

# 基于弹性边界的多墙式盒段结构 复合材料壁板屈曲分析方法\*

赵北<sup>1,2</sup>, 熊斯浚<sup>1,3</sup>, 陈亮<sup>3,4</sup>, 王成波<sup>3,4</sup>, 李锐<sup>1,4</sup>

1. 大连理工大学 工程力学系 工业装备结构分析优化与 CAE 软件全国重点实验室, 辽宁 大连 116024;
2. 中国航空工业集团公司成都飞机设计研究所 强度部, 成都 610091;
3. 中国航空工业集团公司沈阳飞机设计研究所 综合强度部, 沈阳 110035;
4. 辽宁省飞行器结构强度数字孪生重点实验室, 沈阳 110035)

(我刊编委李锐来稿)

**摘要:** 机翼中的多墙式盒段结构是飞机结构设计的关键关注区域之一。盒段结构主要由蒙皮以及支撑件组合而成, 其中蒙皮被支撑件近似分隔为多个矩形壁板。在飞机服役过程中, 机翼主要承受弯曲、扭转或者弯扭耦合载荷等作用, 导致盒段结构中矩形壁板容易产生失稳。在传统复合材料壁板屈曲分析中, 往往将边界简化为固支或简支, 所得结果与试验差距较大, 而采用有限元方法进行全面模拟往往效率较低。针对上述问题, 该文提出了一种结合单胞模型以及微分求积法的复合材料壁板快速屈曲分析方法。首先, 建立了单胞模型计算矩形壁板的弹性边界刚度系数; 然后, 通过微分求积法求解控制方程, 获得了壁板的屈曲载荷; 最后, 计算了不同类型盒段结构中复合材料壁板的屈曲载荷, 并与有限元结果进行对比, 验证了该文屈曲分析方法的准确性。

**关键词:** 复合材料壁板; 弹性边界; 屈曲; 微分求积法

中图分类号: O343.9 文献标志码: A DOI: 10.21656/1000-0887.440283

## A Buckling Analysis Method for Composite Panels in Multiweb Box Structures Based on Elastic Boundaries

ZHAO Bei<sup>1,2</sup>, XIONG Sijun<sup>1,3</sup>, CHEN Liang<sup>3,4</sup>,  
WANG Chengbo<sup>3,4</sup>, LI Rui<sup>1,4</sup>

1. State Key Laboratory of Structural Analysis, Optimization and CAE Software for Industrial Equipment, Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, P.R.China;
2. Department of Strength, AVIC Chengdu Aircraft Design and Research Institute, Chengdu 610091, P.R.China;

\* 收稿日期: 2023-09-20; 修订日期: 2024-05-27

基金项目: 国家自然科学基金(12372067;12022209)

作者简介: 赵北(1998—), 男, 助理工程师(E-mail: zhaobei1998@163.com);

熊斯浚(1994—), 男, 工程师(E-mail: xionsijun@mail.dlut.edu.cn);

陈亮(1977—), 男, 研究员(E-mail: liangchen110035@163.com);

王成波(1977—), 男, 正高级工程师(E-mail: chengbowang110035@163.com);

李锐(1985—), 男, 教授, 博士, 博士生导师(通讯作者, E-mail: rui.li@dlut.edu.cn).

引用格式: 赵北, 熊斯浚, 陈亮, 王成波, 李锐. 基于弹性边界的多墙式盒段结构复合材料壁板屈曲分析方法[J]. 应用数学和力学, 2024, 45(9): 1182-1199.

3. *Department of Strength, AVIC Shenyang Aircraft Design and Research Institute, Shenyang 110035, P.R.China;*
4. *Key Laboratory of Digital Twin for Aircraft Structural Strength, Liaoning Province, Shenyang 110035, P.R.China)*
- (Contributed by LI Rui, M.AMM Editorial Board)

**Abstract:** The multiweb box structures in the wings are paid special attention in aircrafts' structural design. The multiweb box is mainly composed of skins and stiffeners. The skins are approximately divided into many rectangular panels by stiffeners. During the service of an aircraft, the wing majorly bears bending, torsion, and bending-torsion coupling loads, etc., so the panels in box structures are susceptible to instability. In traditional buckling analysis of composite panels, the boundary conditions were typically simplified as either clamped or simply supported boundaries, with significant deviations from experimental results. On the other hand, comprehensive simulations with the finite element method are generally inefficient. Aimed at the above issues, a rapid buckling analysis method combining the unit cell model with the differential quadrature method for composite panels was proposed. Firstly, the unit cell model was established to calculate the stiffness coefficients of elastic boundaries of rectangular panels. The governing equations were then solved with the differential quadrature method to obtain the buckling loads on the panels. Finally, the buckling loads on composite panels in different types of box structures were calculated and compared to the results obtained with the finite element method to verify the accuracy of the presented buckling analysis method.

**Key words:** composite panel; elastic boundary; buckling; differential quadrature method

## 0 引 言

复合材料多墙式盒段结构因其扭转刚度大和承载能力高的特点而广泛应用于飞机机翼中。盒段结构通常承受弯曲、扭转或弯扭耦合载荷作用,受力状态复杂,翼板、腹板等薄壁构件可能发生局部失稳并导致整体结构过早破坏<sup>[1]</sup>。因此,有必要对盒段结构复合材料壁板开展屈曲分析,助力结构安全设计。

当前,复合材料壁板屈曲问题的求解方法主要分为解析和数值方法两大类。在实际工程应用中,复合材料壁板的应力分布往往是不均匀的,而传统解析的工程分析方法往往需要将实际的不均匀应力场等效成均匀应力场,然后采用经验公式进行计算,这种近似的等效处理方法可能造成较大误差。为更准确地处理实际问题,奇异摄动法<sup>[2-3]</sup>、有限差分法<sup>[4-5]</sup>、边界元法<sup>[6-7]</sup>、无网格法<sup>[8-11]</sup>、有限条法<sup>[12-14]</sup>、有限元法(FEM)<sup>[15]</sup>、微分求积法<sup>[16-19]</sup>、等几何法<sup>[20]</sup>、Galerkin法<sup>[21]</sup>等数值方法应运而生。然而,采用有限元等方法对复杂结构开展屈曲分析时,往往由于结构件数量多、构型以及部件间连接方式复杂等原因,导致分析过程耗时较长,效率较低。微分求积法是一种高效且高精度的数值分析方法,该方法将复合材料壁板屈曲问题对应的高阶偏微分方程复杂边值问题转化为线性方程组求解问题,同时不需要复杂的前处理工作,广泛适用于求解各类型壁板的屈曲问题。

在实际工程应用中,盒段结构蒙皮由长筋条等支撑件支撑,蒙皮被支撑件近似分隔为多个矩形壁板。当采用传统分析方法处理单个矩形壁板的屈曲问题时,往往需要将边界简化为固支、简支或按照经验给出折中系数,而实际多墙式盒段结构壁板的边界条件并非简单的固支或者简支,而是处于固支和简支之间的一种复杂的弹性边界。为此,亟需发展多墙式盒段结构壁板弹性边界的表征方法,进一步开展基于弹性边界的壁板精细化屈曲分析研究。

本文提出了一种结合微分求积法与弹性边界模型的复合材料矩形壁板屈曲分析方法,以达到快速求解盒段结构中多个矩形壁板屈曲载荷的目的。首先,针对目标壁板及其支撑件的具体尺寸,通过参数化建模的方式快速建立单胞模型,并计算对应的弹性边界刚度系数;然后利用微分求积法求解含有弹性边界壁板屈曲问题的控制方程,计算矩形壁板的屈曲载荷;最后将计算结果与有限元结果进行对比,以验证本文复合材料

壁板屈曲分析方法的准确性.

## 1 壁板屈曲问题的微分求积法

### 1.1 微分求积法

由于具有公式简单、使用方便、计算量小以及精度高等优点,微分求积法被广泛应用于求解板的力学问题.微分求积法是美国数学家 Bellman 和 Casti 于 1971 年提出的<sup>[22]</sup>,其本质是函数及其导数在任一节点处的值都可以用全域中所有节点的函数值加权表示,于是微分方程就可以转换成以节点处的函数值为未知数的代数方程组<sup>[23]</sup>.

不失一般性,假设一维函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续可微,则

$$L\{f(x)\} = \sum_{j=1}^N W_j(x)f(x_j), \quad (1)$$

其中,  $L$  为线性微分算子;  $a = x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$  为  $N$  个互异节点,  $x_j$  为其中第  $j$  个节点的坐标值;  $W_j(x)$  为插值基函数,当采用多项插值时,其为  $N-1$  次多项式.

若  $L = d/dx$ , 令  $A_{ij} = W_j(x_i)$ ,  $f_j = f(x_j)$ , 则一阶导数为

$$f'_i = \sum_{j=1}^N A_{ij}f_j, \quad (2)$$

其中,  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $A_{ij}$  为函数  $f(x)$  的一阶导数的加权系数.

