be achieved. These sufficient optimality conditions were established without any convexity assumptions.

Key words: semi-infinite multiobjective optimization; higher-order lower Studniarski derivative; higher-order KKT sufficient condition

0　引　　言

多目标优化在最优控制等领域有着广泛的应用,其理论和应用的研究已经得到了丰富的研究成果[1-2].其各类解(例如 Pareto 有效解、Geoffrion 真有效解和 Borwein 真有效解[3]等)的最优性条件是一个重要的研

* **收稿日期：** 2023-08-17；**修订日期：** 2023-12-07

基金项目： 国家自然科学基金(12201085);重庆市自然科学基金(CSTB2023NSCQ-MSX0332)

作者简介： 曹琪(1998—),女,硕士生(E-mail: cq17345065200@126.com);
冯敏(1990—),男,副教授,博士(E-mail: fengcqu13@126.com).

引用格式： 曹琪, 冯敏. 非光滑半无限多目标优化的高阶 KKT 最优性充分条件[J]. 应用数学和力学, 2024, **45**(4): 502-508.

究方向.

近年来,半无限多目标优化问题的 KKT 最优性条件的相关研究得到了极大发展, 其研究方法与成果相当丰富[4-15].例如:文献[4]利用次微分建立了半无限凸多目标优化问题有效解的强 KKT 充分必要条件;文献[6]在不变凸性假设下,利用 Clarke 次微分导出了局部 Lipschitz 非光滑半无限多目标优化问题弱有效解的强 KKT 充分必要条件;文献[10]在目标函数是伪不变凸同时约束函数是拟不变凸的假设下,利用 Clarke 次微分得到了非光滑多目标半无限优化问题有效解的强 KKT 充分必要条件,改进了文献[4]中相关的结果;最近,文献[15]利用高阶 Studniarski 导数,建立了非光滑多目标半无限优化问题 Borwein 真有效解的高阶强 KKT 最优性充分必要条件等.

目前,大部分文献在建立非光滑多目标半无限优化问题的最优性充分条件时,都需要凸性或者广义凸性假设.在建立高阶的最优性充分条件时,文献[15]要求目标函数和约束函数存在高阶 Studniarski 导数.然而,据笔者所知,通常的平稳函数甚至凸函数不一定存在 Studniarski 导数.因此,针对这一问题,本文的主要目标是在更弱的假设条件下,建立非凸非光滑多目标半无限优化问题的高阶 KKT 最优性充分条件.

本文在无任何凸性假设下,利用高阶 Studniarski 下导数,得到了非光滑半无限问题的严格局部有效解的高阶弱 KKT 充分条件和严格局部 Borwein 真有效解的高阶强 KKT 充分条件.本文的结果可改进现有文献中的一些相关结果.

1　预 备 知 识

在本文中, $\mathbb{R}^n$ 表示 n 维的欧氏空间, $\mathbb{R}^n_+$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的非负象限, $\|\cdot\|$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的欧式距离.对于任意的 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{y}$ 意味着 $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n_+$, $\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle:=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ 表示内积.设 $\bar{\boldsymbol{x}}\in\mathbb{R}^n$ 以及 $\delta>0$, $B(\bar{\boldsymbol{x}};\delta):=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n:\|\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}}\|<\delta\}$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中以 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 为球心且以 δ 为半径的开球.设 $A\subseteq\mathbb{R}^n$, $\mathrm{cl}\,A$ 表示集合 A 的闭包.设 $\boldsymbol{x}\in\mathrm{cl}\,A$, 定义集合 A 在 $\boldsymbol{x}$ 处的切锥为

$$T(A,\boldsymbol{x})=\{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}:\ \exists\, t_k\to 0^+,\ \exists\,\boldsymbol{v}^k\to\boldsymbol{v},\ \text{s.t.}\ \boldsymbol{x}+t_k\boldsymbol{v}^k\in A,\forall\, k\in\mathbb{N}\}.$$

