

基于对流粒子域插值物质点法的壳结构分析*

王长生^{1,2}, 于传泽¹, 张向奎³

- (1. 大连理工大学 机械工程学院, 辽宁 大连 116023;
2. 大连理工大学 宁波研究院, 浙江 宁波 315016;
3. 大连理工大学 控制科学与工程学院, 辽宁 大连 116023)

摘要: 物质点法(material point method, MPM)采用 Lagrange 质点和 Euler 网格双重描述, 适合处理大变形和接触问题. 该文基于对流粒子域插值物质点法(CPD12)框架分析了薄壳结构的大变形问题; 使用四边形网格来离散壳体结构, 通过物质点到壳单元节点再到背景网格节点的双重映射计算基函数, 在背景网格上求解动量方程, 基于 BT 壳单元理论更新物质点的内力. 数值算例将受大变形的壳结构与参考解进行了比较, 验证了该文方法的准确性.

关键词: 对流粒子域插值物质点法; BT 壳单元; 超弹性材料; 非线性大变形

中图分类号: O34 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.440286

Shell Structure Analysis Based on the Convected Particle Domain Interpolation

WANG Changsheng^{1,2}, YU Chuanze¹, ZHANG Xiangkui³

- (1. School of Mechanical Engineering, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116023, P.R.China;
2. Ningbo Institute, Dalian University of Technology, Ningbo, Zhejiang 315016, P.R.China;
3. School of Control Science and Engineering, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116023, P.R.China)

Abstract: The material point method (MPM) adopts the dual description of Lagrangian particles and Euler grids, so it can deal with large deformation and contact problems conveniently. The large deformation problem of thin shell structures was analyzed based on the framework of the convected particle domain interpolation material point method (CPDIMP). The quadrilateral mesh was used to discretize the shell structure. The basis function was calculated by the double mapping from the material point to the shell element node and then to the background grid node. The momentum equation was solved on the background grid, and the internal force of the material point was updated based on the Belytschko-Tsay (BT) shell element theory. In the numerical example, the comparison of large deformations of the shell structure with reference solutions verifies the accuracy of the proposed method.

* 收稿日期: 2023-09-20; 修订日期: 2024-01-15

基金项目: 国家重点研发计划(2021YFB3300603); 中央高校基本科研业务费(DUT22YG232)

作者简介: 王长生(1984—), 男, 副教授, 博士(E-mail: changsheng@dlut.edu.cn);

张向奎(1976—), 男, 教授, 博士(通讯作者. E-mail: zhangxk@dlut.edu.cn).

引用格式: 王长生, 于传泽, 张向奎. 基于对流粒子域插值物质点法的壳结构分析[J]. 应用数学和力学, 2024, 45(9): 1147-1156.

Key words: CPDIMPM; BT shell element; hyperelastic material; nonlinear large deformation

0 引 言

1994年, Sulsky等^[1]提出了物质点法(MPM). MPM是一种混合 Lagrange-Euler方法, 即将连续体离散为一组质点(Lagrange描述), 每个质点代表一块材料区域并携带该材料区域的所有物理信息, 如质量、速度、应力和应变等, 所有质点的集合代表整个连续体. 背景网格仅用于动量方程的求解和空间导数的计算, 不携带任何物理信息. 在每一个时间步中, 质点和背景网格完全固连, 将质点的运动量映射到背景网格从而在背景网格上求解运动方程, 求解后将背景网格节点的运动量映射回各质点, 从而得到质点在下一时刻的运动量, 在每一个时间步结束时抛弃变形后的背景网格, 在新的时间步中仍采用未变形的背景网格, 从而避免了 Lagrange法因网格畸变而产生的数值困难. MPM发挥了 Lagrange法和 Euler法各自的长处, 克服了其弱点, 在高速冲击、非 Newton流体、接触、流固耦合等涉及大变形和材料破坏的问题中具有明显的优势^[2].

标准 MPM 的 Euler 背景网格多使用 C^0 线性插值函数, Lagrange 粒子使用质点表示, 当物质点从当前背景网格穿过边界到另一个背景网格时会产生数值噪声. 为了解决该问题学者们做了很多努力, 并由此衍生出不同类型的 MPM. 一种解决方案是通过改变背景网格基函数的连续性来解决数值噪声问题. Steffen等^[3]提出 B 样条物质点法(BSMPM), 使用 B 样条基函数替代原来的线性 Lagrange 基函数, 增加形函数的连续性, 解决了标准 MPM 的数值噪声问题. 徐云卿等^[4]在 BSMPM 基础上引入人工状态方程, 精确模拟了溃坝流问题. Zhang等^[5]提出双域物质点法(DDMP), 该方法通过对形函数的导数进行修正, 解决了数值噪声的问题. Moutsanidis等^[6]提出了等几何物质点法(IGA-MPM), 使用 NURBS 基函数计算插值函数, 解决了数值噪声问题. 另一种解决方案是通过改变物质点的形函数, 使用物质点区域代替离散的物质点来解决数值噪声问题. 2004年, Bardenhagen等^[7]提出了广义插值物质点法(GIMP), 该方法使用特征函数描述 Lagrange 粒子, 从而对形函数进行了改进, 使得形函数在边界处具有 C^1 连续性, 消除了标准 MPM 的数值噪声. Sadeghirad等^[8]在 GIMP 的基础上, 提出对流粒子域插值物质点法(CPDI1), 使用两个向量表示物质点区域, 允许物质点区域剪切变形, 解决了 GIMP 难以处理平行四边形物质点区域的问题. 随后 Sadeghirad等^[9]基于线性 Lagrange 基函数提出了改进的对流粒子域插值物质点法(CPDI2), 该方法允许物质点任意变形, 消除了 CPDI1 方法中因物质点变形, 物质区域有缝隙的问题, 因此 CPDI2 可以完整地描述连续体区域, 适合于求解拉伸、剪切和旋转等大变形问题, 而且可以避免数值断裂^[10]. Wang等^[11]提出了广义区域物质点法(generalized particle domain method, GPDM), 该方法直接基于 CAD 数据生成物质点, 将连续体中每个 NURBS 单元看成物质点区域, 可以省略生成物质点的前处理过程, 也可以跟等几何分析结合处理大变形问题.

