

# 输液直管道流-固耦合振动响应计算方法与应用\*

田 瑞<sup>1,2</sup>, 常 亮<sup>1,2</sup>, 韩 涛<sup>1,2</sup>, 聂小华<sup>1,2</sup>

(1. 中国飞机强度研究所, 西安 710065;  
2. 强度与结构完整性全国重点实验室, 西安 710065)

**摘要:** 输液管道系统中存在液体压力脉动和管道结构的高度非线性耦合效应, 在外激励作用下将产生剧烈的耦合振动现象, 严重时会导致输液管道及连接结构失效. 针对输液管道流-固耦合振动响应解析方法缺乏, 研究了基于微分变换法(DTM)求解含复杂支承的输液管道系统动力学特性及振动响应理论, 基于 Bernoulli-Euler 梁理论建立了跨中含复杂弹性支承的输液直管道流-固耦合振动微分方程, 详细推导了基于 DTM 计算简支、含附加弹性支承输液直管道系统固有频率、位移响应及支承约束反力的表达式, 研究了输液管道内压强、流速及附加支承刚度和位置对管道系统固有频率、支承约束反力的影响, 并基于结构有限元分析方法验证了 DTM 的计算精度. 研究表明: 采用 DTM 计算含复杂支承输液管道系统流-固耦合振动特性及响应的精度高、适用性强, 尤其在复杂边界以及跨中含有附加支承管道系统振动响应计算方面具有明显的优势, 基于 DTM 可以便捷计算流固耦合管道系统强迫振动中的力学响应, 为管道及其连接结构的设计提供理论依据.

**关键词:** 输液直管道; 微分变换法; 流-固耦合; 弹性支承; 振动响应

中图分类号: V214 文献标志码: A DOI: 10.21656/1000-0887.440291

## The Calculation Method and Application of Fluid-Solid Coupling Vibration Responses of Straight Infusion Pipeline

TIAN Rui<sup>1,2</sup>, CHANG Liang<sup>1,2</sup>, HAN Tao<sup>1,2</sup>, NIE Xiaohua<sup>1,2</sup>

(1. *Aircraft Strength Research Institute of China,*

*Xi'an 710065, P.R.China;*

2. *National Key Laboratory of Strength and Structural Integrity,*

*Xi'an 710065, P.R.China)*

**Abstract:** There is a highly nonlinear coupling effect between liquid pressure pulsation and pipeline structure in the infusion pipeline system. Severe coupling vibration will occur under external excitation, which will lead to the failure of the infusion pipeline and connection structure. In view of the lack of analytical methods for the fluid-solid coupling vibration responses of the infusion pipeline, the dynamic characteristics and vibration response theory for the infusion pipeline system with complex supports were given based on the differential transformation method (DTM), and the fluid-solid coupling vibration differential equation for the straight infusion pipeline with complex elastic supports within the span was established based on the Bernoulli-Euler beam theory. The expressions based on the DTM for calculating natural frequencies, displacement responses and support constraint reactions of the pipeline system with the simple support and additional elastic supports were derived

\* 收稿日期: 2023-09-26; 修订日期: 2024-02-22

作者简介: 田瑞(1993—),男,工程师,硕士(通讯作者. E-mail: 458519989@qq.com).

引用格式: 田瑞, 常亮, 韩涛, 聂小华. 输液直管道流-固耦合振动响应计算方法与应用[J]. 应用数学和力学, 2024, 45(12): 1494-1505.

in detail. The influences of the internal pressure, the flow rate, the additional support stiffness and the support position on natural frequencies and support constraint reactions of the pipeline system were studied, and the calculation accuracy of the DTM was verified with the structural finite element analysis method. The research shows that, the application of the DTM in the calculation of fluid-solid coupling vibration characteristics and responses of the infusion pipeline system with complex supports has high accuracy and good applicability, especially in the calculation of vibration responses of the pipeline system with complex boundaries and additional supports within the span. Based on the DTM, the mechanical responses of the fluid-solid coupling pipeline system can be conveniently calculated under forced vibration. It provides a theoretical basis for the design of pipelines and connected structures.

**Key words:** straight infusion pipeline; differential transformation method; fluid-solid coupling; elastic support; vibration response

## 0 引 言

输液管道是一种被广泛应用的工程结构,如航空航天、船舶燃油管路系统、石油运输管道以及大型机械设备上的管道等。由于输液管道中存在液体压力脉动和管道结构耦合振动现象,这种耦合振动不仅会产生噪声污染,还可能对管道系统安全性带来隐患。实际工程中引发管道结构耦合振动的不仅有流体流动引发的振动,还有外激励引起的振动,如飞机、火箭发动机的激励、外环境传给管道结构的激励等<sup>[1-5]</sup>。诸多因素的复杂耦合叠加会造成输液管道系统发生剧烈耦合振动现象,严重时甚至会导致输液管道系统破坏或失效而引发灾难事故。工程中输液管道系统的破坏或损伤很大一部分是从连接或支承(卡箍、固定夹)地方开始,其主要原因是在管道系统耦合振动过程中,部分连接结构因承受了过大载荷而产生了过度变形,从而导致连接结构松动或断裂。输液管道系统卡箍松动或断裂将导致管道约束失效,在约束不足的情况下,耦合振动将更加剧烈,从而导致其他约束(支承或连接件)也逐渐失效,甚至可能引发管道破裂或功能性丧失。因此研究输液管道内流体流速、压强、外激励等多种因素耦合作用下管道系统振动响应状态,特别是连接结构承载情况,对指导管道系统及支承结构的设计具有重要意义。