我们考虑如下的半无限多目标优化问题:

$$\begin{cases}\min f(\boldsymbol{x})=(f_1(\boldsymbol{x}),\cdots,f_p(\boldsymbol{x})),\\ \quad\text{s.t.}\quad g_t(\boldsymbol{x})\leqslant 0,\qquad t\in T,\end{cases}\tag{1}$$

其中, $f_i:\Omega\to\mathbb{R}\ (i\in I:=\{1,\cdots,p\})$ 和 $g_t:\Omega\to\mathbb{R}\ (t\in T)$ 是 Ω 上的连续函数, Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个开子集, T 是任意的非空指标集.问题(1)的可行集表示为

$$X:=\{\boldsymbol{x}\in\Omega:\ g_t(\boldsymbol{x})\leqslant 0,\ t\in T\}.$$

设 $\bar{\boldsymbol{x}}\in X$, 约束函数的积极指标集表示为 $T(\bar{\boldsymbol{x}}):=\{t\in T:\ g_t(\bar{\boldsymbol{x}})=0\}$, 有效约束乘子集表示为

$$\Lambda(\bar{\boldsymbol{x}}):=\{\boldsymbol{\eta}\in\mathbb{R}^{|T|}_+:\boldsymbol{\eta}_t g_t(\bar{\boldsymbol{x}})=0,\ \forall\, t\in T\},$$

其中, $|T|$ 表示 T 的基数, 即 T 的元素个数, $\mathbb{R}^{|T|}_+$ 表示仅在 T 的有限个点处取正, 其他点处取零的所有函数 $\boldsymbol{\eta}:T\to\mathbb{R}$ 的全体, $\boldsymbol{\eta}_t$ 表示 $\boldsymbol{\eta}$ 在 t 处取的函数值.

我们回顾文献[16]中定义 1.1 引入的严格局部 m 阶有效解的概念.

定义 1[16]　设 $m\in\mathbb{N}$ 是一个正整数,设 $\bar{\boldsymbol{x}}\in X$ 是问题(1)的一个可行解.若存在 $\rho>0$ 以及 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 的一个邻域 $U\subseteq\mathbb{R}^n$ 满足

$$(f(\boldsymbol{x})+\mathbb{R}^p_+)\cap B(f(\bar{\boldsymbol{x}});\rho\|\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}}\|^m)=\varnothing,\qquad\forall\,\boldsymbol{x}\in X\cap U\backslash\{\bar{\boldsymbol{x}}\},\tag{2}$$

则称 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 为问题(1)的一个严格局部 m 阶有效解.

利用定义 1,我们引入如下的严格局部 m 阶 Borwein 真有效解的定义.

定义 2　设 $m\in\mathbb{N}$ 是一个正整数,设 $\bar{\boldsymbol{x}}\in X$ 是问题(1)的一个可行解.若 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是严格 m 阶的有效解,且存在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 的一个邻域 $U\subseteq\mathbb{R}^n$ 满足

$$T(f(X \cap U)+\mathbb{R}_+^p, f(\bar{\boldsymbol{x}})) \cap(-\mathbb{R}_+^p)=\{\mathbf{0}\}, \tag{3}$$

则称 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 为问题(1)的一个严格局部 m 阶 Borwein 真有效解.

下面的例子说明了定义 2 中的概念是良定义的.

例 1　考虑以下多目标半无限问题：

$$\begin{cases}\min f(x)=(x,-x), \\ \quad \text{s.t.} \quad g_t(x):=-tx \leqslant 0, \qquad t \in T:=\mathbb{N},\end{cases}$$

则 $X=\mathbb{R}_+$.设 $\bar{x}:=0, U:=B(\bar{x};1)$ 以及 $\rho:=1$.通过验证知道,对于 $m=2$, 式(2)和式(3)成立.因此, $\bar{x}$ 是该问题的一个严格局部 2 阶 Borwein 真有效解.