虽然 MPM 发展迅速, 却鲜有学者基于 MPM 做壳结构大变形分析^[12]. Kang等^[13]基于 CPDI2 方法提出了一种梁单元的建模方法, 用于解决涉及极大变形和旋转的梁结构问题. 然而 MPM 和壳结构耦合的工作遇到了严重的数值困难. 壳理论本质是采用数学上的二维构型模型去描述一个三维空间中的薄壁结构^[14]. 在 MPM 相关的研究中, 计算机图形学领域的 Jiang等^[15]基于标准 MPM, 通过给模型设置一个连贯的表面或曲线网格, 而不是非结构化的颗粒, 实现了毛发和布料的各向异性弹塑性摩擦接触. 随后, Guo等^[16]在此基础上, 将连贯的表面网格与 Kirchhoff-Love 运动学理论结合, 提出了具有摩擦接触的薄壳 MPM; 在力学领域, Wu等^[17]提出壳-物质点耦合算法来分析鸟撞问题, 使用物质点模拟鸟体模型, 使用壳单元模拟飞机壳体结构. De Vaucorbeil等^[18]基于 MPM 模拟了两个空心圆柱壳的大变形碰撞, Ni等^[19]也基于 MPM 研究了爆炸载荷作用下圆柱壳的破碎过程, 都取得了很好的模拟结果. Li等^[20]在 MPM 中引入实体壳公式, 提出了一种新的实体壳材料点法(SSMPM), 该方法采用六面体粒子域的壳粒子来描述壳结构的材料域, 精确地模拟了壳结构的大变形问题.

本文基于 CPDI2 框架, 提出了一种可以分析薄壳结构弹塑性大变形的办法, 将每一个壳单元看作一个物质点区域, 通过物质点到壳单元节点再到背景网格节点的双重映射计算基函数, 在背景网格上求解动量方程, 更新物质点区域节点位置, 在物质点区域内基于 BT 壳理论求解节点内力, 并结合接触算法用其计算方管压溃问题.

1 CPDI2

本节简要介绍 CPDI2 公式,其中下标“ p ”表示物质点,而下标“ I ”表示网格节点.一个 MPM 时间迭代步可以分成三步:① 将物质点所携带的物理信息映射到背景网格上;② 更新背景网格动量;③ 更新物质点位置、速度和应力,重置背景网格.

① 物质点到背景网格节点的映射

$$m_I^t = \sum_p \phi_I(\mathbf{x}_p^t) m_p, \quad (1)$$

$$(m\mathbf{v})_I^t = \sum_p \phi_I(\mathbf{x}_p^t) (m\mathbf{v})_p^t, \quad (2)$$

$$\mathbf{f}_I^{\text{ext},t} = \sum_p \phi_I(\mathbf{x}_p^t) m_p \mathbf{b}(\mathbf{x}_p), \quad (3)$$

$$\mathbf{f}_I^{\text{int},t} = - \sum_p V_p^t \boldsymbol{\sigma}_p^t \nabla \phi_I(\mathbf{x}_p^t), \quad (4)$$

其中, m, x, v, f^{ext} 和 f^{int} 分别为质量、坐标位置、速度、外力和内力; $\mathbf{b}(\mathbf{x}_p)$ 为物质点外力; V_p^t 和 $\boldsymbol{\sigma}_p^t$ 分别为物质点的体积和 Cauchy 应力, ϕ_I 为映射基函数, $\nabla \phi_I$ 为映射基函数梯度.

② 更新背景网格动量

$$\mathbf{f}_I^t = \mathbf{f}_I^{\text{ext},t} + \mathbf{f}_I^{\text{int},t}, \quad (5)$$

$$(m\mathbf{v})_I^{t+\Delta t} = (m\mathbf{v})_I^t + \mathbf{f}_I^t \Delta t, \quad (6)$$

$$(m\mathbf{v})_{I,\text{fix}}^{t+\Delta t} = \mathbf{0}, \mathbf{f}_{I,\text{fix}}^t = \mathbf{0}, \quad (7)$$

其中, \mathbf{f}_I 为背景网格节点合力,下标“fix”表示施加了边界条件的背景网格节点.