目前,针对输液管道系统流-固耦合振动响应已有大量的研究成果陆续发表。包日东等<sup>[6]</sup>利用微分求积法求解了具有弹性支承的输液管道的振动问题,分析了弹性支承刚度对输液管道结构稳定性的影响。毛晓晔等<sup>[7]</sup>采用 Galerkin 截断方法研究了超临界流速输液管在 3:1 内共振条件下的稳态幅频响应。Li 等<sup>[8]</sup>利用传递矩阵法求解了输液管道结构固有频率和动力响应,并分析了支座和管道内流动工况对输液管道结构固有频率和动力响应的影响规律。赵千里<sup>[9]</sup>利用 Green 函数法对输液管路强迫振动问题进行了求解,分析了不同约束刚度对管道结构固有频率及响应的影响。Sazesh 等<sup>[10]</sup>基于 Galerkin 方法对管道结构横向运动方程离散化,并采用随机分析方法对分布随机激励下的悬臂输送流体管道振动响应进行了分析。袁嘉瑞等<sup>[11]</sup>采用广义 Hamilton 原理,导出了考虑流体影响的微曲管道横向振动的控制方程,研究了微曲输流管道振动固有频率的计算。孙诣博等<sup>[12]</sup>采用了路径积分法研究了输液管道随机动态响应。颜雄等<sup>[13]</sup>采用复模态法研究了非对称弹性支承下输液管道系统固有特性。上述研究较多集中在输液管道结构本身的固有特性及动力响应分析方面,在实际工程实践中遇到的各种振动问题,例如在飞机管道系统中经常出现的卡箍疲劳断裂问题等,许多情况下,管道结构没有发生共振现象,但仍然出现破坏或损伤,其主要原因是管道系统振动过程中支承或连接构件上承受的约束反力过大。目前已有部分科研工作开始关注该方面问题的研究,并已有一定数量的研究成果发表。熊宇等<sup>[14]</sup>研究并设计了一种新型液压管道抗振支承来满足特定管道系统的减振需求,同时也避免了支承在管道系统振动过程中承受过大载荷。王晶等<sup>[15]</sup>采用有限元方法(FEM)研究了卡箍对液压管道动态应力的影响。李枫等<sup>[16]</sup>提出了一种航空液压管道卡箍等效刚度的方法,并基于试验验证了卡箍刚度等效的精度。

实际工程中,针对管道及其连接结构的设计仍多是依据经验公式或基本设计规范,并采用 FEM 对管道系统设计方案进行强度验证,考虑流-固耦合效应影响的设计依据缺乏,一般采用对管道及其卡箍预留较大的强度安全裕度方法解决。本研究将探索输液管道流-固耦合振动响应计算新途径,支撑管道系统初始设计

过程中卡箍的设计. 研究内容将着重从输液管道流-固耦合效应下振动微分方程数学解法方面开展, 建立了输液直管道系统固有频率、位移响应、支承约束反力计算方法, 研究了输液管道内流速和内压强对管道系统固有频率和振动响应的影响, 并基于 FEM 对计算结果进行了验证.

## 1 微分变换法求解非线性微分方程原理

微分变换法(differential transformation method, DTM)最初由赵家奎<sup>[17]</sup>提出, 主要用于含初值的高阶非线性微分方程的求解问题. 基于 Taylor 级数展开, DTM 可以准确高效地求解非线性微分方程. 目前, 许多学者根据各类型初值条件对 DTM 进行了改造, 并成功应用于各学科非线性的问题求解. 例如, 林彬等<sup>[18]</sup>利用 DTM 完成了对生物学方面非线性微分方程的求解. Tian 等<sup>[19]</sup>将 DTM 改造并成功应用于复杂边界及多支承梁结构振动响应计算及优化设计问题, 采用理论方法验证了计算精度及可靠性.

采用 DTM 可以便捷地将一般的微分方程转化为代数方程, 通过把初值(或边界条件)代入方程并求解可以获得一个封闭的级数解, 其基本思想如下:

设解析函数  $w(x)$  的第  $k$  阶微分变换定义为

$$W(k) = \frac{1}{k!} \left( \frac{d^k w(x)}{dx^k} \right), \quad (1)$$

式中,  $\frac{d^k w(x)}{dx^k}$  表示对函数  $w(x)$  求  $k$  阶导,  $W(k)$  为  $k$  阶导数表达式.

则  $w(x)$  可以表示为

$$w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x - x_0)^k W(k). \quad (2)$$

当截取项数  $N$  足够大时,  $w(x) = \sum_{k=N}^{\infty} (x - x_0)^k W(k)$  的值非常小, 其影响可以忽略.

因此, 解析函数  $w(x)$  可以写成

$$w(x) = \sum_{k=0}^N (x - x_0)^k W(k). \quad (3)$$

实际应用中  $N$  的取值由精度  $\varepsilon$  确定.

表 1 列出了 DTM 中常用的一些基本数学运算<sup>[19]</sup>.

表 1 DTM 中基本数学运算<sup>[19]</sup>

Table 1 Basic mathematical operations in the DTM<sup>[19]</sup>

original function	conversion function
$w(x) = y(x) \pm z(x)$	$W(k) = Y(k) \pm Z(k)$
$w(x) = Ay(x)$	$W(k) = AY(k)$
$w(x) = \frac{dy(x)}{dx}$	$W(k) = (k+1)Y(k+1)$
$w(x) = \frac{d^n y(x)}{dx^n}$	$W(k) = (k+1)(k+2)\cdots(k+n)Y(k+n)$
$w(x) = y(x)z(x)$	$W(k) = \sum_{l=0}^k Y(l)Z(k-l)$
$w(x) = x^m$	$W(k) = \delta(k-m) = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases}$

## 2 基于 DTM 输液直管道系统固有频率和耦合振动响应计算方法

### 2.1 典型输液管道系统固有频率及耦合振动响应计算方法

流固耦合管道系统的弯曲振动微分方程也是基于 Bernoulli-Euler 梁模型建立的, 与梁结构不同的是需要考虑管内流体流速  $V_f$  及压强  $P$  的影响. 本文以简支输液管道系统为例进行推导, 其模型如图 1 所示.

图 1 中,  $L$  为管道长度,  $m_p$  为单位长度管道质量,  $m_f$  为单位长度流体质量,  $E$  为弹性模量,  $I$  为管道截面惯

性矩,  $P$  为流体产生的压强,  $A_f$  为流体截面积,  $V_f$  为流体流速,  $a(t) = a_0 e^{j\omega_f t}$  为基础加速度激励,  $a_0$  为激励幅值,  $j$  为虚数单位,  $\omega_f$  为外激励频率,  $t$  为时间,  $c$  为结构阻尼系数。

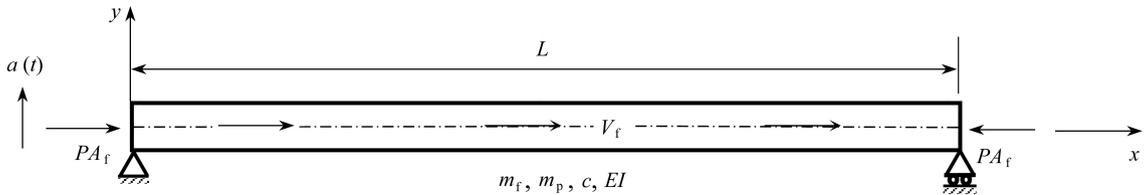


图 1 简支输液管道系统简化模型

Fig. 1 The simplified model for the simple support infusion pipeline system

输液管道在基础加速度激励下的横向振动微分方程<sup>[20-21]</sup>可表示为

$$EI \frac{\partial^4 w_r(x, t)}{\partial x^4} + (m_f V_f^2 + PA_f) \frac{\partial^2 w_r(x, t)}{\partial x^2} + 2m_f V_f \frac{\partial^2 w_r(x, t)}{\partial x \partial t} + (m_f + m_p) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + c \frac{\partial w_r(x, t)}{\partial t} = 0, \quad (4)$$