由定义 2 我们注意到,严格局部 m 阶 Borwein 真有效解一定是严格局部 $m+1$ 阶 Borwein 真有效解,并且也一定是局部 Borwein 真有效解(其定义可以参看文献[15]中的定义 2.1).

接下来,我们回顾 m 阶 Studniarski 导数的概念.

定义 3[17]　设 $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个给定的函数.对于 $\bar{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$ 以及 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, 若极限

$$d_S^m h(\bar{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{v}):=\lim_{\boldsymbol{u}\rightarrow\boldsymbol{v}, \alpha\rightarrow 0^+} \frac{h(\bar{\boldsymbol{x}}+\alpha\boldsymbol{u})-h(\bar{\boldsymbol{x}})}{\alpha^m}$$

存在, 则称 $d_S^m h(\bar{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{v})$ 为 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处沿方向 $\boldsymbol{v}$ 上的 m 阶 Studniarski 导数.

定义 4[17]　设 $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个给定的函数.对于 $\bar{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$ 以及 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, 定义

$$\underline{d}_S^m h(\bar{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{v}):=\liminf_{\boldsymbol{u}\rightarrow\boldsymbol{v}, \alpha\rightarrow 0^+} \frac{h(\bar{\boldsymbol{x}}+\alpha\boldsymbol{u})-h(\bar{\boldsymbol{x}})}{\alpha^m}$$

为 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处沿方向 $\boldsymbol{v}$ 上的 m 阶 Studniarski 下导数.

定义 5[18]　设 $m \in \mathbb{N}$ 是一个正整数,设 $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个给定的函数,设 $\bar{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$.若存在 $\rho>0$ 以及 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 的一个邻域 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 满足

$$|h(\boldsymbol{x})-h(\bar{\boldsymbol{x}})| \leqslant \rho\|\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}}\|^m, \qquad \forall \boldsymbol{x} \in U, \tag{4}$$

则称函数 h 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处是 m- 平稳的.

下面的引理给出了 m 阶 Studniarski 下导数是有限值的一个充分条件.

引理 1　设 $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个给定的函数,设 $\bar{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$.若函数 h 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处是 m- 平稳的, 则对于任意的 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, 导数 $\underline{d}_S^m h(\bar{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{v})$ 均取有限值.

证明　考虑一个任意方向的 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, 设 $\delta>0$ 以及 $\rho>0$ 满足式(4).考察一个充分接近 $\boldsymbol{v}$ 的变量 $\boldsymbol{u}$ 和一个充分小的 $\alpha>0$ 使得 $\bar{\boldsymbol{x}}+\alpha\boldsymbol{u} \in B(\bar{\boldsymbol{x}};\delta)$.由 h 的 m- 平稳性知

$$|h(\bar{\boldsymbol{x}}+\alpha\boldsymbol{u})-h(\bar{\boldsymbol{x}})| \leqslant \rho\alpha^m\|\boldsymbol{u}\|^m .$$

在上面的不等式两边同时除以 α^m, 然后令 $\boldsymbol{u}\rightarrow\boldsymbol{v}$ 和 $\alpha\rightarrow 0^+$, 考虑下极限,则我们得到

$$-\rho\|\boldsymbol{v}\|^m \leqslant \bar{d}_S^m h(\bar{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{v})=\liminf_{\boldsymbol{u}\rightarrow\boldsymbol{v}, \alpha\rightarrow 0^+} \frac{h(\bar{\boldsymbol{x}}+\alpha\boldsymbol{u})-h(\bar{\boldsymbol{x}})}{\alpha^m} \leqslant \rho\|\boldsymbol{v}\|^m .$$

这表明 $\underline{d}_S^m h(\bar{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{v})$ 是有限值.证毕.　□

2　高阶弱 KKT 最优性充分条件

首先,利用 m 阶 Studniarski 下导数建立问题(1)的弱 KKT 最优性充分条件.