记  $k$  阶导数  $f_i^{[k]}(x_i)$  为  $f_i^{[k]}$ , 其中  $i = 1, 2, \dots, N$ , 可将节点处的高阶导数用节点函数值插值表示为

$$f_i^{[2]} = \sum_{j=1}^N B_{ij}f_j, \quad (3)$$

$$f_i^{[3]} = \sum_{j=1}^N C_{ij}f_j, \quad (4)$$

$$f_i^{[4]} = \sum_{j=1}^N E_{ij}f_j, \quad (5)$$

其中,  $B_{ij}$ ,  $C_{ij}$  和  $E_{ij}$  分别为函数  $f(x)$  的二、三、四阶导数的加权系数.

根据低阶导数插值求高阶导数,可推导出各阶导数加权系数之间的关系.比如,当求  $f(x)$  的二阶导数  $f_i^{[2]}(x)$  时,可以将式(2)左右两边分别对  $x$  求导,即

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left\{ \sum_{j=1}^N W_j(x)f(x_j) \right\} = \sum_{j=1}^N \frac{d}{dx} \{ W_j(x) \} f(x_j), \quad (6)$$

并且插值基函数  $W_j(x)$  的一阶导数可用该函数节点值插值表示,即

$$\frac{d}{dx} \{ W_j(x) \} = \sum_{k=1}^N W_k(x) W_j(x_k) = \sum_{k=1}^N W_k(x) A_{kj}. \quad (7)$$

将式(7)代入式(6)可以得到

$$f_i^{[2]} = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N W_k(x_i) A_{kj} f(x_j) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N A_{ik} A_{kj} f_j. \quad (8)$$

将式(8)与式(3)比较,可以得到

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^N A_{ik} A_{kj}, \quad (9)$$

其中,  $j = 1, 2, \dots, N$ .

同理,可以得到

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^N A_{ik} B_{kj} = \sum_{k=1}^N B_{ik} A_{kj}, \quad (10)$$

$$E_{ij} = \sum_{k=1}^N A_{ik} C_{kj} = \sum_{k=1}^N B_{ik} B_{kj} = \sum_{k=1}^N C_{ik} A_{kj}. \quad (11)$$

根据式(9)~(11)可知,已知  $A_{ij}$ , 则  $B_{ij}$ ,  $C_{ij}$  和  $E_{ij}$  均容易计算得到.

二维函数  $g(x, y)$  通常可以用两个一维函数的积来表示, 比如

$$g(x, y) = p(x)h(y). \quad (12)$$

根据微分求积法的基本原理, 任意一维函数在任一节点处的  $k$  阶导数值均可由节点的函数值来表示:

$$p_i^{[k]} = \sum_{l=1}^N \phi_{il}^{[k]} p_l, \quad (13)$$

$$h_j^{[k]} = \sum_{m=1}^M \psi_{jm}^{[k]} h_m, \quad (14)$$

其中,  $\phi_{il}^{[k]}$  与  $\psi_{jm}^{[k]}$  为一维函数的  $k$  阶导数的加权系数,  $N, M$  分别为  $x, y$  方向上划分的节点数. 令  $g(x_i, y_j) = g_{ij}$ , 根据式 (13) 与式 (14), 可以推导出二维函数  $g(x, y)$  在任一节点的各阶偏导数的公式:

$$\left. \frac{\partial^k g}{\partial x^k} \right|_{ij} = p_i^{[k]} h_j = \sum_{l=1}^N \phi_{il}^{[k]} p_l h_j = \sum_{l=1}^N \phi_{il}^{[k]} g_{lj}, \quad (15)$$

$$\left. \frac{\partial^k g}{\partial y^k} \right|_{ij} = p_i h_j^{[k]} = \sum_{m=1}^M \psi_{jm}^{[k]} p_i h_m = \sum_{m=1}^M \psi_{jm}^{[k]} g_{im}, \quad (16)$$

$$\left. \frac{\partial^{r+s} g}{\partial x^r \partial y^s} \right|_{ij} = p_i^{[r]} h_j^{[s]} = \sum_{l=1}^N \phi_{il}^{[r]} p_l \sum_{m=1}^M \psi_{jm}^{[s]} h_m = \sum_{l=1}^N \phi_{il}^{[r]} \sum_{m=1}^M \psi_{jm}^{[s]} g_{lm}. \quad (17)$$

式 (15) — (17) 中各阶偏导数的加权系数均可由一维函数的加权系数计算得到, 因此我们只需推导一维函数的权函数. 一维函数权函数求解过程如下. 将函数  $f(x)$  用节点函数值进行 Lagrange 插值来表示, 即

$$f(x) = \sum_{j=1}^N l_j(x) f(x_j), \quad (18)$$

其中,  $l_j(x)$  为 Lagrange 插值多项式, 其表达形式为

$$l_j(x) = \prod_{N} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}. \quad (19)$$

根据式 (18) 对  $f(x)$  求一阶导数, 则

$$f'_i = f'(x_i) = \sum_{j=1}^N l'_j(x_i) f_j. \quad (20)$$

将式 (20) 与式 (2) 对比可以得到

$$A_{ij} = l'_j(x_i). \quad (21)$$

权系数的表达式为

$$A_{ij} = l'_j(x_i) = \begin{cases} \frac{\prod_N (x_i - x_k)}{\prod_N (x_j - x_k)}, & i \neq j, \\ \sum_N \frac{1}{x_i - x_k}, & i = j. \end{cases} \quad (22)$$

根据插值函数  $l_j(x)$  各阶导数的递推关系, 可得到二阶以及二阶以上导数的权系数表达式:

$$W_{ij}^{[k]} = l_j^{[k]}(x_i) = \begin{cases} k \left\{ l_i^{[k-1]}(x_i) l'_j(x_i) - \frac{l_j^{[k-1]}(x_i)}{x_i - x_j} \right\}, & i \neq j, \\ - \sum_N l_m^{[k]}(x_i), & i = j, \end{cases} \quad (23)$$

其中,  $2 \leq k \leq N - 1$ ,  $W_{ij}^{[k]}$  为第  $k$  阶导数的权系数.

通过权系数的表达式可知, 权系数矩阵的值由节点的选择以及分布所决定, 因此节点选择方法以及其分布结果对微分求积法的稳定性和收敛性的影响较大<sup>[24]</sup>. 表 1 展示了常用非均匀节点的分布公式. 其中  $x_1 = 0$ ,  $x_{N+1} = 1$ ,  $i = 2, 3, \dots, N$ , 节点总数为  $N + 1$ . 表 1 中编号 3 为采用 Chebyshev 多项式的根进行变形得到的节点选取公式, 用其选取节点时解决问题收敛速度相对较快, 能够得到较好的结果, 因此本文在采用微分求积法求解时选用编号 3 的公式选取节点.

表1 常用节点分布公式

Table 1 Commonly used formulas of node distribution

number	formula
1	$x_i = 2 \frac{i-1}{N} - 1, x_1 = -1, x_{N+1} = 1$
2	$x_i = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \left[ \frac{(i-1)\pi}{N} \right]$
3	$x_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \left[ \frac{(N+1-i)\pi}{N} \right]$
4	$x_i = \cos \left[ \frac{(N+1-i)\pi}{N} \right]$
5	$x_i = -\frac{1}{2} \cos \left[ \frac{(i-1)\pi}{N} \right]$

## 1.2 控制方程以及常见边界条件

求解薄板屈曲问题需联立控制方程以及边界条件.正交各向异性薄板屈曲控制方程为<sup>[25]</sup>

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0, \quad (24)$$

其中,  $w$  为中面位移函数;  $N_x$  和  $N_y$  分别为层合板在  $x$  和  $y$  方向承受的轴向载荷;  $N_{xy}$  为层合板在  $xOy$  平面内承受的剪切载荷;  $D_{ij}(i, j = 1, 2, 6)$  为层合板刚度矩阵元素.

薄板典型边界条件包括固支、简支以及弹性边界条件,其表达方式如下:

(a) 固支边界条件

$$\begin{cases} w \Big|_{\substack{x=0,a \\ y=0,b}} = 0, \\ \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0,a} = 0, \\ \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0,b} = 0; \end{cases} \quad (25)$$

(b) 简支边界条件

$$\begin{cases} w \Big|_{\substack{x=0,a \\ y=0,b}} = 0, \\ M_x \Big|_{x=0,a} = 0, \\ M_y \Big|_{y=0,b} = 0; \end{cases} \quad (26)$$

(c) 弹性边界条件

$$\begin{cases} w \Big|_{\substack{x=0,a \\ y=0,b}} = 0, \\ M_x + k \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0,a} = 0, \\ M_y + k \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0,b} = 0, \end{cases} \quad (27)$$

其中,  $k$  为弹性边界刚度系数.