式中, 第一项为结构惯性力, 第二项为流体离心力和压力影响项(等效轴力), 第三项为流体流动产生的陀螺阻尼力, 第四项为结构弹性恢复力, 第五项为结构阻尼力。

式(4)中,  $w(x, t)$  为绝对位移,  $w_r(x, t)$  为管道相对基础位移, 假设基础位移为  $w_g(t)$ , 由于输液管道位于相同基础上, 故基础位移仅与时间相关, 则有

$$w(x, t) = w_r(x, t) + w_g(t). \quad (5)$$

将式(5)代入式(4), 则有

$$EI \frac{\partial^4 w_r(x, t)}{\partial x^4} + (m_f V_f^2 + PA_f) \frac{\partial^2 w_r(x, t)}{\partial x^2} + 2m_f V_f \frac{\partial^2 w_r(x, t)}{\partial x \partial t} + (m_f + m_p) \frac{\partial^2 w_r(x, t)}{\partial t^2} + c \frac{\partial w_r(x, t)}{\partial t} = - (m_f + m_p) \ddot{w}_g(t), \quad (6)$$

式中,  $\ddot{w}_g(t)$  即是基础加速激励  $a(t)$ , 则式(6)可写成如下形式:

$$EI \frac{\partial^4 w_r(x, t)}{\partial x^4} + (m_f V_f^2 + PA_f) \frac{\partial^2 w_r(x, t)}{\partial x^2} + 2m_f V_f \frac{\partial^2 w_r(x, t)}{\partial x \partial t} + (m_f + m_p) \frac{\partial^2 w_r(x, t)}{\partial t^2} + c \frac{\partial w_r(x, t)}{\partial t} = - (m_f + m_p) a(t). \quad (7)$$

为了便于推导, 需要对式(7)进行无量纲化处理, 各项相应按下式处理:

$$\begin{cases} \eta = \frac{w_r}{L}, \xi = \frac{x}{L}, \beta = \frac{m_f}{m_f + m_p}, v = V_f L \left( \frac{m_f}{EI} \right)^{1/2}, \lambda_f = \omega_f L^2 \left( \frac{m_f + m_p}{EI} \right)^{1/2}, \\ A = \frac{(m_f + m_p) a_0 L^3}{EI}, p = \frac{PA_f L^2}{EI}, \tau = \frac{t}{L} \left( \frac{EI}{m_f + m_p} \right)^{1/2}, C = c L^2 \left( \frac{1}{(m_f + m_p) EI} \right)^{1/2}. \end{cases} \quad (8)$$

将式(8)代入式(7)得

$$\frac{\partial^4 \eta}{\partial \xi^4} + (v^2 + p) \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} + 2v\sqrt{\beta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} + C \frac{\partial \eta}{\partial \tau} + A e^{j\lambda_f \tau} = 0. \quad (9)$$

设  $\eta(\xi, \tau) = \bar{w}(\xi) e^{j\lambda_f \tau}$ , 代入上式得

$$\frac{\partial^4 \bar{w}(\xi)}{\partial \xi^4} + (v^2 + p) \frac{\partial^2 \bar{w}(\xi)}{\partial \xi^2} + 2j\lambda_f v \sqrt{\beta} \frac{\partial \bar{w}(\xi)}{\partial \xi} - \lambda_f^2 \bar{w}(\xi) + jC\lambda_f \bar{w}(\xi) + A = 0. \quad (10)$$

按式(1)对  $\bar{w}(\xi)$  微分变换, 令  $W(k) = \frac{1}{k!} \left( \frac{d^k \bar{w}(\xi)}{d\xi^k} \right)_{\xi=\xi_0}$ , 代入上式得

$$24W(4) + 2(v^2 + p)W(2) + 2j\lambda_f v \sqrt{\beta} W(1) + (jC\lambda_f - \lambda_f^2)W(0) + A = 0, \quad (11)$$

即

$$W(4) = - \frac{2(v^2 + p)W(2) + 2j\lambda_1 v \sqrt{\beta}W(1) + (jC\lambda_1 - \lambda_1^2)W(0) + A}{24}. \tag{12}$$

式(10)两边继续对  $\xi$  求导,按式(1)进行微分变换后可推得  $W(k + 5), k \geq 0$  时的表达式为

$$W(k + 5) = - \frac{(k + 3)(v^2 + p)W(k + 3) - \frac{2(k + 2)j\lambda_1 v \sqrt{\beta}W(k + 2) + (jC\lambda_1 - \lambda_1^2)W(k + 1)}{(k + 2)(k + 3)(k + 4)(k + 5)}}{(k + 4)(k + 5)}. \tag{13}$$

由式(12)和(13)可知,当  $n \geq 4$  时,  $W(n)$  都可以用  $W(0), \dots, W(3)$  的线性组合形式表示.表 2 分别给出了四种梁的边界在 DTM 中的转换条件.

表 2 DTM 中典型边界条件的转换<sup>[20]</sup>

Table 2 Typical boundary conditions and transition conditions in DTM<sup>[20]</sup>

boundary type	boundary condition	conversion condition
	$\eta(0) = \eta''(0) = 0$	$W(0) = W(2) = 0$
	$\eta(1) = \eta''(1) = 0$	$\sum_{k=0}^N W(k) = \sum_{k=0}^N k(k-1)W(k) = 0$
	$\eta(0) = \eta'(0) = 0$	$W(0) = W(1) = 0$
	$\eta''(1) = \eta'''(1) = 0$	$\sum_{k=0}^N k(k-1)W(k) = \sum_{k=0}^N k(k-1)(k-2)W(k) = 0$
	$\eta(0) = \eta'(0) = 0$	$W(0) = W(1) = 0$
	$\eta(1) = \eta''(1) = 0$	$\sum_{k=0}^N W(k) = \sum_{k=0}^N k(k-1)W(k) = 0$
	$\eta(0) = \eta'(0) = 0$	$W(0) = W(1) = 0$
	$\eta(1) = \eta'(1) = 0$	$\sum_{k=0}^N W(k) = \sum_{k=0}^N kW(k) = 0$

以简支输液管道系统为例进行推导,并设  $W(1) = C_1, W(3) = C_2$ , 将表 2 中简支边界条件的 DTM 转换条件  $W(0) = W(2) = 0$  代入式(12)、(13),由简支边界转换条件中两个级数等式条件

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^N W(k) = 0, \\ \sum_{k=0}^N k(k-1)W(k) = 0 \end{cases}$$

可得如下形式的线性方程:

$$\mathbf{B}_{2 \times 2} \mathbf{C} = \mathbf{a}, \tag{14}$$

即

$$\mathbf{C} = \mathbf{B}_{2 \times 2}^{-1} \mathbf{a}, \tag{15}$$

式中,各矩阵可表示为

$$\mathbf{B}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, \mathbf{a} = [a_1 \quad a_2]^T, \mathbf{C} = [C_1 \quad C_2]^T,$$

其中,  $\mathbf{B}_{2 \times 2}$  为关于无量纲化外激励频率  $\lambda_1$ 、流速  $v$  和管道内压强  $p$  的函数矩阵;  $\mathbf{a}$  为关于外激励幅值的向量矩阵.