③ 更新物质点位置、速度和应力

$$\mathbf{v}_p^{t+\Delta t} = \mathbf{v}_p^t + \Delta t \sum_I \phi_I(\mathbf{x}_p^t) \mathbf{f}_I^t / m_I^t, \quad (8)$$

$$\mathbf{x}_p^{t+\Delta t} = \mathbf{x}_p^t + \Delta t \sum_I \phi_I(\mathbf{x}_p^t) (m\mathbf{v})_I^{t+\Delta t} / m_I^t. \quad (9)$$

计算速度梯度,更新变形梯度张量和物质点体积:

$$\mathbf{v}_I^{t+\Delta t} = (m\mathbf{v})_I^{t+\Delta t} / m_I^t, \quad (10)$$

$$\mathbf{L}_p^{t+\Delta t} = \sum_I \nabla \phi_I(\mathbf{x}_p^t) \mathbf{v}_I^{t+\Delta t}, \quad (11)$$

$$\mathbf{F}_p^{t+\Delta t} = (\mathbf{I} + \mathbf{L}_p^{t+\Delta t} \Delta t) \mathbf{F}_p^t, \quad (12)$$

$$\mathbf{V}_p^{t+\Delta t} = \det(\mathbf{F}_p^{t+\Delta t} \mathbf{V}_p^0). \quad (13)$$

更新物质点应力:

$$\boldsymbol{\sigma}_p^{t+\Delta t} = \boldsymbol{\sigma}_p^t + \Delta \boldsymbol{\sigma}_p. \quad (14)$$

CPDI2 使用无间隙的物质点区域代替离散的物质点,映射基函数 ϕ_I 和映射基函数梯度 $\nabla \phi_I$ 由下式给出:

$$\begin{aligned} \phi_I = \frac{1}{36V_p} [& (4c_1 + 2c_2 + 2c_3 + c_4)N_I(\mathbf{x}_1) + (2c_1 + 4c_2 + c_3 + 2c_4)N_I(\mathbf{x}_2) + \\ & (c_1 + 2c_2 + 2c_3 + 4c_4)N_I(\mathbf{x}_3) + (2c_1 + c_2 + 4c_3 + 2c_4)N_I(\mathbf{x}_4)], \end{aligned} \quad (15)$$

$$\nabla \phi_I = \frac{1}{2V_p} \left\{ N_I(\mathbf{x}_1) \begin{bmatrix} y_{24} \\ x_{42} \end{bmatrix} + N_I(\mathbf{x}_2) \begin{bmatrix} y_{31} \\ x_{13} \end{bmatrix} + N_I(\mathbf{x}_3) \begin{bmatrix} y_{42} \\ x_{24} \end{bmatrix} + N_I(\mathbf{x}_4) \begin{bmatrix} y_{13} \\ x_{31} \end{bmatrix} \right\}, \quad (16)$$

其中 $c_1 = x_{21}y_{41} - y_{21}x_{41}$, $c_2 = x_{21}y_{32} - y_{21}x_{32}$, $c_3 = x_{34}y_{41} - y_{34}x_{41}$, $c_4 = x_{34}y_{32} - y_{34}x_{32}$, $x_{ij} = x_i - x_j$, $y_{ij} = y_i - y_j$, $V_p = 0.5[(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_4 - x_4y_3) + (x_4y_1 - x_1y_4)]$, N_I 为物质点区域节点与背景网格节点之间的映射函数, x_k 为物质点 p 区域的角点位置.

2 基于 CPDI2 的壳结构分析

CPDI2 通过背景网格节点速度求物质点区域速度梯度,利用速度梯度更新物质点区域应力.本文通过物质点区域角点位移更新物质点区域应力.因此在将物质点映射到背景网格的过程中,本文将 CPDI2 的一次映

射改为二次映射,即先将物质点所携带物理信息如质量、速度和外力映射到物质点区域节点上,用下标“ c ”代表物质点区域节点,再将物质点区域节点所携带的物理信息如质量、速度、内力和外力映射到背景网格节点上,如图1所示。

本文采用BT壳单元模型来更新物质点区域应力并求解物质点区域节点内力。

首先计算应力增量:

$$\Delta\sigma_p = DB\Delta q, \tag{17}$$

其中, D, B 和 Δq 分别为弹性矩阵、应变矩阵和节点位移。

然后更新物质点区域应力:

$$\sigma_p^{t+\Delta t} = \sigma_p^t + \Delta\sigma_p. \tag{18}$$

求解物质点区域节点内力时,首先在由物质点区域构建出的局部坐标系下求出等效节点内力和沙漏阻力,用上标“ $\hat{\cdot}$ ”表示局部坐标系下的物理量,然后根据坐标变换求出物质点区域节点内力^[21]。