基于微分求积法求解控制方程.采用上文中编号3的公式选取节点,沿矩形壁板长宽两个方向各取  $N$  个离散点,并通过式(22)、(23)求解权系数值,以此将连续高阶偏微分方程离散成为代数方程,将离散形式的控制方程和边界条件整理成如下矩阵形式:

$$SU = \mathbf{0}, \quad (28)$$

其中,  $S$  是系数矩阵,  $U$  是离散节点位移向量.令上述矩阵方程的系数矩阵行列式为零,即可确定薄板屈曲

载荷.

式(24)中的  $D_{ij}$  可以通过以下公式计算得到:

$$D_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij}^{[k]} z^2 dz, \tag{29}$$

其中,  $i, j = 1, 2, 6$ ,  $\bar{Q}_{ij}^{[k]}$  为第  $k$  层铺层的偏轴折减刚度矩阵系数, 与正轴折减刚度矩阵系数  $Q_{ij}$  的转换关系为

$$\begin{Bmatrix} \bar{Q}_{11} \\ \bar{Q}_{22} \\ \bar{Q}_{12} \\ \bar{Q}_{66} \\ \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{26} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^4 & n^4 & 2m^2n^2 & 4m^2n^2 \\ n^4 & m^4 & 2m^2n^2 & 4m^2n^2 \\ m^2n^2 & m^2n^2 & m^4 + n^4 & -4m^2n^2 \\ m^2n^2 & m^2n^2 & -2m^2n^2 & (m^2 - n^2)^2 \\ m^3n & -mn^3 & mn^3 - m^3n & 2(mn^3 - m^3n) \\ mn^3 & -m^3n & m^3n - mn^3 & 2(m^3n - mn^3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{11} \\ Q_{22} \\ Q_{12} \\ Q_{66} \end{Bmatrix}, \tag{30}$$

其中,  $m = \sin \theta, n = \cos \theta, \theta$  为坐标轴  $x$  至材料主方向 1 轴的角度, 以逆时针方向为正.

正轴折减刚度矩阵系数可以通过材料工程弹性常数表示:

$$Q_{11} = \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, Q_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, Q_{66} = G_{12}, \tag{31}$$

其中,  $G_{12}$  是面内剪切模量,  $E_{11}, E_{22}$  是材料主轴方向的弹性模量,  $\nu_{12}, \nu_{21}$  为 Poisson 比, 且  $\nu_{12} = \nu_{21}E_{11}/E_{22}$ .

### 1.3 屈曲分析算例

以正交各向异性单层方板为例, 对采用微分求积法分析屈曲问题的收敛性以及准确性进行确认. 单层板属性  $D_{22} = 4D_{11}, D_{66} = 0.85D_{11}, D_{12} = 0.3D_{11}$ . 单层板长宽  $a = b = 100 \text{ mm}$ . 首先, 以固支和简支边界下正交各向异性单层板在单轴压载荷下的屈曲结果为例, 对微分求积法开展收敛性分析, 令单层板单边离散点数为  $N$ . 表 2 展示了当  $N$  取不同值时, 单层板分别在固支、简支边界下的屈曲结果, 均采用式(32)进行无量纲化处理:

$$\bar{N}_{cr} = \frac{N_{cr} a^2}{D_{11} \pi^2}, \tag{32}$$

其中,  $N_{cr}$  为屈曲载荷. 图 1 展示了求解结果的收敛趋势, 将不同离散点下的求解结果进行归一化处理. 可见, 当离散点数  $N$  取 20 时, 求解结果均可收敛至五位有效数字. 本文在后续使用微分求积法求解复合材料壁板屈曲问题时均将离散点数  $N$  取 20, 在保证求解精度的同时提高计算效率.

表 2 正交各向异性单层板无量纲屈曲载荷  $\bar{N}_{cr}$  的收敛性分析

Table 2 Dimensionless buckling loads on the orthotropic single-layer plate

N	dimensionless buckling load $\bar{N}_{cr}$	
	clamped boundary	simply supported boundary
5	11.175	4.479 2
6	12.321	4.498 9
7	12.428	4.500 0
8	12.487	4.500 0
9	12.403	4.500 0
10	12.448	4.500 0
20	12.449	4.500 0
50	12.449	4.500 0

定义  $[0, 1]$  范围内的无量纲系数  $R$ , 用于描述弹性边界刚度系数与板弯曲刚度的关系<sup>[26]</sup>,  $\eta = N_y/N_x$ , 板的弹性边界刚度系数可以通过式(33)、(34)得到. 接下来通过微分求积法求解双轴压缩工况下基于弹性边界的正交各向异性单层板的屈曲载荷, 并与文献[27]中采用积分变换法求解的结果进行对比, 屈曲载荷结果均采用式(32)进行无量纲化处理, 结果如表 3 所示.

$$k_x = \frac{3D_{11}R}{a(1-R)}, \quad (33)$$

$$k_y = \frac{3D_{22}R}{b(1-R)}. \quad (34)$$

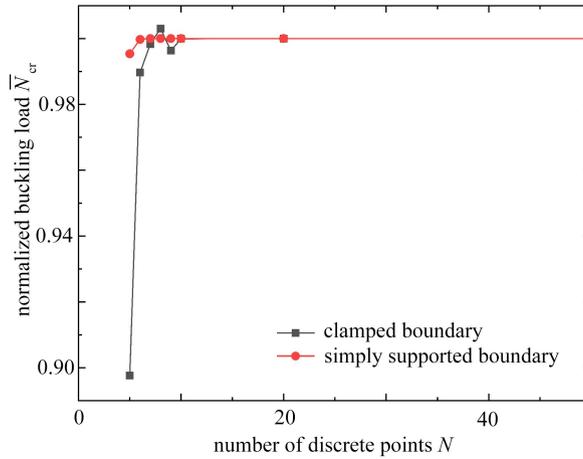


图1 微分求积法的收敛性分析

Fig. 1 Convergence study of the differential quadrature method

表3 弹性边界下正交各向异性单层板的无量纲屈曲载荷  $\bar{N}_{cr}$ Table 3 Dimensionless buckling loads  $\bar{N}_{cr}$  on the orthotropic single-layer plate under elastic boundaries

$\eta$	$R$	ref. [27]	present
0.5	0.1	6.436 1	6.436 1
	0.3	7.537 4	7.537 4
	0.5	9.073 5	9.073 5
	0.7	11.147	11.147
1	0.1	4.827 1	4.827 1
	0.3	5.654 8	5.654 8
	0.5	6.820 4	6.820 4
	0.7	8.511 6	8.511 6
2	0.1	3.218 1	3.218 1
	0.3	3.769 9	3.769 9
	0.5	4.548 4	4.548 4
	0.7	5.688 3	5.688 3

本文也采用微分求积法求解了弹性边界下复合材料层合板的屈曲载荷。层合板长  $a = 500$  mm, 宽  $b = 200$  mm, 采用碳/环氧复合材料 T300/976<sup>[28]</sup>, 其材料属性参数如表4所示, 铺层顺序为  $[90^\circ/0^\circ/45^\circ/-45^\circ]_s$ , 单层板厚度为 0.25 mm。

表4 T300/976的材料参数

Table 4 Material parameters of T300/976

material parameter	$E_{11}$ /MPa	$E_{22}$ /MPa	$G_{12}$ /MPa	$G_{13}$ /MPa	$G_{23}$ /MPa	$\nu_{12}$
value	156 500	13 000	6 960	6 960	3 450	0.23

设置弹性边界条件时令无量纲系数  $R$  在  $(0,1)$  范围内取值。当  $R$  为 1 时, 弹性边界退化为固支边界; 当  $R$  为 0 时, 弹性边界则退化为简支边界。复合材料层合板的弹性边界刚度系数  $k_x$  与  $k_y$  分别通过式(33)和式(34)得到。采用微分求积法分别求解弹性边界下复合材料层合板在单轴压、双轴压工况下屈曲载荷, 通过式(32)进行无量纲化。由于没有可供对比的文献结果, 将计算结果与有限元结果对比, 如表5与表6所示。

表 5 单轴压工况下复合材料层合板的无量纲屈曲载荷  $\bar{N}_{cr}$ Table 5 Dimensionless buckling loads  $\bar{N}_{cr}$  on composite laminates under uniaxial compression

$R$	$\bar{N}_{cr}$		error $\varepsilon / \%$
	FEM	present	
0.000 01	22.110	22.288	0.80
0.1	22.802	22.987	0.81
0.2	23.599	23.792	0.82
0.3	24.530	24.729	0.81
0.4	25.632	25.836	0.79
0.5	26.964	27.170	0.76
0.6	28.616	28.821	0.72
0.7	30.756	30.959	0.66
0.8	33.743	33.945	0.60
0.9	38.428	38.645	0.56
0.999 99	47.122	47.422	0.64

表 6 双轴压工况下复合材料层合板的无量纲屈曲载荷  $\bar{N}_{cr}$ Table 6 Dimensionless buckling loads  $\bar{N}_{cr}$  on composite laminates under biaxial compression