因此,针对任意确定工况,即外激励  $\lambda_1$ 、管内流速  $v$  和压强  $p$  给定时,即可按式(14)计算  $\mathbf{C}$ .当求得两个未知量  $C_1, C_2$  后,即可得到所有高阶  $W(n), n \geq 4$ .

### 1) 输液管道系统固有频率计算方法

固有频率的计算是在不考虑外激励和阻尼的条件下,即方程右端项为零,然后由齐次线性方程组有非零解的条件求解,即

$$|B_{2 \times 2}| = 0. \tag{16}$$

当给定管内流速  $v$  和压强  $p$  时,由式(16)即可计算出各工况下输液管道系统的固有频率。

2) 简谐外激励作用下位移响应计算方法

输液管道无量纲化相对位移响应表达式为

$$\eta(\xi, \tau) = \bar{w}(\xi) e^{i\lambda \tau} = \sum_{k=0}^{\infty} \xi^k W(k) \cdot e^{i\lambda \tau}, \tag{17}$$

上式乘以  $L$  即可得有量纲的位移响应。

3) 简谐外激励作用下支承约束反力计算方法

输液管道左侧简支端无量纲化约束反力表达式为

$$R = \left. \frac{\partial^3 \eta(\xi, \tau)}{\partial \xi^3} \right|_{\xi=0} = 3! \cdot W(3) \cdot e^{i\lambda \tau}. \tag{18}$$

由式(1)可知

$$\left. \frac{\partial^3 \bar{w}(\xi)}{\partial \xi^3} \right|_{\xi=0} = 3! W(3) = 6C_2, \tag{19}$$

因此,左侧简支端无量纲化约束反力可表示为

$$R = 6C_2 e^{i\lambda \tau}. \tag{20}$$

右侧简支端约束反力的大小与左侧相等,且有量纲的支承约束反力可在计算出无量纲化约束反力后乘以  $EI/L^2$ , 即

$$R_l = R_r = \frac{EI}{L^2} R. \tag{21}$$

在计算简支端约束反力时,通常不直接对位移响应表达式(17)求三阶导数,因为微分转换是在左侧简支端进行的,因此当计算出  $C$  时,位移相应表达式在端点处的三阶导数值已经间接计算出来了,见式(1)。而且由于位移响应表达式是近似结果,对其求三阶导数还会导致误差放大,影响计算精度。

输液管道位移表达式(17)、简支端约束反力表达式(21)在实际应用中无法直接求得无穷项,因此也需要进行必要的截断,其截取项数  $N$  可由下式判断:

$$\left| \frac{R_N - R_{N-1}}{R_{N-1}} \right| \leq \varepsilon. \tag{22}$$

由上式即可确定实际应用中需要的截取项数  $N$ 。

2.2 含单个附加弹性支承输液管道系统固有频率及耦合振动响应计算方法

以简支输液管道跨中附加单个弹性支承情况为例来进行推导,输液管道系统简化模型如图 2 所示。其中  $k$  为附加支持弹簧刚度,  $s$  为附加支承位置距左端距离。

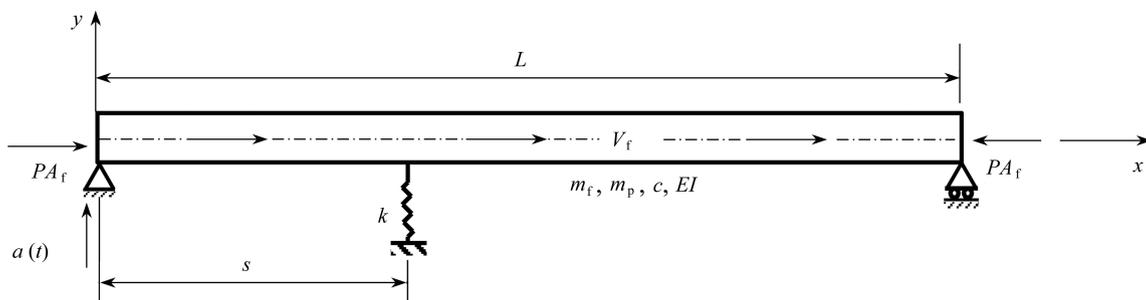


图 2 附加单个弹性支承简支输液管道系统简化模型

Fig. 2 A simple support infusion pipeline system model with an additional elastic support

跨中含附加单个弹性支承输液管道振动微分方程(无量纲化)可表示为

$$\frac{\partial^4 \eta}{\partial \xi^4} + (v^2 + p) \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} + 2v\sqrt{\beta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} + C \frac{\partial \eta}{\partial \tau} + Ae^{i\lambda \tau} = 0, \quad \xi \neq b, \tag{23}$$

式中,  $b = s/L$ ,  $s$  为附加支承位置.

由式(23)可知, 由于附加支承影响, 该输液管道模型位移响应表达式需按分段函数表达, 故其无量纲化受迫振动微分方程为

$$\eta(\xi, \tau) = \bar{w}(\xi) e^{i\lambda_1 \tau} = \begin{cases} \bar{w}_1(\xi) e^{i\lambda_1 \tau}, & 0 \leq \xi < b, \\ \bar{w}_2(\xi) e^{i\lambda_1 \tau}, & b \leq \xi \leq 1. \end{cases} \quad (24)$$

将  $\eta(\xi, \tau) = \bar{w}(\xi) e^{i\lambda_1 \tau}$ , 代入式(24), 并进行微分转换, 可得

$$24W(4) + 2(v^2 + p)W(2) + 2j\lambda_1 v\sqrt{\beta}W(1) + (jC\lambda_1 - \lambda_1^2)W(0) + A = 0, \quad \xi \neq b, \quad (25)$$

由上式即可得到  $W(4)$  的表达式, 式(23)继续对  $\xi$  求导可得到高阶项  $W(k+5)$ ,  $k \geq 4$ , 同式(13).