在任意一个物质点区域内,由虚功原理可得物质点区域等效节点内力:

$$\hat{f}_c = [\hat{f}_{1c}, \hat{f}_{2c}, \hat{f}_{3c}, \hat{m}_{1c}, \hat{m}_{2c}, \hat{m}_{3c}]^T, \tag{19}$$

$$\hat{f} = \int_{V^p} \mathbf{B}^T \hat{\sigma} dV, \tag{20}$$

其中, $B, \hat{\sigma}$ 和 V^p 分别为变形率矩阵、Cauchy 应力和物质点区域体积。

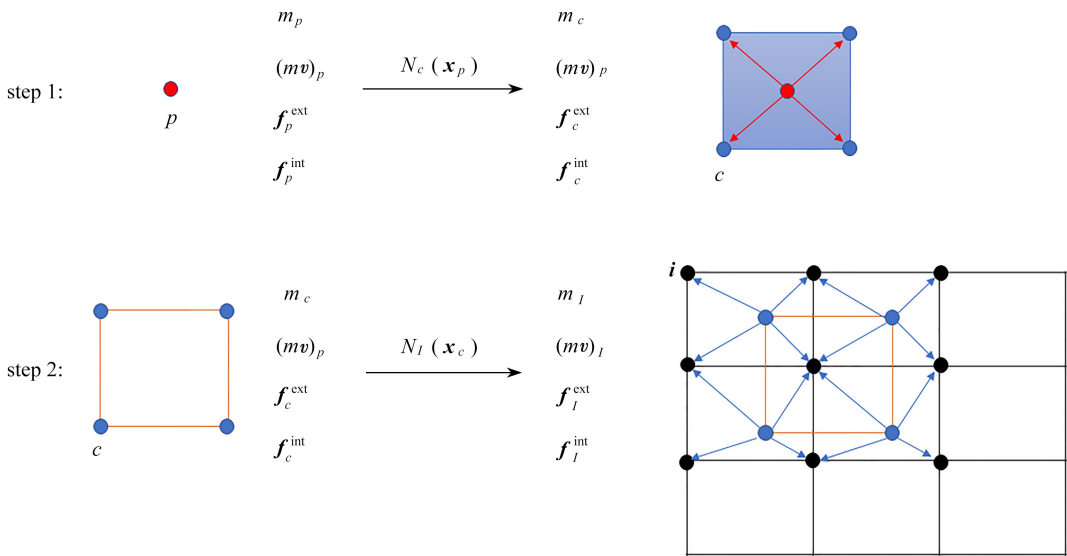


图1 物质点到背景网格的二次映射过程

Fig. 1 The 2-step mapping process from material points to background grids

在物质点区域内采用单点积分,可以将节点内力分量写成如下形式:

$$\hat{f}_{1c} = A^p (B_{1c} f'_{11} + B_{2c} f'_{12}), \tag{21}$$

$$\hat{f}_{2c} = A^p (B_{2c} f'_{22} + B_{1c} f'_{12}), \tag{22}$$

$$\hat{f}_{3c} = kA^p (B_{1c} f'_{13} + B_{2c} f'_{23}), \tag{23}$$

$$\hat{m}_{1c} = A^p \left(B_{2c} m'_{22} + B_{1c} m'_{12} - \frac{1}{4} k f'_{23} \right), \tag{24}$$

$$\hat{m}_{2c} = -A^p \left(B_{1c} m'_{11} + B_{2c} m'_{12} - \frac{1}{4} k f'_{13} \right), \tag{25}$$

$$\hat{m}_{3c} = 0, \tag{26}$$

其中, A^p, k 和 h 分别为等效壳单元面积、剪切因子和厚度, B_i, f'_{ij} 和 m'_{ij} 的公式如下:

$$\mathbf{B}_1^T = \frac{1}{2A^p} [\hat{y}_{24}, \hat{y}_{31}, \hat{y}_{42}, \hat{y}_{13}], \mathbf{B}_2^T = \frac{1}{2A^p} [\hat{x}_{42}, \hat{x}_{13}, \hat{x}_{24}, \hat{x}_{31}], \quad (27)$$

$$f'_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \hat{\sigma}_{ij} d\hat{z}_3, m'_{ij} = - \int_{-h/2}^{h/2} \hat{z}_3 \hat{\sigma}_{ij} d\hat{z}_3. \quad (28)$$

在厚度上采用 Lobatto 积分,取 3 个积分点,则上式可离散为

$$f'_{ij} = \frac{h}{2} \sum_{n=1}^3 \hat{\sigma}_{ij}(n) w(l), m'_{ij} = - \frac{h^2}{4} \sum_{n=1}^3 \hat{\sigma}_{ij}(n) w(l) \hat{z}_3(l), \quad (29)$$

其中, w 为积分点权值.