$R$	$\bar{N}_{cr}$		error $\varepsilon / \%$
	FEM	present	
0.000 01	9.942 7	9.970 2	0.28
0.1	10.457	10.491	0.33
0.2	11.071	11.113	0.38
0.3	11.816	11.867	0.43
0.4	12.650	12.744	0.74
0.5	13.642	13.743	0.74
0.6	14.932	15.039	0.71
0.7	16.690	16.804	0.68
0.8	19.259	19.380	0.63
0.9	23.406	23.532	0.54
0.999 99	30.298	30.423	0.41

由表 3 可知,微分求积法所得正交各向异性单层板屈曲计算结果与文献中采用积分变换法计算的结果高度吻合;由表 5 以及表 6 可知,微分求积法求解的层合板屈曲结果与有限元结果吻合良好,最大误差不超过 1%,证明了微分求积法求解复合材料壁板屈曲问题的准确性。

## 2 弹性边界刚度系数的计算方法

如前所述,当对实际多墙式盒段结构中单个壁板开展屈曲分析时,其边界条件是处于固支和简支之间的一种复杂的弹性边界,如图 2 所示.实际工程应用中,无量纲系数  $R$  难以确定,使得弹性边界刚度系数的计算缺乏有效的方法,严重制约了相关问题的求解。

### 2.1 弹性边界刚度系数的计算流程

首先通过算例明确弹性边界与固支、简支边界的区别.以长 500 mm,宽 200 mm 的复合材料矩形层合板为例,采用碳/环氧复合材料 T300/976,其材料属性参数如表 4 所示,复合材料的铺层顺序为  $[90^\circ/0^\circ/45^\circ/-45^\circ]_s$ ,单层板厚度为 0.3 mm.设置单轴压工况,载荷沿矩形壁板短边分布,计算复合材料矩形壁板在固支、简支以及弹性边界下的屈曲载荷.设置弹性边界条件时令无量纲系数  $R$  分别取 0.3,0.4,0.5,0.6 和 0.7,复合材料矩形壁板的弹性边界刚度系数  $k_x$  与  $k_y$  分别通过式(33)和式(34)给出,屈曲载荷结果如表 7 所示。

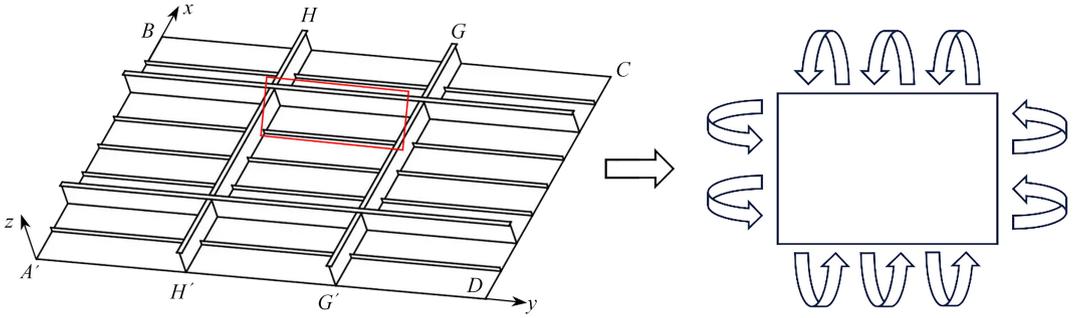


图2 弹性边界示意图

Fig. 2 Schematic of elastic boundaries

表7 不同边界下复合材料层合板的屈曲载荷

Table 7 Buckling loads on composite laminates under different boundary conditions

simply supported boundary $N_{cr}/N$	clamped boundary $N_{cr}/N$	elastic boundary $N_{cr}/N$				
		$R = 0.3$	$R = 0.4$	$R = 0.5$	$R = 0.6$	$R = 0.7$
61.42	130.68	71.96	76.88	82.85	89.91	96.12

图3给出了单轴压工况下复合材料矩形壁板在三种边界下的屈曲载荷,可见弹性边界下复合材料矩形壁板的失稳载荷处于固支与简支边界之间,而目前工程经验采用将边界简化为固支、简支的处理办法势必造成计算结果的误差较大.本文将弹性边界处理为简支加边界转角约束的形式,已知边界处转角  $\theta$  与弯矩  $M$ ,弹性边界刚度系数  $k$  由式(35)计算得到

$$k = \frac{M}{\theta} \tag{35}$$

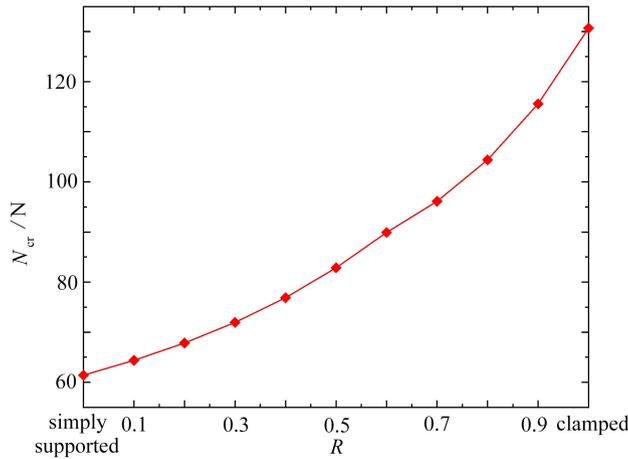


图3 复合材料层合板屈曲载荷与边界条件的关系

Fig. 3 Buckling loads on composite laminates vs. the boundary conditions

### 2.2 计算弹性边界刚度系数的单胞模型

对于较为复杂的支撑件,难以直接计算弹性边界刚度系数.因此,本文提出了一种计算弹性边界刚度系数的思路:首先建立用于计算弹性边界刚度系数的单胞模型,对单胞模型施加单位弯矩载荷以及边界条件,然后从有限元结果文件中提取中点转角,由式(35)计算即可得到复合材料壁板边界的弹性边界刚度系数.

在确定了计算弹性边界的基本思路后,如何建立可准确表征弹性边界刚度系数的单胞模型变得至关重要.在实际工程应用中,盒段结构中的复合材料壁板由长筋条和加强肋等支撑件支撑.在对单块复合材料壁板进行屈曲分析时,支撑件对单块矩形壁板区域的屈曲载荷影响显著.因此,建立单胞模型时需要充分考虑支撑件的影响.

如图4所示,本文提出了一种用于计算目标矩形壁板弹性边界刚度系数的单胞模型.其中,单胞长度、宽

度与目标壁板长、宽相同,高度与筋条高度相同,单胞模型腹板两侧加强肋延伸长度  $L$  根据式(36)计算得到

$$L = \max\left(\frac{L_1}{\max[(6d_1 - d_2), 5]}, 10\right), \tag{36}$$

其中,  $L_1$  为目标壁板待求边界对应边长度,  $d_1$  为壁板厚度,  $d_2$  为筋条厚度.式(36)通过求解大量盒段结构复合材料壁板的屈曲载荷并修正单胞模型所获得,适用于求解不同类型盒段结构复合材料壁板的弹性边界刚度系数.单胞模型中壁板材料属性以及尺寸与复合材料壁板相同,腹板、加强肋材料属性以及尺寸与筋条相同.当目标壁板以及支撑筋条确定后,用于计算弹性边界刚度系数的单胞模型唯一确定.

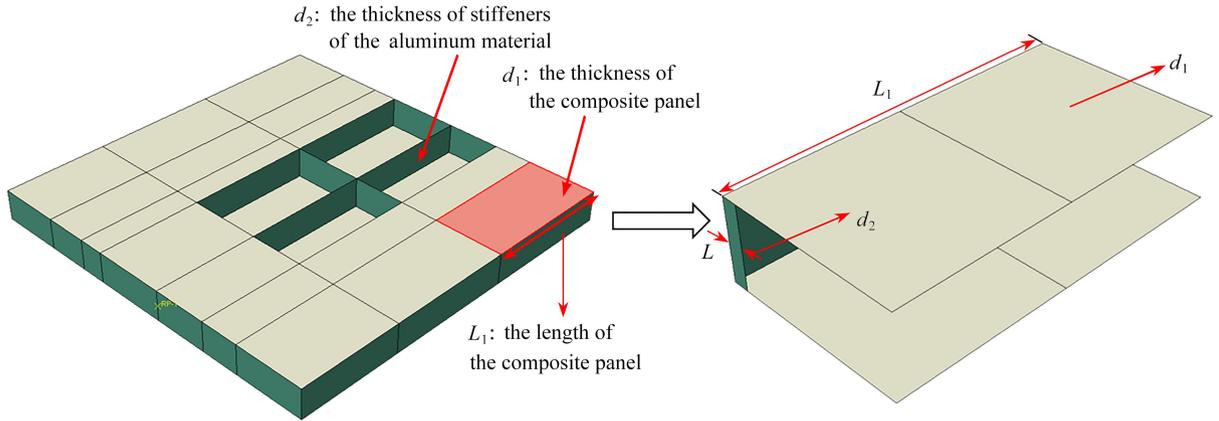


图 4 单胞模型

Fig. 4 The unit cell model

上述单胞模型与实际复合材料壁板边界构型类似.通过参数化建模建立用于求解不同边界的单胞模型;按照上文中介绍的弹性边界刚度系数计算思路,首先,对单胞模型施加弯矩以及边界条件,如图 5 所示;然后,提取单胞模型边界中点的转角;最后,通过式(35)计算得到目标复合材料壁板的弹性边界刚度系数.