定理 1　设 $\bar{\boldsymbol{x}} \in X$ 是问题(1)的一个可行解.设函数 $f_i(i \in I)$ 和 $g_t(t \in T)$ 都在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处是 m- 平稳的.若存在 $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}_+^p, \boldsymbol{\lambda} \neq \mathbf{0}$ 和 $\eta \in \Lambda(\bar{\boldsymbol{x}})$ 使得

$$\sum_{i=1}^p \boldsymbol{\lambda}_i \underline{d}_S^m f_i(\bar{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{v})+\sum_{t\in T}\eta_t \underline{d}_S^m g_t(\bar{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{v})>0, \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \backslash\{\mathbf{0}\} \tag{5}$$

成立,则 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是问题(1)的严格局部 m 阶有效解.

证明　反证法.假设 $\bar{x}$ 不是问题(1)的严格局部 m 阶有效解.则存在序列 $x^k \in X \cap B(\bar{x};1/k)$,$x^k \neq \bar{x}$, 以及 $d^k \in \mathbb{R}^p_+$ 使得

$$f(x^k) - f(\bar{x}) + d^k \in B(\mathbf{0};(1/k)\alpha_k^m), \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

其中, $\alpha_k := \| x^k - \bar{x} \|$.则当 $k \to +\infty$ 时,我们有 $x^k \to \bar{x}$ 以及 $\alpha_k \to 0^+$.若定义序列 $v^k := (x^k - \bar{x})/(\| x^k - \bar{x} \|)$, 则 $x^k = \bar{x} + \alpha_k v^k$.因为 $\| v^k \|$ 总等于1,所以 $\{v^k\}$ 存在收敛的子序列(不妨仍为 $\{v^k\}$ 本身).从而,当 $k \to +\infty$ 时, v^k 收敛到某个 $v \in \mathbb{R}^n$ 并且 $\| v \| = 1$.对于每个 $i \in I$ 均有

$$\underline{d}_S^m f_i(\bar{x};v) \leqslant \liminf_{k\to\infty} \frac{f_i(x^k) - f_i(\bar{x})}{\alpha_k^m} \leqslant \liminf_{k\to\infty} \frac{f_i(x^k) - f_i(\bar{x}) + d_i^k}{\alpha_k^m} \leqslant \liminf_{k\to\infty} \frac{(1/k)\alpha_k^m}{\alpha_k^m} = 0,$$

其中,第三个不等式成立是因为式(6)成立.同样地,对于每个 $t \in T(\bar{x})$ 均有

$$\underline{d}_S^m g_t(\bar{x};v) \leqslant \liminf_{k\to\infty} \frac{g_t(x^k) - g_t(\bar{x})}{\alpha_k^m} \leqslant 0.$$

由于 $\eta \in \Lambda(\bar{x})$, 则 $\eta_t = 0, t \in T \backslash T(\bar{x})$.并且 $\lambda \in \mathbb{R}^p_+$ 以及 $v \neq \mathbf{0}$, 综上可得

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i \underline{d}_S^m f_i(\bar{x};v) + \sum_{t\in T} \eta_t \underline{d}_S^m g_t(\bar{x};v) \leqslant 0,$$

这与式(5)矛盾.故假设不成立.因此, $\bar{x}$ 是问题(1)的严格局部 m 阶有效解.证毕.　□

注意到,在上述定理中,我们假设 $f_i(i \in I)$ 和 $g_t(t \in T)$ 都在 $\bar{x}$ 处是 m- 平稳的,仅仅为了保证 $f_i(i \in I)$ 和 $g_t(t \in T)$ 在 $\bar{x}$ 处沿任意方向上的 m 阶 Studniarski 下导数都存在.特别地,当这些函数在 $\bar{x}$ 处沿任意方向上的 m 阶 Studniarski 导数都存在时,我们将得到如下的推论.