采用一阶减缩积分时会出现零能模式,即物质点区域内只有一个积分点,在受弯时该积分点没有任何的应变能,此时此单元没有任何刚度,就无法抵抗变形,而且刚体运动也不产生应变能,这种运动形式被称之为零能模式(沙漏).为了控制沙漏,定义由沙漏激励的阻力,而且该力在刚体运动时消失^[22-23]:

$$\hat{\mathbf{h}}_c = [\hat{h}_{1c}, \hat{h}_{2c}, \hat{h}_{3c}, \hat{h}_{4c}, \hat{h}_{5c}, \hat{h}_{6c}]^T, \quad (30)$$

$$\hat{h}_{1c} = \gamma_c \hat{v}_1 \gamma C_3 \Delta t, \quad (31)$$

$$\hat{h}_{2c} = \gamma_c \hat{v}_2 \gamma C_3 \Delta t, \quad (32)$$

$$\hat{h}_{3c} = \gamma_c \hat{v}_3 \gamma C_2 \Delta t, \quad (33)$$

$$\hat{h}_{4c} = \gamma_c \hat{\omega}_1 \gamma C_1 \Delta t, \quad (34)$$

$$\hat{h}_{5c} = \gamma_c \hat{\omega}_2 \gamma C_1 \Delta t, \quad (35)$$

$$\hat{h}_{6c} = 0, \quad (36)$$

其中, \hat{v}_i 为局部坐标系下物质点区域节点速度, γ 为沙漏形状基矢量^[24], C_j 为沙漏阻力系数^[21].

所以物质点区域节点的内力为

$$\mathbf{f}_c^{\text{int}} = \mathbf{T}_c (\hat{\mathbf{f}}_c + \hat{\mathbf{h}}_c), \mathbf{T}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix}, \quad (37)$$

其中 \mathbf{Q} 为坐标变换矩阵.

3 自适应时间步长

本文采用自适应时间步长,即时间步长不是固定的,而是根据物质点的速度进行调整^[12]:

$$\Delta t = \alpha \min \left(\frac{h_x}{c_x}, \frac{h_y}{c_y}, \frac{h_z}{c_z} \right), \quad (38)$$

其中 h_x, h_y, h_z 是背景网格单元尺寸, α 是时间步长系数,取值在 0~1 之间, c_i 的公式为

$$\mathbf{c} = (\max_p (c_{\text{dil}} + |v_{xp}|), \max_p (c_{\text{dil}} + |v_{yp}|), \max_p (c_{\text{dil}} + |v_{zp}|)), \quad (39)$$

其中 v_{xp} 是物质点 p 速度的 x 分量, c_{dil} 的公式为

$$c_{\text{dil}} = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3} G}{\rho}}, \quad (40)$$

其中 ρ, K 和 G 分别为物质点密度、体积模量和剪切模量.

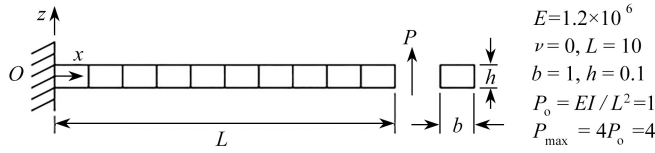
4 数值算例

本节选取 3 个算例来验证本文所提算法.第一个算例和第二个算例是标准的静力学算例,通过和解析解比较来验证本文算法.第三个算例为方管压溃,加入自接触算法模拟了高速冲击压溃问题.

4.1 悬臂板

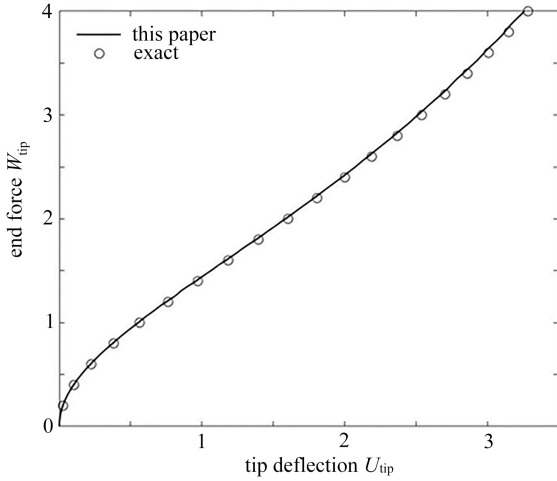
如图 2(a) 所示的超弹性材料悬臂结构,端部受到逐渐增大的均布载荷,此算例在 Sze 等^[25] 的文章中给出了包含 20 个采样点的解析解.将此悬臂结构划分成 10×1 个单元网格,每一个单元网格作为一个物质点区域,将最大载荷等分为 20 份逐步加载.解析解中给出了悬臂结构端点处 x 和 z 方向的位移,分别记为 U_{ip} 和

W_{tip} . 在逐渐加载的过程中,以 z 方向位移 W_{tip} 为判断载荷增大的条件,当载荷为 P_i 时,判断悬臂结构端点的位移 W_i 是否达到解析解中载荷为 P_i 时对应的 W_{tip} , 达到后则令 $P_{i+1} = P_i + \Delta P$, 直到 $P_i = P_{max}$ 且 $W_i = W_{tip}$, 算法结束.图 2(c) 给出了悬臂板在不同载荷下的变形几何.