由式(24)可知, 位移响应表达式为分段函数, 因此需要在两段分别选取一点进行 DTM, 为了计算简便, 式(25)可以在简支梁两端点  $\xi_0 = 0$  和  $\xi_0 = 1$  处分别进行微分转换, 同 2.1 小节, 当  $n \geq 4$  时, 左侧  $W_1(n)$  和右侧  $W_2(n)$  仍可分别用  $W_1(0), \dots, W_1(3)$  和  $W_2(0), \dots, W_2(3)$  的线性组合表示.

由表 2 中简支边界转换条件可知:

左侧已知条件

$$\begin{cases} \eta_1(0) = 0, \\ \eta_1''(0) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} W_1(0) = 0, \\ W_1(2) = 0; \end{cases} \quad (26)$$

右侧已知条件

$$\begin{cases} \eta_2(0) = 0, \\ \eta_2''(0) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} W_2(0) = 0, \\ W_2(2) = 0. \end{cases} \quad (27)$$

因此, 左侧待求解未知量为  $W_1(1), W_1(3)$ , 右侧待求解未知量为  $W_2(1), W_2(3)$ , 不妨设  $W_1(1) = C_1$ ,  $W_1(3) = C_2$ ,  $W_2(1) = C_3$ ,  $W_2(3) = C_4$ .

上述未知量求解需要联合支承处的位移、转角、弯矩连续性, 以及剪力平衡条件:

$$\begin{cases} \eta(b^-, \tau) = \eta(b^+, \tau), \\ \eta'(b^-, \tau) = \eta'(b^+, \tau), \\ \eta''(b^-, \tau) = \eta''(b^+, \tau), \\ \eta'''(b^-, \tau) - \gamma\eta(b^-, \tau) = \eta'''(b^+, \tau), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{w}_1(b) = \bar{w}_2(b), \\ \bar{w}'_1(b) = \bar{w}'_2(b), \\ \bar{w}''_1(b) = \bar{w}''_2(b), \\ \bar{w}'''_1(b) - \gamma\bar{w}_1(b) = \bar{w}'''_2(b), \end{cases} \quad (28)$$

式中,  $\gamma = kL^3/(EI)$  为无量纲化弹簧刚度.

式(24)还可以表示为

$$\eta(\xi, \tau) = \bar{w}(\xi) e^{i\lambda_1 \tau} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} \xi^k W_1(k) \cdot e^{i\lambda_1 \tau}, & 0 \leq \xi < b, \\ \sum_{k=0}^{\infty} (\xi - 1)^k W_2(k) \cdot e^{i\lambda_1 \tau}, & b \leq \xi \leq 1. \end{cases} \quad (29)$$

将式(29)代入式(28)中, 得

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} b^k W_1(k) = \sum_{k=0}^{\infty} (b-1)^k W_2(k), \\ \sum_{k=0}^{\infty} kb^{k-1} W_1(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k(b-1)^{k-1} W_2(k), \\ \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)b^{k-2} W_1(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(b-1)^{k-2} W_2(k), \\ \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2)b^{k-3} W_1(k) - \gamma \sum_{k=0}^{\infty} b^k W_1(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2)(b-1)^{k-3} W_2(k). \end{cases} \quad (30)$$

由式(30)即可得到如下形式的非齐次线性方程组:

$$\mathbf{B}_{4 \times 4} \mathbf{C} = \mathbf{a}, \quad (31)$$

即

$$\mathbf{C} = \mathbf{B}_{4 \times 4}^{-1} \mathbf{a}. \quad (32)$$

式(31)、(32)中各矩阵可表示为如下形式:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{14} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{41} & \cdots & b_{44} \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [C_1 \ C_2 \ C_3 \ C_4]^T, \mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4]^T,$$

其中,  $\mathbf{B}_{4 \times 4}$  为关于无量纲化外激励频率  $\lambda_f$ 、流速  $v$  和管道内压强  $p$  以及附加支承位置  $b$  和支承刚度  $\gamma$  的函数矩阵;  $\mathbf{a}$  为关于外激励幅值的向量。

针对任意确定工况,即外激励  $\lambda_f$ 、管内流速  $v$  和压强  $p$ 、附加支承位置  $b$  和支承刚度  $\gamma$  给定时,即可按式(32)计算  $\mathbf{C}$ 。当 4 个未知量  $C_1, C_2, C_3, C_4$  求得后,即可得到所有高阶  $W(n), n \geq 4$ 。

含附加弹性支承的输液管道系统固有频率计算方法同 2.1 小节中简支输液管道,两侧简支端无量纲的约束反力可分别表示为

$$R_1 = \left. \frac{\partial^3 \eta(\xi, \tau)}{\partial \xi^3} \right|_{\xi=0} = 3! \cdot W_1(3) \cdot e^{i\lambda_f \tau} = 6C_2 e^{i\lambda_f \tau}, \quad (33)$$

$$R_2 = \left. \frac{\partial^3 \eta(\xi, \tau)}{\partial \xi^3} \right|_{\xi=1} = 3! \cdot W_2(3) \cdot e^{i\lambda_f \tau} = 6C_4 e^{i\lambda_f \tau}. \quad (34)$$

附加支承无量纲的约束反力为

$$R_\gamma = -\gamma \eta(\xi, \tau) \Big|_{\xi=b} = -\gamma \sum_{k=0}^{\infty} \xi^k W_1(k) \cdot e^{i\lambda_f \tau} \Big|_{\xi=b} = -\gamma \sum_{k=0}^{\infty} b^k W_1(k) \cdot e^{i\lambda_f \tau}. \quad (35)$$

在式(33)~(35)的基础上乘以  $EI/L^2$ , 即可得到有量纲的约束反力表达式。

对于输液管道跨中含有多 ( $M$ ) 个附加支承的情况,需要将其位移响应表达式分为  $M+1$  段的分段函数,在固定端对位移响应表达式进行微分变换,并依次在支承点处运用变形和内力的协调性条件构建如式(31)的方程组,从而实现未知高阶微分变换项进行求解。

## 3 输液管道系统固有频率和耦合振动响应计算应用算例

### 3.1 简支输液管道系统验证算例

以图 1 所示的简支输液管道系统为例,假设为硬铝制作的圆形截面管道,其具体参数如下:管道跨度  $L = 1.0 \text{ m}$ , 外直径  $D = 0.044 \text{ m}$ , 管道壁厚  $h = 3 \text{ mm}$ ;硬铝的弹性模量  $E = 68.6 \text{ GPa}$ , 密度  $\rho_p = 2800 \text{ kg/m}^3$ , 管道液体密度  $\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$ ; 结构阻尼系数  $c = 0.05$ , 激励为基础加速激励  $a(t) = a_0 e^{i\omega_f t}$ , 其中  $a_0 = 9.8 \text{ m/s}^2$ 。在计算时,DTM 取前 30 项,FEM 中将管道结构离散化为 20 个单元,任建亭等<sup>[21]</sup>针对输液管道耦合振动响应的 FEM 进行了研究,将采用该 FEM 对 DTM 进行验证。