推论 1　设 $\bar{x} \in X$ 是问题(1)的一个可行解,设 $f_i(i \in I)$ 和 $g_t(t \in T)$ 在 $\bar{x}$ 处沿任意方向上的 m 阶 Studniarski 导数都存在.若存在 $\lambda \in \mathbb{R}^p_+, \lambda \neq \mathbf{0}$, 和 $\eta \in \Lambda(\bar{x})$ 使得

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i d_S^m f_i(\bar{x};v) + \sum_{t\in T} \eta_t d_S^m g_t(\bar{x};v) > 0, \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$$

成立,则 $\bar{x}$ 是问题的严格局部 m 阶有效解.

注 1　Su 和 Hien 在文献[18]中利用 m 阶 Studniarski 导数建立了局部弱有效解的高阶 KKT 最优性充分条件.因为严格局部 m 阶有效解一定是局部有效解,当然也是局部弱有效解,所以推论 1 将文献[18]中定理 4.1 的结果从局部弱有效解改进到严格局部 m 阶有效解.此外,推论 1 中结果的建立不需要借助凸性和广义凸性假设.

下面我们给出一个说明注 1 的例子.

例 2　考虑以下多目标半无限问题:

$$\begin{cases} \min f(x_1,x_2) = (2x_1^2, -x_1^2), \\ \quad \text{s.t.} \quad g_t(x_1,x_2) := -x_1^2 + tx_2^2 \leqslant 0, \qquad t \in T := \mathbb{N}. \end{cases}$$

设 $f_1(x_1,x_2) := 2x_1^2$, $f_2(x_1,x_2) := -x_1^2$.则可行集为 $X = \mathbb{R} \times \{\mathbf{0}\}$.考虑 $\bar{x} = (0,0)$.计算可得 $d_S^2 f_1(\bar{x};v) = 2v_1^2$, $d_S^2 f_2(\bar{x};v) = -v_1^2$, $d_S^2 g_t(\bar{x};v) = -v_1^2 + tv_2^2, t \in T = \{1,2,3,\cdots\}$.我们取 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \eta_1 = 1, \eta_t = 0, t \in \{2,3,\cdots\}$, 对于任意的 $(v_1,v_2) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ 可得

$$\lambda_1 d_S^2 f_1(\bar{x};v) + \lambda_2 d_S^2 f_2(\bar{x};v) + \eta_1 d_S^2 g_1(\bar{x};v) + \sum_{t=2}^{\infty} \eta_t d_S^m g_t(\bar{x};v) = v_1^2 + v_2^2 > 0.$$

因此,根据推论 1 我们可以得到 $\bar{x}$ 是该问题的严格局部 2 阶有效解.事实上,对于 $\rho = 1$ 以及邻域 $U = B(\bar{x};1)$ 有条件(2)成立.另一方面,由于 f_2 不是伪凸,因此文献[9]中定理 1 不适用于本算例.同时 f_2 也不是拟凸的,所以文献[10]中定理 4.1 也不适用于本例题.

3　高阶强 KKT 最优性充分条件

进一步地,我们在定理 1 的基础之上,得到如下的高阶强 KKT 最优性充分条件.

定理 2 设 $\bar{\boldsymbol{x}} \in X$ 是问题(1)的一个可行解,设函数 $f_i(i \in I)$ 和 $g_t(t \in T)$ 都在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处是 m- 平稳的.若存在 $\boldsymbol{\lambda} \in \operatorname{int} \mathbb{R}_+^p$ 和 $\boldsymbol{\eta} \in \Lambda(\bar{\boldsymbol{x}})$ 使得

$$\sum_{i=1}^{p} \boldsymbol{\lambda}_i \underline{d}_S^m f_i(\bar{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{v}) + \sum_{t \in T} \boldsymbol{\eta}_t \underline{d}_S^m g_t(\bar{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{v}) > 0, \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\boldsymbol{0}\} \tag{7}$$

成立,则 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是问题(1)的严格局部 m 阶 Borwein 真有效解.