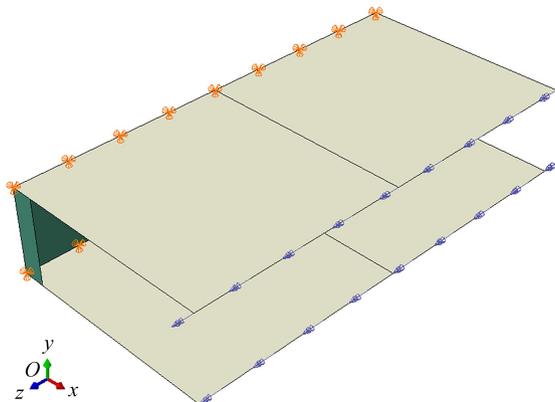


图 5 边界与弯矩载荷

Fig. 5 Boundaries and bending moment loads

### 3 复合材料壁板屈曲分析方法的验证

以上确定了弹性边界的计算方法以及单胞模型,接下来通过求解不同类型盒段结构复合材料壁板的屈曲载荷以验证本文屈曲分析方法的准确性.

验证前需要注意,盒段结构中复合材料壁板内部的应力分布是非均匀的,如果等效为均匀应力场计算将会造成较大误差.为了精准表征盒段结构中复合材料矩形壁板的应力分布,提高计算精度,需要通过有限元获得目标壁板的单元应变信息,包括单元的坐标以及单元的应变分量.仅通过单次较小计算量的静力分析即可为后续盒段结构中全部矩形壁板屈曲分析以及优化提供输入.在有限元中对目标壁板设置单元、节点集

合,设置静力分析步,通过 Python 脚本提取结果文件中的单元信息,包括单元坐标以及单元上下表面的应变.通过式(37)求解待求复合材料壁板的应力:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}, \quad (37)$$

其中,  $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \varepsilon_{xy}^0$  为中面应变,  $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$  为中面曲率、扭曲率.由于本文求解对象为对称层合板,拉伸与弯曲之间不存在耦合关系,所以刚度阵中  $B_{ij} = 0$ <sup>[29]</sup>.图6展示了复合材料层合板单层  $z$  坐标,拉伸刚度阵  $A$  可以通过式(38)计算得到

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^{[k]} (z_k - z_{k-1}), \quad (38)$$

其中,偏轴折减刚度矩阵系数可以通过式(30)以及式(31)计算得到.通过有限元计算可以获得单元信息,包括单元中心点三个方向坐标以及对应单元上下表面的应变,并根据式(37)计算对应单元应力.根据单元坐标以及计算得到的单元应力,可以通过函数拟合以达到准确表征不均匀应力场的目的.

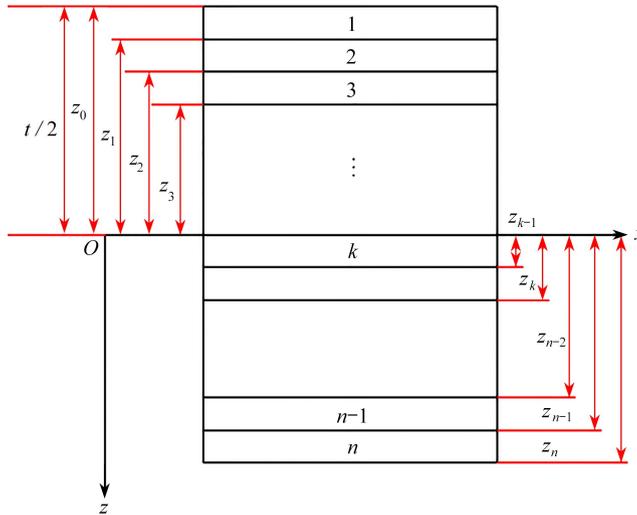


图6 层合板各单层  $z$  坐标

Fig. 6 Z-coordinates of each layer of the laminate

图7展示了验证本文屈曲分析方法的过程:首先,明确求解目标,多墙式盒段结构复合材料壁板被长筋条等支撑件分隔成多个部分,其中任一一部分可以等效为独立的含弹性边界的矩形壁板,此为本文的求解目标;接下来,针对单胞模型进行参数化建模,计算盒段结构中复合材料矩形壁板的弹性边界刚度系数;然后,从有限元结果文件中提取并计算目标壁板的单元信息,通过函数拟合的方式求得微分求积法中所选取离散节点的应力分量;最后,通过微分求积法求解控制方程获得目标复合材料矩形壁板的屈曲载荷.由于没有可供对比的文献结果,本文将不同工况下的计算结果与精细有限元结果进行对比,从而验证本文屈曲分析方法的准确性.

### 3.1 弯剪工况下的准确性验证

首先针对弯剪工况下的不同盒段结构开展屈曲分析.以图8(a)所示的复合材料盒段结构为例,下文简称为模型1,上下蒙皮被正交筋条分隔为多个矩形壁板,以单个复合材料矩形壁板作为分析对象;盒段结构长度为500 mm,宽度为500 mm,高度为100 mm,内部结构尺寸如图8(b)所示.盒段结构上下表面蒙皮均为碳/环氧复合材料 T300/976,复合材料壁板的铺层顺序为  $[0^\circ/90^\circ/-45^\circ/45^\circ]_s$ , 单层板厚度为0.25 mm;筋条为铝材料,厚度为2 mm,铝的弹性模量为  $E = 69$  GPa, Poisson 比为  $\nu_{12} = 0.33$ .单元类型为 S4R, 网格大小为5 mm.

施加载荷时,耦合整个加载面,并对耦合控制点施加  $y$  轴正方向的单位力,设置弯剪工况,边界条件设置

为固支边界,如图 9(a)所示.采用有限元对盒段结构开展屈曲分析,结果如图 9(b)所示.通过有限元获取盒段结构的第一阶屈曲特征值,作为微分求积法计算结果的对比基准.

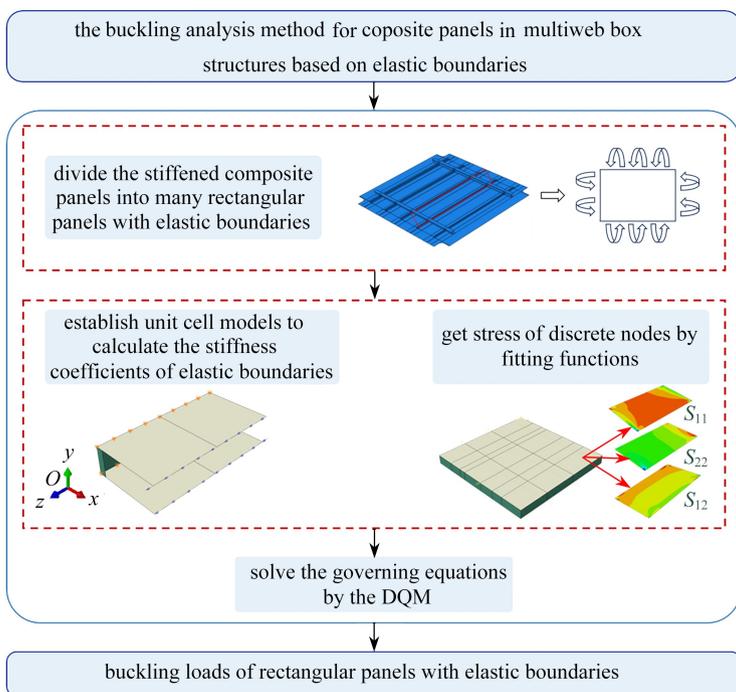


图 7 基于弹性边界的多墙式盒段结构复合材料壁板屈曲分析流程

Fig. 7 Process of buckling analysis on composite panels for multiweb box structures based on elastic boundaries