#### 1) 管道内流速和压强对固有频率的影响

表 3 列出了分别采用 DTM 和 FEM 计算的三种流动工况下输液管道系统的固有频率,采用两种方法计算的结果非常接近,仅高阶固有频率存在较小误差。

由表 3 可知,管道内流速  $V_f$  和压强  $P$  增大时,固有频率逐渐减小。相比静止状态(无流速、压强),当流速增大  $10 \text{ m/s}$ , 压强增大到  $20 \text{ MPa}$  时,第一阶固有频率减小了  $20.5\%$ , 第二阶固有频率减小了  $4.7\%$ ;当流速增大到  $20 \text{ m/s}$ , 压强增大到  $30 \text{ MPa}$  时,第一阶固有频率减小了  $33.4\%$ , 第二阶固有频率减小了  $7.2\%$ 。

图 3 给出了管道内流速  $V_f$  和压强  $P$  对输液管道系统固有频率的影响,图中曲面为 DTM 计算得到的固有频率与流速和压强的关系,图中圆圈为表 4 中 FEM 的计算结果。可以看出,随压强  $P$  的增大,管道系统的固有频率急剧减小;随管内流速  $V_f$  的增大,管道系统的固有频率也在逐渐减小。由此可以推断,如果继续增大流速或压强将导致结构的失稳,即存在一个临界流速  $V_{\max}$  和临界压强  $P_{\max}$  使得输液管道系统的第一阶固有频率近似为零。例如,管道内压强为  $30 \text{ MPa}$ ,DTM 计算的临界流速为  $V_{\max} = 97.8 \text{ m/s}$ ,FEM 计算的临界流速为  $V_{\max} = 99.27 \text{ m/s}$ ,DTM 计算的临界流速相对 FEM 的误差为  $1.5\%$ 。

表3 简支输液管道系统固有频率计算结果

Table 3 Calculation results of natural frequencies of the simple support infusion pipeline system

flow condition		natural frequency $f_i$ / Hz			error $\delta$ / %
$P$ / MPa	$V_f$ / (m/s)	$i$	FEM	DTM	
0	0	1	86.772	86.772	0
		2	347.134	346.549	0.17
20	10	1	69.0	69.0	0
		2	330.768	330.189	0.18
30	20	1	57.80	57.80	0
		2	322.1	321.491	0.19

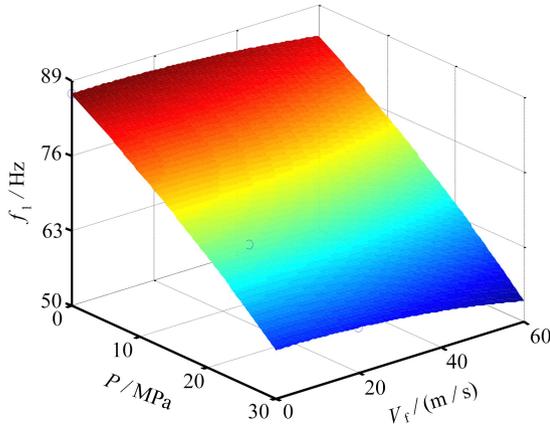
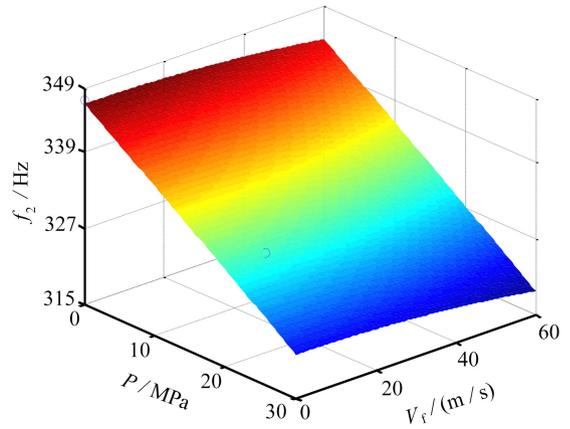
(a) 第一阶固有频率  $f_1$ (a) The 1st natural frequency  $f_1$ (b) 第二阶固有频率  $f_2$ (b) The 2nd natural frequency  $f_2$ 

图3 流速和压强对输液管道系统固有频率的影响

Fig. 3 Effects of the flow rate and the pressure on natural frequencies of the infusion piping system

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同。

## 2) 管道内流速和压强对简支端约束反力的影响

输液管道结构约束端约束反力不仅受管内流速  $V_f$  和压强  $P$  的影响,还与外激励频率和激励幅值大小有很大关系。下面将研究三种典型外激励工况下 ( $\omega_f = 0.5\omega_1, \omega_1, 1.5\omega_1$ ) 流速  $V_f$  和压强  $P$  与简支端约束反力的变换关系,其中,  $\omega_f$  表示外激励频率,  $\omega_1$  表示输液管道系统静状态时无量纲化第一阶固有频率值,详见表3。

表4给出了不同流动工况下输液管道系统简支端的约束反力值。在计算精度方面,由于FEM和DTM在描述流速及压强对管道结构简支端约束反力的方法不同,所以两种方法在计算约束反力时有一定的误差。

表4 输液管道系统简支端约束反力

Table 4 Constraining reactions at the simple support end of the infusion pipeline system

excitation frequency	flow condition		constrained reaction force $R_1$ / N		error $\delta$ / %
	$P$ / MPa	$V_f$ / (m/s)	FEM	DTM	
$0.5\omega_1$	0	0	17.018	17.166	0.87
	20	10	30.914	31.109	0.63
	30	20	58.257	58.852	1
$\omega_1$	0	0	2 526.348	2 527.190	0.03
	20	10	27.528	27.692	0.6
	30	20	17.129	17.343	0.5
$1.5\omega_1$	0	0	6.339	6.242	1.5
	20	10	4.497	4.187	6.7
	30	20	3.808	3.518	7.6

图 4 给出了不同外激励工况下管道内流速和压强对简支端约束反力的影响.由图 4 可知,激励频率  $\omega_f = 0.5\omega_1$  时,流速和压强增大,管道两个简支端的约束反力也逐渐增大;激励频率  $\omega_f = \omega_1$  时,随流速和压强增大,简支端约束反力都在逐渐减小.由于当流速和压强接近零或者较小时,管道第一阶固有频率将与外激励频率非常接近,管道结构近似处于共振状态,而流速和压强增大会导致管道固有频率逐渐减小而远离外激励频率,即远离共振频率范围;激励频率  $\omega_f = 1.5\omega_1$  时,流速和压强对约束反力的影响与上述两种工况 ( $0.5\omega_1$ ,  $\omega_1$ ) 明显不同时,当压强增大时,简支端约束反力逐渐减小,主要也是由于当压强增大时,结构第一阶固有频率逐渐减小而远离外激励频率值,当流速增大时,简支端约束反力将平缓地增大,这是因为流速增大会导致离心力的增大.