证明 由定理 1 知,式(7)意味着 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是问题(1)的严格局部 m 阶有效解.下证 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 满足条件(3).为此,我们先证 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是标量化问题

$$\begin{cases} \min \ \phi(\boldsymbol{x}) := \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \boldsymbol{\lambda}_i f_i(\boldsymbol{x}), \\ \quad \text{s.t.} \quad \boldsymbol{x} \in X \end{cases} \tag{8}$$

的一个局部最优解.假设对于每个 $k \in \mathbb{N}$ 都存在 $\boldsymbol{x}^k \in X \cap B(\bar{\boldsymbol{x}};1/k)$ 使得

$$\phi(\boldsymbol{x}^k) < \phi(\bar{\boldsymbol{x}}). \tag{9}$$

类似于定理 1 中的证明,令 $\alpha_k := \|\boldsymbol{x}^k - \bar{\boldsymbol{x}}\|$ 和 $\boldsymbol{v}^k := (\boldsymbol{x}^k - \bar{\boldsymbol{x}})/\alpha_k$, 则 $\boldsymbol{x}^k = \bar{\boldsymbol{x}} + \alpha_k \boldsymbol{v}^k, k \in \mathbb{N}$.并且不妨设 $\boldsymbol{v}^k$ 收敛于 $\boldsymbol{v}$, 则 $\|\boldsymbol{v}\| = 1$.

$$\sum_{i=1}^{p} \boldsymbol{\lambda}_i \underline{d}_S^m f_i(\bar{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{v}) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \boldsymbol{\lambda}_i \liminf_{k\to\infty} \frac{f_i(\boldsymbol{x}^k) - f_i(\bar{\boldsymbol{x}})}{\alpha_k^m} \leqslant$$

$$\liminf_{k\to\infty} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \boldsymbol{\lambda}_i (f_i(\boldsymbol{x}^k) - f_i(\bar{\boldsymbol{x}}))}{\alpha_k^m} = \liminf_{k\to\infty} \frac{\phi(\boldsymbol{x}^k) - \phi(\bar{\boldsymbol{x}})}{\alpha_k^m} \leqslant 0,$$

其中,最后的不等式成立是因为式(9)成立.对于每个 $t \in T(\bar{\boldsymbol{x}})$ 均有

$$\underline{d}_S^m g_t(\bar{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{v}) \leqslant \liminf_{k\to\infty} \frac{g_t(\boldsymbol{x}^k) - g_t(\bar{\boldsymbol{x}})}{\alpha_k^m} \leqslant 0.$$

由于 $\boldsymbol{\eta} \in \Lambda(\bar{\boldsymbol{x}})$, 则 $\boldsymbol{\eta}_t = 0, t \in T \backslash T(\bar{\boldsymbol{x}})$.综上可得

$$\sum_{i=1}^{p} \boldsymbol{\lambda}_i \underline{d}_S^m f_i(\bar{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{v}) + \sum_{t \in T} \boldsymbol{\eta}_t \underline{d}_S^m g_t(\bar{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{v}) \leqslant 0.$$

这与式(7)矛盾,故假设不成立.因此, $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是问题(8)的局部最优解,即存在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 的邻域 U 使得 $\phi(\bar{\boldsymbol{x}}) \leqslant \phi(\boldsymbol{x})$, $\forall \boldsymbol{x} \in X \cap U$.又因为 $\boldsymbol{\lambda} \in \operatorname{int} \mathbb{R}_+^p$, 所以 $\langle \boldsymbol{\lambda}, s \rangle > 0, \forall s \in \mathbb{R}_+^p \backslash \{\boldsymbol{0}\}$.因此,利用文献[3]中定理 1 可知

$$T(f(X \cap U) + \mathbb{R}_+^p, f(\bar{\boldsymbol{x}})) \cap (-\mathbb{R}_+^p) = \{\boldsymbol{0}\}.$$

故 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是严格局部 m 阶有效解且满足条件(3),即 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是严格局部 m 阶 Borwein 真有效解.证毕. □

特别地,当 m 阶 Studniarski 导数都存在时,我们将得到如下的推论.