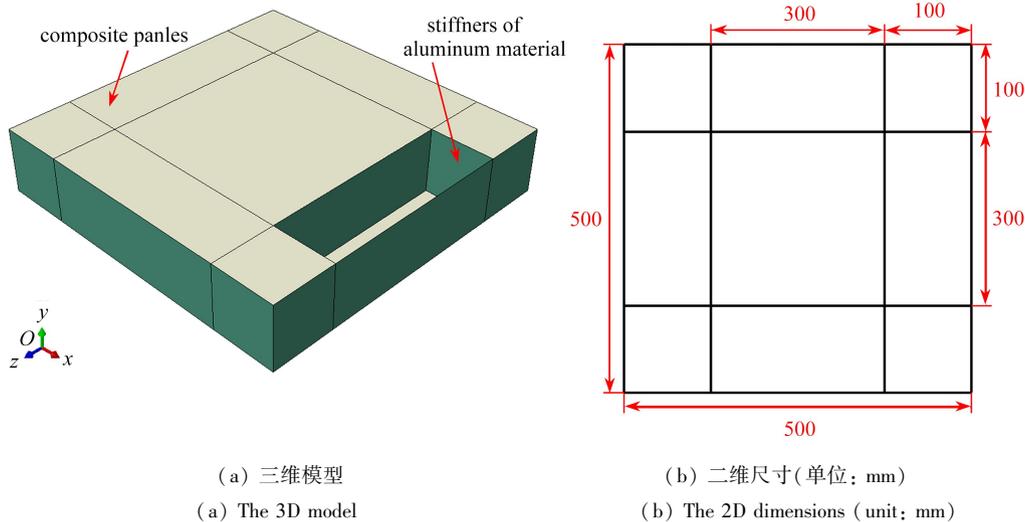


图 8 1 号盒段模型

Fig. 8 Box model 1

通过对复合材料盒段模型开展屈曲分析,确定发生屈曲的矩形壁板并作为待求解目标.首先,通过单胞模型计算目标壁板的弹性边界刚度系数,作为求解程序的输入条件之一.根据盒段结构组成部件的尺寸参数可以确定单胞模型,由于 1 号盒段结构为对称结构,因此只需计算相邻两个边界的弹性边界刚度系数.图 10 展示了用来求解复合材料矩形壁板弹性边界刚度系数的单胞模型,可以求得  $k_x = 3\ 261\ \text{N} \cdot \text{rad}^{-1}$ ,  $k_y = 2\ 084\ \text{N} \cdot \text{rad}^{-1}$ .

求解得到目标壁板四个边界的弹性边界刚度系数之后,提取并计算静力结果文件中的单元应力,代入微分求积法中求解得到弹性边界下目标矩形壁板的屈曲载荷,以及通过微分求积法求解固支、简支边界条件下目标矩形壁板的屈曲载荷,由于没有可供对比的文献结果,将微分求积法计算得到的弹性边界、固支以及简支边界条件下目标矩形壁板的屈曲载荷与精细有限元计算结果进行对比,结果如表 8 所示.

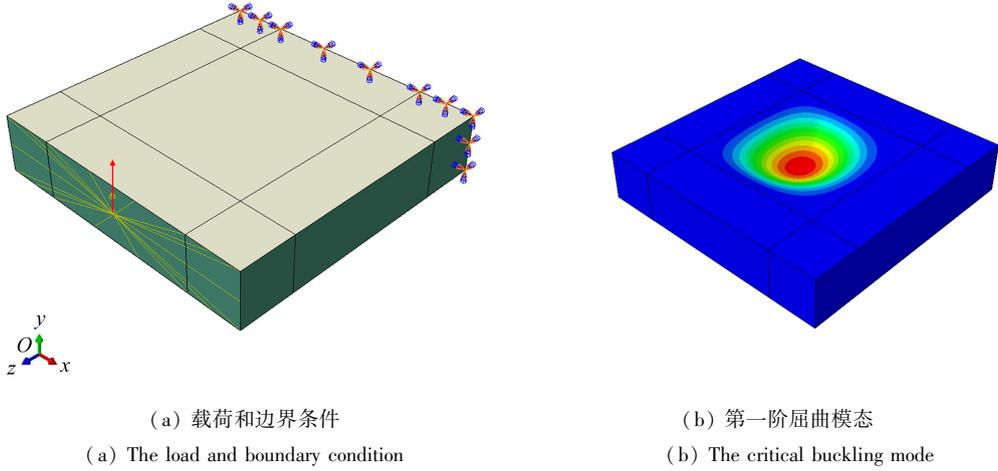


图9 1号盒段模型

Fig. 9 Box model 1

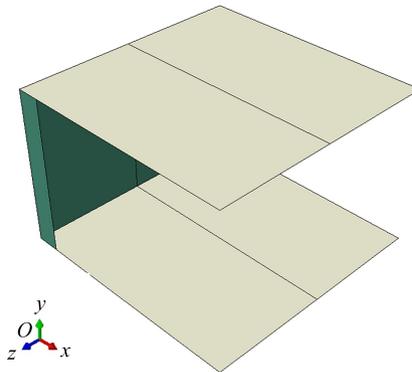


图10 求解矩形壁板弹性边界刚度系数的单胞模型

Fig. 10 The unit cell model for calculating the stiffness coefficients of elastic boundaries of the rectangular panel

表8 不同边界下模型1壁板的屈曲载荷

Table 8 Buckling loads on the panel in box model 1 under different boundary conditions

	FEM	boundary conditions		
		simply supported boundary	clamped boundary	elastic boundary
the buckling load $N_{cr} / N$	8 763	3 261	11 776	8 723
error $\varepsilon / \%$	-	-62.79	34.38	-0.46

改变盒段结构的尺寸,下文简称为模型2,如图11(a)所示,盒段结构长度为1 200 mm,宽度为600 mm,高度为200 mm,内部结构尺寸如图11(b)所示.其中盒段结构上下表面蒙皮均为复合材料,复合材料属性和铺层顺序与模型1相同,筋条为铝材料,筋条厚度为2 mm.网格类型为S4R,网格大小为5 mm.

模型2求解过程与模型1相同,将微分求积法计算得到的弹性边界、固支以及简支边界条件下目标矩形壁板的屈曲载荷与精细有限元计算结果进行对比,结果如表9所示.

表9 不同边界下模型2壁板的屈曲载荷

Table 9 Buckling loads on the panel in box model 2 under different boundary conditions

	FEM	boundary conditions		
		simply supported boundary	clamped boundary	elastic boundary
the buckling load $N_{cr} / N$	3 854	1 975	4 685	3 950
error $\varepsilon / \%$	-	-48.75	21.55	2.50

改变盒段结构的尺寸,下文简称为模型3,如图12(a)所示,盒段结构长度为2 000 mm,宽度为700 mm,高度为200 mm,内部结构尺寸如图12(b)所示.其中盒段结构上下表面蒙皮均为复合材料,复合材料属性和

铺层顺序与模型 1 相同,筋条材料为铝,筋条厚度为 2 mm。单元类型为 S4R,网格大小为 6 mm。

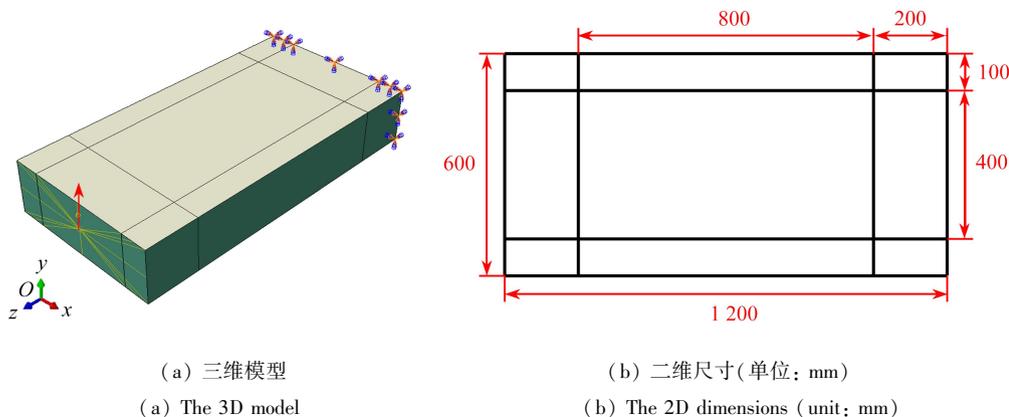


图 11 2 号盒段模型

Fig. 11 Box model 2

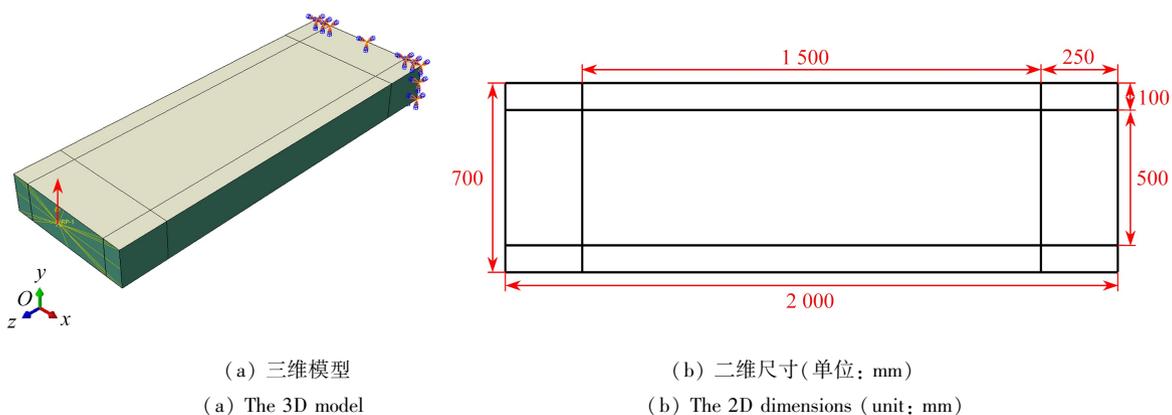


图 12 3 号盒段模型

Fig. 12 Box model 3

模型 3 求解过程与模型 1 相同,将微分求积法计算得到的弹性边界、固支以及简支边界条件下目标矩形壁板的屈曲载荷与精细有限元计算结果进行对比,结果如表 10 所示。