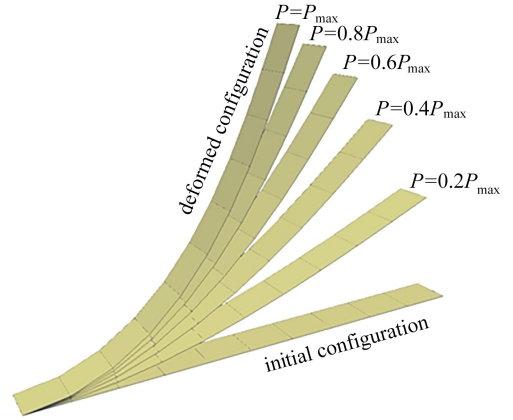
(a) 端部受力的悬臂板

(a) A cantilever subjected to a end shear force



(b) 本文得到的结果与解析解对比

(b) The comparison between the results with this method and the exact solution



(c) 不同载荷下的变形构型

(c) Deformed configurations under different loads

图 2 悬臂板的受力示意图、变形过程与计算结果

Fig. 2 The force diagram, deformation process and calculation results of the cantilever

用本文方法计算出的 U_{tip} 与解析解中数据的相对误差 δ 见表 1,施加载荷为 0.1 倍 P_{max} 时,相对误差最大,为 2.9%,随着载荷的增大,相对误差越来越小,最终相对误差为 0.8%,平均相对误差为 1.41%。如图 2(b) 所示,将使用本文方法计算得到的解拟合为一条曲线,和解析解形成的点进行对比,可见使用本文方法的计算结果与解析解吻合较好。

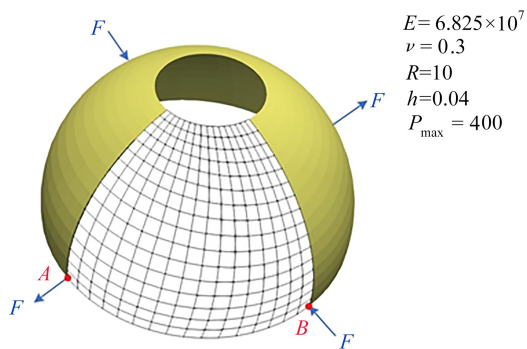
表 1 U_{tip} 的解析解与本文算法结果对比

Table 1 The comparison between the result obtained with this method and the exact solution of U_{tip}

P/P_{max}	W_{tip}	U_{tip}	this papaer solution	$\delta / \%$
0.1	1.309	0.103	0.100	2.9
0.2	2.493	0.381	0.374	1.8
0.3	3.488	0.763	0.749	1.8
0.4	4.292	1.184	1.167	1.4
0.5	4.933	1.604	1.585	1.2
0.6	5.444	2.002	1.981	1.0
0.7	5.855	2.370	2.345	1.1
0.8	6.190	2.705	2.678	1.0
0.9	6.467	3.010	2.978	1.1
1.0	6.698	3.286	3.259	0.8

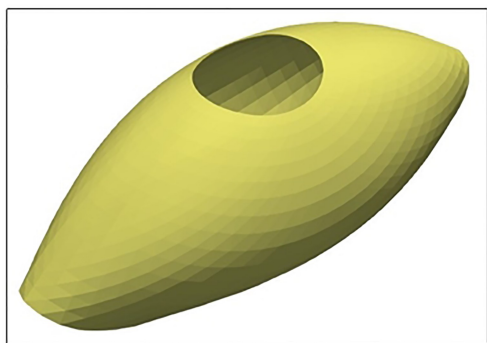
4.2 半球形壳

如图 3(a) 所示的超弹性材料半球形壳体^[25],受到间隔 90° 的逐渐增大的交替径向力载荷,在半球形壳体的上顶点带有 18° 的开口.将此半球形壳体结构划分成 64×16 个单元网格,每一个单元网格作为一个物质点区域,解析解给出了 A, B 两点在 x 方向上的位移,分别记为 V_A 和 U_B .将最大载荷等分为 20 份逐步加载,在载荷逐渐加载的过程中,以 U_B 为判断载荷增大的条件,当载荷为 P_i 时,判断 B 点 x 方向上的位移 U_i 是否达到解析解中载荷为 P_i 时对应的 U_B ,达到后则令 $P_{i+1} = P_i + \Delta P$,直到 $P_i = P_{\max}$ 且 $U_i = U_B$,算法结束.图 3(b) 为半球壳最终的变形几何.用本文方法计算得到的 V_A 与解析解^[25] 数据的相对误差 δ 见表 2.施加载荷为 0.1 倍 P_{\max} 时,相对误差较大,为 1.8%,载荷为 0.6 倍 P_{\max} 时,相对误差最大,为 2.1%,计算过程中相对误差有上下波动,整体仍然为下降趋势,最终的相对误差为 0.4%,平均相对误差为 1.17%.如图 3(c) 所示,将使用本文方法计算得到的解拟合为一条曲线,和解析解形成的点进行对比,可见使用本文方法的计算结果与解析解吻合较好.