推论 2 设 $\bar{\boldsymbol{x}} \in X$ 是问题(1)的一个可行解,设 $f_i(i \in I)$ 和 $g_t(t \in T)$ 在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处沿任意方向上的 m 阶 Studniarski 导数都存在.若存在 $\boldsymbol{\lambda} \in \operatorname{int} \mathbb{R}_+^p$ 和 $\boldsymbol{\eta} \in \Lambda(\bar{\boldsymbol{x}})$ 使得

$$\sum_{i=1}^{p} \boldsymbol{\lambda}_i d_S^m f_i(\bar{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{v}) + \sum_{t \in T} \boldsymbol{\eta}_t d_S^m g_t(\bar{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{v}) > 0, \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\boldsymbol{0}\}$$

成立,则 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 是严格局部 m 阶 Borwein 真有效解.

注 2 在文献[15]的定理 6.1 中,Su 和 Luu 利用高阶 Studniarski 导数建立了局部 Borwein 真有效解的 m 阶强 KKT 最优性充分条件.值得注意的是,严格局部 m 阶 Borwein 真有效解一定是局部 Borwein 真有效解.因此,推论 2 将他们的结果改进到严格局部 m 阶 Borwein 真有效解.

注 3 考察例 2,根据定理 2,我们不难得到 $\bar{x}$ 是该问题的严格局部 2 阶 Borwein 真有效解.由于 f_2 不是凸的,因此有效解的强 KKT 充分条件(文献[4]中定理 7)不适用于本例题.

注 4 最后注意到,当高阶 Studniarski 下导数存在时,高阶 Studniarski 导数可能不存在.因此,当文献[15]中定理 6.1 因为高阶 Studniarski 导数不存在而不适用时,定理 2 可能仍然适用.下面的算例将说明这一点.

例 3　考虑以下多目标半无限问题：

$$\begin{cases}\min f(x) = (f_1(x), f_2(x)),\\ \quad \text{s.t.} \quad g_t(x) := tx^3 \leqslant 0, \qquad t \in T := [0,1],\end{cases}$$

其中,当 $x \neq 0$ 时, $f_1(x) := x^2\sin(1/x)$ 而 $f_1(0) := 0$, $f_2(x) := x^2$.则可行集为 $X = \mathbb{R}_+$.考虑 $\bar{x} = 0$.计算可得 $\underline{d}_S^2 f_1(\bar{x};v) = -v^2$, $\underline{d}_S^2 f_2(\bar{x};v) = v^2$, $\underline{d}_S^2 g_t(\bar{x};v) = 0$, $t \in T$.为此,我们取 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\eta_t = 0$, $t \in T$, 对于任意的 $v \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ 可得

$$\lambda_1 \underline{d}_S^2 f_1(\bar{x};v) + \lambda_2 \underline{d}_S^2 f_2(\bar{x};v) + \sum_{t\in T}\eta_t \underline{d}_S^m g_t(\bar{x};v) = v^2 > 0.$$

因此根据定理 2,我们可以得到 $\bar{x}$ 是该问题的严格局部 2 阶 Borwein 真有效解.事实上,对于 $\rho = 1$ 以及邻域 $U = B(\bar{x};1)$ 有条件(2)、(3)成立.另一方面,由于 f_1 在 $\bar{x}$ 处不存在 2 阶 Studniarski 导数,所以文献[15]中定理 6.1 不适用于本例题.

4　结　　论

本文在现有文献的基础上,利用高阶 Studniarski 下导数概念,得到了非凸非光滑半无限多目标优化问题严格局部弱有效解的高阶弱 KKT 充分条件和严格局部 Borwein 真有效解的高阶强 KKT 充分条件.本文中的例 2 和例 3 说明了本文的结果适用于非凸半无限多目标优化问题.另外,本文中的定理 2 改进了现有文献中的结果.