表 10 不同边界下模型 3 壁板的屈曲载荷

Table 10 Buckling loads on the panel in box model 3 under different boundary conditions

	FEM	boundary condition		
		simply supported boundary	clamped boundary	elastic boundary
the buckling load $N_{cr} / N$	1 477	740	1 724	1 492
error $\varepsilon / \%$	-	-49.87	16.70	1.03

改变盒段结构的尺寸,下文简称为模型 4,如图 13(a)所示,盒段结构长度为 2 500 mm,宽度为 2 500 mm,高度为 200 mm,内部结构尺寸如图 13(b)所示,其中盒段结构上下表面蒙皮均为复合材料,复合材料属性和铺层顺序与模型 1 相同,筋条为铝材料,筋条厚度为 2 mm。单元类型为 S4R,网格大小为 8 mm。

模型 4 求解过程与模型 1 相同,将微分求积法计算得到的弹性边界、固支以及简支边界条件下目标矩形壁板的屈曲载荷与精细有限元计算结果进行对比,结果如表 11 所示。

表 11 不同边界下模型 4 壁板的屈曲载荷

Table 11 Buckling loads on the panel in box model 4 under different boundary conditions

	FEM	boundary condition		
		simply supported boundary	clamped boundary	elastic boundary
the buckling load $N_{cr} / N$	2 663	1 160	3 203	2 764
error $\varepsilon / \%$	-	-56.43	20.28	3.82

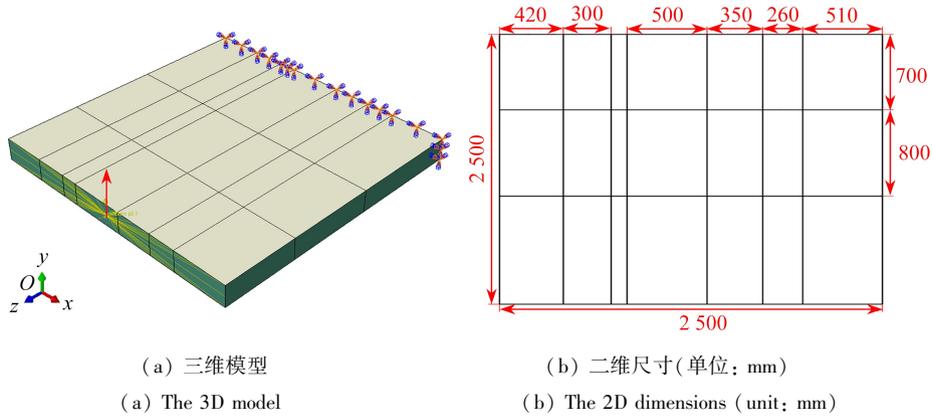


图 13 4号盒段模型

Fig. 13 Box model 4

弯剪工况下四种类型盒段结构的复合材料壁板在不同边界下的屈曲载荷与有限元结果的对比误差图如图 14 所示.从结果可以看出,将复合材料壁板边界当作弹性边界处理,求解得到的屈曲载荷结果与精细有限元结果吻合良好,而将实际边界当作固支或简支处理会造成较大误差.

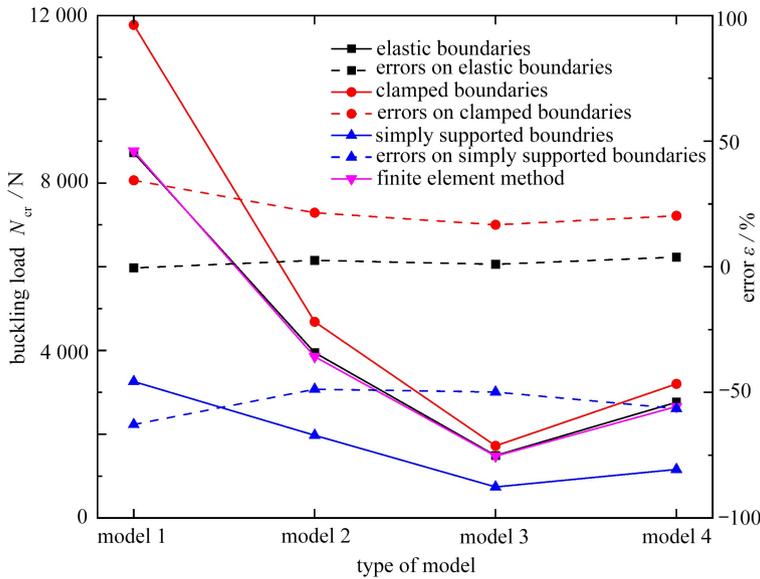


图 14 弯剪工况下四种类型盒段结构复合材料壁板在不同边界条件下的屈曲载荷

Fig. 14 Buckling loads on composite panels in 4 types of box structures with different boundary conditions under bending and shearing

### 3.2 单轴压工况下的准确性验证

为了进一步验证本文屈曲分析方法的准确性,针对上文四个盒段结构复合材料壁板开展轴压工况下的屈曲分析.复合材料盒段结构的单轴压工况设置如图 15 所示,耦合整个加载面到控制点,施加控制点  $z$  轴负方向的单位载荷,边界设置固支边界.

单轴压工况下盒段结构复合材料壁板求解过程与弯剪工况相同,采用本文求解方法分别求解单轴压工况下四种不同尺寸盒段结构复合材料矩形壁板在弹性边界、固支以及简支边界条件下的屈曲载荷,并与有限元结果进行对比,结果如表 12 所示.

单轴压工况下四种类型盒段结构的复合材料壁板在不同边界下的屈曲载荷与有限元结果的对比误差图如图 16 所示.从结果可以看出,将复合材料壁板边界当作弹性边界处理,计算得到的屈曲载荷与精细有限元结果吻合良好,而将实际边界当作固支或简支处理误差较大.证明了计算弹性边界的必要性,同时也验证了本文屈曲分析方法的准确性.

表 12 单轴压工况下四种盒段模型中矩形壁板在不同边界下的屈曲载荷

Table 12 Buckling loads on rectangular panels in 4 box models with different boundary conditions under uniaxial compression

box models	FEM $N_{cr} / N$	elastic boundary		simply supported boundary		clamped boundary	
		$N_{cr} / N$	error $\varepsilon / \%$	boundary $N_{cr} / N$	error $\varepsilon / \%$	$N_{cr} / N$	error $\varepsilon / \%$
model 1	55 545	51 690	-6.94	21 166	-61.89	67 471	21.47
model 2	36 460	35 986	-1.30	17 994	-50.65	42 783	17.34
model 3	24 664	24 396	-1.09	12 929	-47.58	27 861	12.96
model 4	64 470	69 312	7.51	34 543	-46.42	81 996	27.18

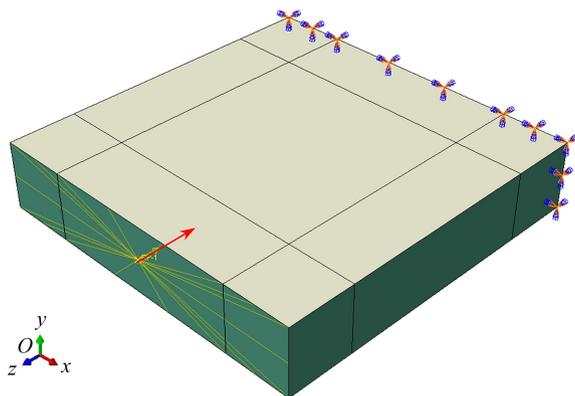


图 15 单轴压工况

Fig. 15 The uniaxial compression condition

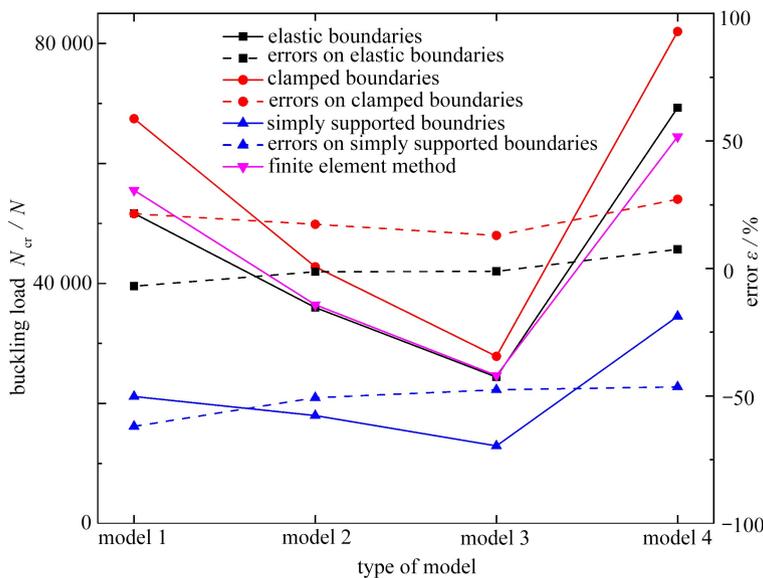


图 16 单轴压工况下四种盒段结构复合材料壁板在不同边界条件下的屈曲载荷

Fig. 16 Buckling loads on composite panels in 4 box structures with different boundary conditions under uniaxial compression