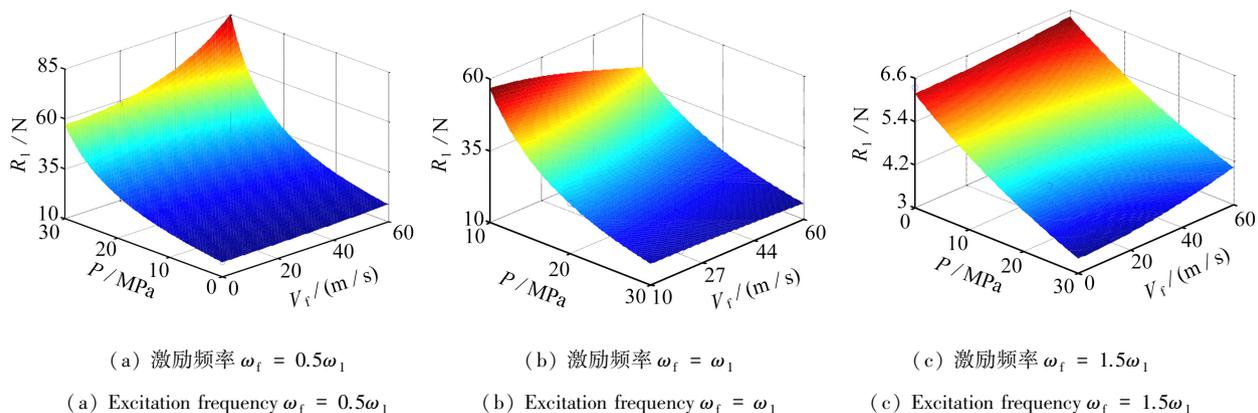


图 4 不同外激励工况下流速和压强对约束反力的影响

Fig. 4 Influences of the flow rate and the pressure on restrained reactions under different external excitation conditions

上述研究表明,由于管道内流速及压强对输液管道系统的固有频率的影响非常大,所以必须考虑对输液管道系统固有频率的控制,避免因管道系统第一阶固有频率降得过低,使得结构在较低外激励频率下产生共振而导致结构或系统的破坏.

### 3.2 附加单个弹性支承输液管道系统优化设计验证算例

通过简支输液管道系统的固有频率及约束反力的计算验证了 DTM 的计算精度,同时也得到了管道内流速、压强及外激励对支承约束反力的影响.输液管道系统设计中通常需要针对卡箍(支承)进行合理设计以保证管路系统安全性,优化设计过程中可以将卡箍等效为具有刚度的弹性支承,通过优化支承位置和刚度来实现对卡箍尺寸及位置的设计.

以图 2 中附加一个弹性支承的输液管道系统为例,研究两种航空输液管道典型工况下的支承刚度和位置的优化设计.假设附加支承位置为  $s$ ,支承刚度为  $k$ ,管道结构尺寸、材料等参数同 3.1 小节中无附加支承的简支输液管道系统.

表 5 给出了两种典型流动工况下输液管道系统支承等约束反力设计时的附加支承刚度和约束反力优化结果.等支承约束反力思想源于航空输液管道系统设计需求,其目的是使各卡箍上承受的载荷大小相同,从而使管道结构达到一种近似等强度设计.由于简支输液管道系统几何的对称性,所以在对附加一个弹性支承的简支输液管道系统支承约束反力进行优化时,如果要实现等支承约束反力设计,则附加支承位置也必须在梁跨度的中点.

由表 5 可知,两种不同流动工况下都可以实现等支承约束反力设计.随外激励频率的增大,实现等约束反力设计时的附加支承刚度在逐渐减小,相同外激励频率下,随流速和压强的增大,附加支承刚度也逐渐减小.两种流动工况下,当外激励频率增大到  $\omega_1$  时,由于此外激励频率与系统第一阶固有频率比较近,所以会导致支承承受的载荷比在其他两种外激励频率下都大很多.

表5 等支承约束反力设计  
Table 5 The equal support constrained reaction force design

flow condition		$\omega_f$	optimal addition stiffness $k/(kN/m)$	$f_1/Hz$	constrained reaction force $R_j/N$			error $\delta/\%$	
$P/MPa$	$V_f/(m/s)$				$j$	DTM	FEM		
20	10	$0.5\omega_1$	416.0	110.942	1	12.407	12.112	2.38	
					$k$	12.40	12.435	0.28	
					2	12.407	12.112	2.38	
		$\omega_1$	347.1	105.260	1	30.569	30.410	0.52	
					$k$	30.540	30.813	0.89	
					2	30.569	30.410	0.52	
	$1.5\omega_1$	231.8	94.920	1	9.224	9.396	1.86		
				$k$	9.215	9.181	0.37		
				2	9.224	9.396	1.86		
	30	20	$0.5\omega_1$	402.3	103.137	1	14.293	14.0	2.05
						$k$	14.279	14.330	0.36
						2	14.293	14.0	2.05
$\omega_1$			332.6	96.927	1	55.774	55.925	0.27	
					$k$	55.722	56.521	1.43	
					2	55.774	55.925	0.27	
$1.5\omega_1$	217.5	85.606	1	7.144	7.276	1.84			
			$k$	7.138	7.126	0.17			
			2	7.144	7.276	1.84			

## 4 结 论

输液管道系统流-固耦合作用下的强度设计是工程中经常遇到的问题,本文基于DTM详细推导了输液直管道系统固有频率及振动响应的计算方法,为流固耦合管道系统的设计提供了理论依据.研究了管道内流速和压强、附加支承位置和刚度对输液管道系统固有频率、强迫振动过程中的力学响应的影响,并基于等强度支承设计思想对附加支承位置和刚度进行了优化设计,达到了等支承约束反力设计目的,有效解决了飞机输油管道系统中卡箍等强度设计问题.研究表明:基于DTM可以对管道系统复杂流固耦合工况下的力学响应快速准确地求解,通过定义管道约束形式、卡箍数量及刚度值即可便捷地计算管道和卡箍在强迫振动过程中承受的载荷,指导管道及其连接结构的强度设计.