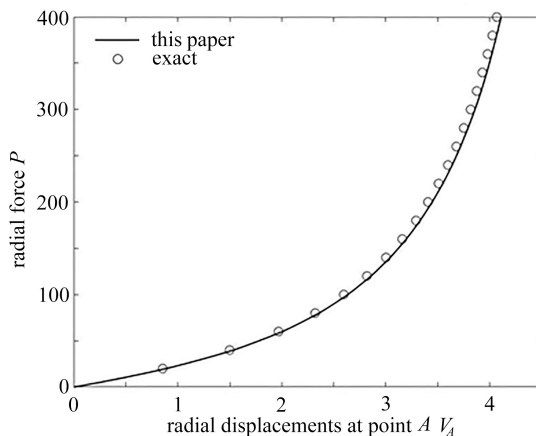
(a) 18° 开口半球壳

(a) The spherical shell with an 18° hole



(b) 半球壳的变形结果

(b) The deformed configuration of the spherical shell



(c) 本文得到的结果与解析解对比

(c) The comparison between the results with this method and the exact solution

图 3 半球壳的受力示意图、变形结果与计算结果

Fig. 3 The force diagram, deformation process and calculation results of the spherical shell

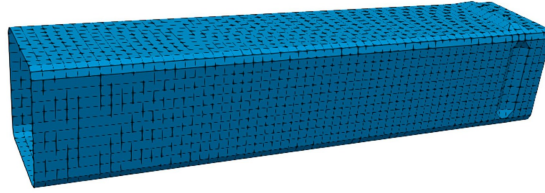
表 2 V_A 的解析解与本文算法结果对比

Table 2 The comparison between the results with this method and the exact solution of V_A

P/P_{\max}	U_B	V_A	this papaer solution	$\delta / \%$
0.1	1.840	1.499	1.472	1.8
0.2	3.261	2.321	2.287	1.5
0.3	4.339	2.819	2.791	1.0
0.4	5.196	3.158	3.104	1.7
0.5	5.902	3.406	3.372	1.0
0.6	6.497	3.598	3.523	2.1
0.7	7.006	3.750	3.701	1.3
0.8	7.448	3.875	3.872	0.1
0.9	7.835	3.976	3.944	0.8
1.0	8.178	4.067	4.050	0.4

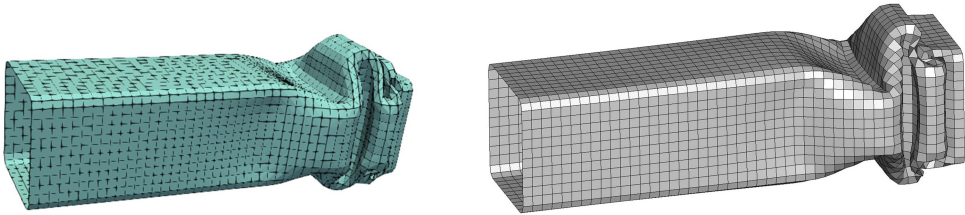
4.3 方管压溃

如图4(a)所示的钢制箱型薄壁梁部件,在Wu等^[14]的文章中被用于评估壳单元的塑性变形能力,长度为300 mm,截面为60 mm×60 mm,厚度为1 mm,折叠区域曲率半径为5 mm.弹塑性材料属性为:弹性模量 $E = 200 \text{ kN/mm}^2$,质量密度 $\rho = 7.85 \times 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$,Poisson比 $\nu = 0.3$,屈服应力 $\sigma_y = 0.2 \text{ kN/mm}^2$.



(a) 钢制箱型梁部件

(a) The steel box beam model



(b) $t = 5 \text{ ms}$



(c) $t = 10 \text{ ms}$



(d) $t = 15 \text{ ms}$

图4 方管模型和本文算法(左侧)与LS-DYNA(右侧)的计算结果对比

Fig. 4 The steel box beam model and the comparison between the results with this method(left) and the LS-DYNA(right)

部件主要采用尽可能均匀的、边长约为5 mm的四边形单元划分网格,每一个四边形单元网格作为一个物质点区域,折叠区域的曲面采用两排单元网格模拟,在部件的前端设计一个回转区域用以激发预想的动力屈曲模态.部件的前端固定,一个500 kg的集中质量连接在部件的端部以模拟结构质量,部件施加15 mm/ms的初速度并向前运动,在部件的前端立刻出现了大变形并引发回转区域的屈曲,在连续压溃过程中,材料在多个位置发生了接触.将本文算法计算得到的变形结果与LS-DYNA计算出的变形结果进行对比,对比结果如图4所示,其中左侧为本文算法的计算结果,右侧为LS-DYNA计算结果,选取了 $t = 5 \text{ ms}$, 10 ms , 15 ms 三个时刻,两种结果与Wu等^[14]的文章中给出的结果均拥有相似的变形几何.

5 结 论

本文将CPDI2理论与BT壳理论相结合,提出了一种分析薄壳结构大变形的新方法.通过物质点到壳单

元节点再到背景网格节点的双重映射计算基函数,在背景网格上求解动量方程,更新物质点区域节点位置,在物质点区域内基于 BT 壳理论求解节点内力.通过两个静力学算例,精确地分析了超弹性薄壳结构大转动和非线性大变形等问题.加入自接触算法,分析了受到高速冲击的薄壁方管压溃问题.数值结果表明,本文所提出的在 CPDI2 框架上加入 BT 壳结构的计算方法,可以适用于分析薄壳结构非线性大变形和高速冲击压溃问题.