## 4 结 论

本文针对多墙式盒段结构中复合材料壁板快速屈曲分析需求,将其等效为独立的含弹性边界的矩形壁板,基于微分求积法发展了一种考虑弹性边界以及不均匀应力分布的矩形壁板屈曲问题快速求解方法.首先对微分求积法开展了收敛性以及准确性分析,结果表明,微分求积法可准确求解考虑弹性边界的复合材料壁板屈曲问题.此外,本文提出了一种弹性边界的计算方法,即通过建立单胞模型快速计算矩形壁板的弹性边界刚度系数.然后分别基于微分求积法以及有限元计算了多种盒段结构中复合材料矩形壁板的屈曲载荷,发

现简化为弹性边界壁板的屈曲结果与精细有限元结果吻合良好,误差均在10%以内,满足工程应用要求。相较于简化为固支或简支边界的传统方法,本文方法所得结果误差显著降低,证明了引入弹性边界的必要性,同时验证了本文屈曲分析方法的准确性。本文方法计算效率高,有望为复杂盒段结构的高效分析和快速优化设计提供一种有价值的理论工具。

## 参考文献(References):

- [1] 党乐, 郑洁, 杜凯, 等. 复合材料多墙盒段弯扭耦合下的屈曲和后屈曲[J]. 力学季刊, 2022, **43**(2): 271-280. (DANG Le, ZHENG Jie, DU Kai, et al. Buckling and post buckling of composite multi-wall box section under bending-torsion coupled loads[J]. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2022, **43**(2): 271-280. (in Chinese))
- [2] 钱伟长. 奇异摄动理论及其在力学中的应用[M]. 北京: 科学出版社, 1981. (CHIEN Weizang. *Singular Perturbation Theory and Its Applications in Mechanics*[M]. Beijing: Science Press, 1981. (in Chinese))
- [3] STEEN E. Application of the perturbation method to plate buckling problems[R]. 1998.
- [4] 付为刚, 廖喆, 熊焕杰, 等. 含对边自由边界矩形板屈曲失稳的有限差分法求解[J]. 陕西科技大学学报, 2022, **40**(4): 134-141. (FU Weigang, LIAO Zhe, XIONG Huanjie, et al. Finite difference method for the solution of buckling instability for rectangular plates with opposite free boundary edges[J]. *Journal of Shaanxi University of Science & Technology*, 2022, **40**(4): 134-141. (in Chinese))
- [5] ALTINTAŞ G, BAGCI M. Determination of the steady-state response of viscoelastically supported rectangular orthotropic mass loaded plates by an energy-based finite difference method[J]. *Journal of Vibration and Control*, 2005, **11**(12): 1535-1552.
- [6] NAJARZADEH L, MOVAHEDIAN B, AZHARI M. Free vibration and buckling analysis of thin plates subjected to high gradients stresses using the combination of finite strip and boundary element methods[J]. *Thin-Walled Structures*, 2018, **123**: 36-47.
- [7] HEUER R, IRSCHIK H. A boundary element method for eigenvalue problems of polygonal membranes and plates[J]. *Acta Mechanica*, 1987, **66**(1/4): 9-20.
- [8] RODRIGUES J D, ROQUE C M C, FERREIRA A J M. An improved meshless method for the static and vibration analysis of plates[J]. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 2013, **41**(1): 21-39.
- [9] HOSSEINI S, RAHIMI G, ANANI Y. A meshless collocation method based on radial basis functions for free and forced vibration analysis of functionally graded plates using FSDT[J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2021, **125**: 168-177.
- [10] 王伟, 姚林泉, 伊士超. 分析复合材料层合板弯曲和振动的一种有效无网格方法[J]. 应用数学和力学, 2015, **36**(12): 1274-1284. (WANG Wei, YAO Linquan, YIN Shichao. An effective meshfree method for bending and vibration analyses of laminated composite plates[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(12): 1274-1284. (in Chinese))
- [11] 彭林欣, 张鉴飞, 陈卫. 基于3D连续壳理论和无网格法的任意壳受迫振动分析[J]. 固体力学学报, 2024, **45**(2): 238-252. (PENG Linxin, ZHANG Jianfei, CHEN Wei. Forced vibration analysis of arbitrary shells based on 3D continuous shell theory and meshless method[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2024, **45**(2): 238-252. (in Chinese))
- [12] ZAMANIFAR H, SARRAMI-FOROUSANI S, AZHARI M. Static and dynamic analysis of corrugated-core sandwich plates using finite strip method[J]. *Engineering Structures*, 2019, **183**: 30-51.
- [13] SHEIKH H A, MUSHOPADYAY M. Forced vibration of plates with elastically restrained edges by the spline finite strip method[J]. *JSME International Journal (Series C): Dynamics Control Robotics Design and Manufacturing*, 1993, **36**(3): 301-306.
- [14] YUAN W, DAWE D J. Free vibration and stability analysis of stiffened sandwich plates[J]. *Composite Structures*, 2004, **63**(1): 123-137.
- [15] BATHE K J. *Finite Element Method*[M]. Wiley, 2008: 1-12.
- [16] WANG X, HUANG J. Elastoplastic buckling analyses of rectangular plates under biaxial loadings by the differential quadrature method[J]. *Thin-Walled Structures*, 2009, **47**(1): 14-20.

- [17] LI P, YING W. Differential quadrature method for vibration analysis of prestressed beams[J]. *E3S Web of Conferences*, 2021, **237**: 03029.
- [18] UDAYAKUMAR B, GOPAL N. Analysis of layered panels with mixed edge boundary conditions using state space differential quadrature method[J]. *Composite Structures*, 2021, **274**: 114355.
- [19] MOHAMMADIMEHR M, MEHDI M, AFSHARI B, et al. Bending, buckling and vibration analyses of MSGT microcomposite circular-annular sandwich plate under hydro-thermo-magneto-mechanical loadings using DQM [J]. *International Journal of Smart and Nano Materials*, 2018, **9**(4): 233-260.
- [20] 陈明飞, 刘坤鹏, 靳国永, 等. 面内功能梯度三角形板等几何面内振动分析[J]. 应用数学和力学, 2020, **41**(2): 156-170. (CHEN Mingfei, LIU Kunpeng, JIN Guoyong, et al. Isogeometric in-plane vibration analysis of functionally graded triangular plates[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, **41**(2): 156-170. (in Chinese))
- [21] LAURA P A A, DURAN R. A note on forced vibrations of a clamped rectangular plate[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1975, **42**(1): 129-135.
- [22] BELLMAN R, CASTI J. Differential quadrature and long-term integration[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1971, **34**(2): 235-238.
- [23] 王永亮. 微分求积法和微分求积单元法: 原理与应用[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2002. (WANG Yongliang. Differential quadrature method and differential quadrature element method; theory and application[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2002. (in Chinese))
- [24] 张太莲. 微分求积法在一类时间分数阶微分方程中的应用[D]. 广州: 华南理工大学, 2015. (ZHANG Tailian. The application and generalization of a differential quadrature algorithm for time-fractional telegraph equation [D]. Guangzhou: South China University of Technology, 2015. (in Chinese))
- [25] REDDY J N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells*[M]. Boca Raton: CRC Press, 2004.
- [26] ZHANG S, XU L. Bending of rectangular orthotropic thin plates with rotationally restrained edges; a finite integral transform solution[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2017, **46**: 48-62.
- [27] ZHANG J, ZHAO Q, ULLAH S, et al. An accurate computational method for buckling of orthotropic composite plate with non-classical boundary restraints[J]. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2023, **23**(7): 2350080.
- [28] 鹿澳洋. 基于 Puck 准则的航空用复合材料失效分析及实验研究[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2019. (LU Aofeng. The failure analysis and experimental research of aviation composites based on Puck criterion[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2019. (in Chinese))
- [29] 沈观林, 胡更开, 刘彬. 复合材料力学[M]. 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2013. (SHEN Guanlin, HU Gengkai, LIU Bin. *Mechanics of Composite Materials*[M]. 2nd ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2013. (in Chinese))