## 参考文献(References):

- [1] LIANG Feng, QIAN Yu, CHEN Yao, et al. Nonlinear forced vibration of spinning pipes conveying fluid under lateral harmonic excitation[J]. *International Journal of Applied Mechanics*, 2021, **13**(9): 2150098.
- [2] 张凯凯, 谭霞, 丁虎, 等. 超临界输流管道3:1内共振下参激振动响应[J]. *应用数学和力学*, 2018, **39**(11): 1227-1235. (ZHANG Kaikai, TAN Xia, DING Hu, et al. Parametric vibration responses of supercritical fluid-conveying pipes in 3:1 internal resonance[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(11): 1227-1235. (in Chinese))
- [3] LI Qian, LIU Wei, LU Kuan, et al. Nonlinear parametric vibration of a fluid-conveying pipe flexibly restrained at the ends[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2020, **33**(3): 327-346.
- [4] GAO Xumin, GAO Peixin, MA Hui, et al. Vibration characteristics analysis of fluid-conveying pipes concurrently subjected to base excitation and pulsation excitation[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2023, **189**: 110086.
- [5] 唐冶, 方勃, 张业伟, 等. 非线性弹簧支承悬臂输液管道的分岔与混沌分析[J]. *振动与冲击*, 2011, **30**(8): 269-274. (TANG Ye, FANG Bo, ZHANG Yewei, et al. Bifurcation and chaos analysis of cantilever pipeline conveying fluid with nonlinear spring support[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2011, **30**(8): 269-274. (in Chinese))

- [6] 包日东, 闻邦椿. 微分求积法分析弹性支承输流管道的稳定性[J]. 东北大学学报(自然科学版), 2007, **28**(7): 1017-1020. (BAO Ridong, WEN Bangchun. Differential quadrature method to analyze stability of elastically-supported fluid conveying pipelines [J]. *Journal of Northeastern University (Natural Science)*, 2007, **28**(7): 1017-1020. (in Chinese))
- [7] 毛晓晔, 丁虎, 陈立群. 3:1 内共振下超临界输液管受迫振动响应[J]. 应用数学和力学, 2016, **37**(4): 345-351. (MAO Xiaoye, DING Hu, CHEN Liqun. Forced vibration responses of supercritical fluid-conveying pipes in 3:1 internal resonance [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(4): 345-351. (in Chinese))
- [8] LI S J, LIU G M, KONG W T. Vibration analysis of pipes conveying fluid by transfer matrix method [J]. *Nuclear Engineering and Design*, 2014, **266**: 78-88.
- [9] 赵千里. 输流管路流固耦合振动特性研究及共振可靠性分析[D]. 沈阳: 东北大学, 2019. (ZHAO Qianli. Analysis for fluid structure interaction vibration characteristics and resonance reliability of fluid conveying pipe [D]. Shenyang: Northeastern University, 2019. (in Chinese))
- [10] SAZESH S, SHAMS S. Vibration analysis of cantilever pipe conveying fluid under distributed random excitation [J]. *Journal of Fluids and Structures*, 2019, **87**: 84-101.
- [11] 袁嘉瑞, 丁虎, 陈立群. 微曲输流管道振动固有频率分析与仿真[J]. 应用数学和力学, 2022, **43**(7): 719-726. (YUAN Jiarui, DING Hu, CHEN Liqun. Analysis and simulation of natural frequencies of slightly curved pipes [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(7): 719-726. (in Chinese))
- [12] 孙诣博, 魏莎, 丁虎, 等. 基于路径积分法的输液管道随机动态响应分析[J]. 力学学报, 2023, **55**(6): 1371-1381. (SUN Yibo, WEI Sha, DING Hu, et al. Stochastic dynamic response analysis of pipe conveying fluid based on the path integral method [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2023, **55**(6): 1371-1381. (in Chinese))
- [13] 颜雄, 魏莎, 毛晓晔, 等. 两端弹性支承输流管道固有特性研究[J]. 力学学报, 2022, **54**(5): 1341-1352. (YAN Xiong, WEI Sha, MAO Xiaoye, et al. Study on natural characteristics of fluid-conveying pipes with elastic supports at both ends [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2022, **54**(5): 1341-1352. (in Chinese))
- [14] 熊宇, 张怀亮, 彭欢. 一种新型液压管道抗振支承研究[J]. 噪声与振动控制, 2017, **37**(2): 168-172. (XIONG Yu, ZHANG Huailiang, PENG Huan. Research on a new type of anti-vibration supports for hydraulic pipelines [J]. *Noise and Vibration Control*, 2017, **37**(2): 168-172. (in Chinese))
- [15] 王晶, 陈果, 郑其辉, 等. 卡箍对飞机液压管道动态应力的影响分析[J]. 航空计算技术, 2014, **44**(1): 64-67. (WANG Jing, CHEN Guo, ZHENG Qihui, et al. Effect of clamp on aircraft hydraulic pipeline dynamic stress [J]. *Aeronautical Computing Technique*, 2014, **44**(1): 64-67. (in Chinese))
- [16] 李枫, 刘伟, 韦顺超, 等. 航空液压管道卡箍等效刚度及其影响因素研究[J]. 机械科学与技术, 2017, **36**(9): 1472-1476. (LI Feng, LIU Wei, WEI Shunchao, et al. Research on equivalent stiffness and influence factors of aero-clamps for aircraft hydraulic pipelines [J]. *Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering*, 2017, **36**(9): 1472-1476. (in Chinese))
- [17] 赵家奎. 微分变换及其在电路中的应用[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1986. (ZHAO Jiakui. *Differential Transformation and Its Application in Circuits* [M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 1986. (in Chinese))
- [18] 林彬, 李开泰. 求解非线性微分方程的微分变换方法[J]. 兰州大学学报(自然科学版), 2009, **45**(6): 132-135. (LIN Bin, LI Kaitai. Differential transformation method for solving nonlinear differential equations [J]. *Journal of Lanzhou University (Natural Sciences)*, 2009, **45**(6): 132-135. (in Chinese))
- [19] TIAN R, WANG D. Optimal design of beam structure support for controlling reaction force during vibration [C]//*The 26th International Congress on Sound and Vibration*. Montréal, 2019.
- [20] 田瑞, 王栋. 梁结构振动支承约束反力控制[J]. 噪声与振动控制, 2021, **41**(2): 50-55. (TIAN Rui, WANG Dong. Optimal design of beam structure supports for controlling constraint reaction forces during vibration [J]. *Noise and Vibration Control*, 2021, **41**(2): 50-55. (in Chinese))
- [21] 任建亭, 姜节胜. 输流管道系统振动研究进展[J]. 力学进展, 2003, **33**(3): 313-324. (REN Jianting, JIANG Jiesheng. Advances and trends on vibration of pipes conveying fluid [J]. *Advances in Mechanics*, 2003, **33**(3): 313-324. (in Chinese))