参考文献(References):

- [1] SULSKY Z, CHEN H, SCHREYER H L. A particle method for history-dependent materials[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1994, **118**(1/2): 179-196.
- [2] 周晓敏, 孙政. 非 Newton 流体的物质点法模拟研究[J]. *应用数学和力学*, 2019, **40**(10): 1135-1146. (ZHOU Xiaomin, SUN Zheng. Simulation of non-Newtonian fluid flows with the material point method[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(10): 1135-1146. (in Chinese))
- [3] STEFFEN M, WALLSTEDT P C, GUILKEY J E, et al. Examination and analysis of implementation choices within the material point method (MPM)[J]. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 2008, **31**(2): 107-127.
- [4] 徐云卿, 周晓敏, 赵世一, 等. 基于 B 样条物质点法的溃坝流模拟研究[J]. *应用数学和力学*, 2023, **44**(8): 921-930. (XU Yunqing, ZHOU Xiaomin, ZHAO Shiyi, et al. Simulation study on dam break flow based on the B-spline material point method[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2023, **44**(8): 921-930. (in Chinese))
- [5] ZHANG D Z, MA X, GIGUERE P T. Material point method enhanced by modified gradient of shape function [J]. *Journal of Computational Physics*, 2011, **230**(16): 6379-6398.
- [6] MOUTSANIDIS G, LONG C C, BAZILEVS Y. IGA-MPM: the isogeometric material point method[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2020, **372**:113346.
- [7] BARDENHAGEN S G, KOBER E M. The generalized interpolation material point method[J]. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 2004, **5**(6): 477-496.
- [8] SADEGHIRAD A, BRANNON R M, BURGHARDT J. A convected particle domain interpolation technique to extend applicability of the material point method for problems involving massive deformations[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2011, **86**(12): 1435-1456.
- [9] SADEGHIRAD A, BRANNON R M, GUILKEY J E. Second-order convected particle domain interpolation (CPDI2) with enrichment for weak discontinuities at material interfaces[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2013, **95**(11): 928-952.
- [10] WAN D, WANG M, ZHU Z, et al. Coupled GIMP and CPDI material point method in modelling blast-induced three-dimensional rock fracture[J]. *International Journal of Mining Science and Technology*, 2022, **32**(5): 1097-1114.
- [11] WANG C S, DONG G W, ZHANG Z G, et al. Generalized particle domain method: an extension of material point method generates particles from the CAD files[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2024, **125**(17): e7537.
- [12] NGUYEN V P, DE VAUCORBEIL A, BORDAS S. *The Material Point Method: Theory, Implementations and Applications*[M]. Berlin: Springer Cham, 2023.
- [13] KANG J, HOMEL M A, HERBOLD E B. Beam elements with frictional contact in the material point method [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2022, **123**(4): 1013-1035.
- [14] WU S R, GU L. *Introduction to the Explicit Finite Element Method for Nonlinear Transient Dynamics*[M]. Wiley, 2012.
- [15] JIANG C, GAST T, TERAN J. Anisotropic elastoplasticity for cloth, knit and hair frictional contact[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2017, **36**(4): 1-14.

- [16] GUO Q, HAN X, FU C, et al. A material point method for thin shells with frictional contact[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2018, **37**(4): 1-15.
- [17] WU B, CHEN Z, ZHANG X, et al. Coupled shell-material point method for bird strike simulation[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2018, **31**(1): 1-18.
- [18] DE VAUCORBEIL A, NGUYEN V P. Modelling contacts with a total Lagrangian material point method[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2021, **373**: 113503.
- [19] NI R, LI J, ZHANG X, et al. An immersed boundary-material point method for shock-structure interaction and dynamic fracture[J]. *Computer Physics Communications*, 2022, **470**: 111558.
- [20] LI J, NI R, ZENG Z, et al. An efficient solid shell material point method for large deformation of thin structures[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2024, **125**(1): e7359.
- [21] FLANAGAN D P, BELYTSCHK T. A uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1981, **17**(5): 679-706.
- [22] BELYTSCHKO T, TSAY C S. A stabilization procedure for the quadrilateral plate element with one-point quadrature[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1983, **19**(3): 405-419.
- [23] BELYTSCHKO T, LIN J I, TSAY C S. Explicit algorithms for the nonlinear dynamics of shell[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1984, **42**(2): 225-251.
- [24] 钟志华, 李光耀. 薄板冲压成型过程的计算机仿真与应用[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 1998. (ZHONG Zhihua, LI Guangyao. *Simulation and Application of Sheet Metal Stamping Process*[M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1998. (in Chinese))
- [25] SZE K Y, LIU X H, LO S H. Popular benchmark problems for geometric nonlinear analysis of shells[J]. *Finite Elements in Analysis & Design*, 2004, **40**(11): 1551-1569.