参考文献(References)：

[1]　林锉云, 董加礼. 多目标优化的方法与理论[M]. 长春：吉林教育出版社, 1992.(LIN Cuoyun, DONG Jiali. *Method and Theory of Multi-Objective Optimization*[M]. Changchun：Jilin Education Press, 1992.(in Chinese))

[2]　JAHN J. *Vector Optimization*：*Theory*, *Applications and Extensions*[M]. Springer, 2011.

[3]　BORWEIN J M. Proper efficient points for maximizations with respect to cones[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1977, **15**(1)：57-63.

[4]　GOBERNA M A, KANZI N. Optimality conditions in convex multiobjective SIP[J]. *Mathematical Programming*, 2017, **164**(1/2)：167-191.

[5]　KANZI N, NOBAKHTIAN S. Optimality conditions for nonsmooth semi-infinite multiobjective programming [J]. *Optimization Letters*, 2014, **8**(4)：1517-1528.

[6]　KANZI N. On strong KKT optimality conditions for multiobjective semi-infinite programming problems with Lipschitzian data[J]. *Optimization Letters*, 2015, **9**(6)：1121-1129.

[7]　CARISTI G, KANZI N. Karush-Kuhn-Tuker type conditions for optimality of non-smooth multiobjective semi-infinite programming[J]. *International Journal of Mathematical Analysis*, 2015, **9**(39)：1929-1938.

[8]　PANDEY Y, MISHRA S K. On strong KKT type sufficient optimality conditions for nonsmooth multiobjective semi-infinite mathematical programming problems with equilibrium constraints[J]. *Operations Research Letters*, 2016, **44**(1)：148-151.

[9]　杨玉红, 李飞. 非光滑半无限多目标优化问题的最优性充分条件[J]. 应用数学和力学, 2017, **38**(5)：526-538.(YANG Yuhong, LI Fei. Sufficient optimality conditions for nonsmooth semi-infinite multiobjective optimization problems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(5)：526-538.(in Chinese))

[10]　王海军, 张秀利. 非光滑半无限多目标优化问题的强 KKT 条件[J]. 数学的实践与认识, 2021, **51**(9)：171-176.(WANG Haijun, ZHANG Xiuli. Strong KKT type conditions for nonsmooth semi-infinite multiobjective optimization problems[J]. *Mathematics in Practice and Theory*, 2021, **51**(9)：171-176.(in Chinese))

[11] 刘娟, 龙宪军. 非光滑多目标半无限规划问题的混合型对偶[J]. 应用数学和力学, 2021, **42**(6): 595-601.(LIU Juan, LONG Xianjun. Mixed type duality for nonsmooth multiobjective semi-infinite programming problems [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, **42**(6): 595-601. (in Chinese))

[12] 冯欣怡, 孙祥凯. 不确定信息下分式半无限优化问题的近似最优性刻画[J]. 应用数学和力学, 2022, **43**(6): 682-689.(FENG Xinyi, SUN Xiangkai. Characterizations of approximate optimality conditions for fractional semi-infinite optimization problems with uncertainty[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(6): 682-689. (in Chinese))

[13] TUNG L T. Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions and duality for multiobjective semi-infinite programming with vanishing constraints[J]. *Annals of Operations Research*, 2022, **311**(2): 1307-1334.

[14] VAN LUU D. Higher-order efficiency conditions via higher-order tangent cones[J]. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 2014, **35**(1): 68-84.

[15] VAN SU T, VAN LUU D. Higher-order Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions for Borwein properly efficient solutions of multiobjective semi-infinite programming[J]. *Optimization*, 2022, **71**(6): 1749-1775.

[16] WARD D E. Characterizations of strict local minima and necessary conditions for weak sharp minima[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1994, **80**(3): 551-571.

[17] STUDNIARSKI M. Necessary and sufficient conditions for isolated local minima of nonsmooth functions[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1986, **24**(5): 1044-1049.

[18] VAN SU T, HIEN N D. Studniarski's derivatives and efficiency conditions for constrained vector equilibrium problems with applications[J]. *Optimization*, 2021, **70**(1): 121-148.