

断裂相场模型的三维自适应有限元方法*

裘沙沙, 刘星泽, 宁文杰, 姚伟岸, 段庆林

- (1. 大连理工大学 工业装备结构分析优化与 CAE 软件全国重点实验室, 辽宁 大连 116024;
2. 大连理工大学 大连理工大学白俄罗斯国立大学联合学院, 辽宁 大连 116024)

摘要: 发展了鲁棒的预测-校正算法,建立了断裂相场模型的三维自适应有限元分析.相场模型可以方便地处理复杂的断裂问题,避免了额外追踪裂纹路径且没有网格依赖性.然而,三维相场建模往往需要非常精细的网格,这降低了求解效率.针对该问题,基于交错求解方案发展了预测-校正网格自适应细化算法,实现了三维结构裂纹扩展的高精度分析.数值算例表明,所发展的方法能够准确合理地描述结构的裂纹扩展,同时网格可以在裂纹扩展的路径上自适应地细化.

关键词: 断裂力学; 相场模型; 自适应细化; 有限元法; 三维裂纹

中图分类号: O302 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.440299

A Three-Dimensional Adaptive Finite Element Method for Phase-Field Models of Fracture

QIU Shasha, LIU Xingze, NING Wenjie, YAO Weian, DUAN Qinglin

- (1. *State Key Laboratory of Structural Analysis, Optimization and CAE Software for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, P.R.China;*
2. *DUT-BSU Joint Institute, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, P.R.China*)

Abstract: A robust predictor-corrector algorithm was developed and a 3D adaptive finite element analysis for the fracture phase-field model was established. This model can deal with complex fracture problems conveniently, avoiding extra tracking of crack paths and without mesh-dependency. However, the 3D phase-field modeling usually requires extremely fine meshes, which brings reduction of the solving efficiency. Aimed at this problem, the predictor-corrector adaptive mesh refinement algorithm was developed based on a staggered solution scheme, to achieve high-precision analysis of crack propagation in 3D structures. Numerical examples show that, the developed method can accurately and reasonably describe crack propagation in structures, and the meshes can be adaptively refined along the crack propagation paths.

Key words: fracture mechanics; phase-field model; adaptive refinement; finite element method; 3D crack

* 收稿日期: 2023-10-03; 修订日期: 2024-03-14

基金项目: 中央高校基本科研业务费(DUT21GF304)

作者简介: 裘沙沙(1990—),女,博士生(E-mail: 1065955826@qq.com);

段庆林(1979—),男,副教授,博士,博士生导师(通讯作者. E-mail: qinglinduan@dlut.edu.cn).

引用格式: 裘沙沙, 刘星泽, 宁文杰, 姚伟岸, 段庆林. 断裂相场模型的三维自适应有限元方法[J]. 应用数学和力学, 2024, 45(4): 391-399.

0 引言

材料和结构的断裂破坏广泛存在于工业领域^[1-2],而断裂破坏问题的数值分析是工程结构安全评价的重要手段.自经典的 Griffith 理论^[3]被提出以来,各种断裂仿真方法得以快速发展,如重网格技术、内聚力单元法、扩展有限元法等.近年来所发展的相场模型也是重要的断裂分析方法之一,它基于断裂变分方法^[4]和相关的正则化方法^[5],将断裂考虑为能量最小化问题.该模型便于在统一的框架内处理各种复杂的断裂现象,无需额外的断裂判据.相场标量将尖锐的裂纹近似为弥散实体,并通过相场的演化自动捕捉断裂过程,避免了时刻跟踪裂纹表面,可以方便地处理复杂裂纹问题.常见的断裂相场模型包括各向同性模型^[5]和各向异性模型^[6]等,本文则采用了 Ambati 等^[7]提出的混合相场模型对结构的裂纹扩展问题进行了分析.

在相场模型分析中,往往需要采用较精细的网格来模拟裂纹的扩展,而通常的做法是网格的全局细化或在预期裂纹路径上的局部细化^[8-9].后者在一定程度上提高了计算效率,但这种局部的网格细化无法随着裂纹扩展过程调整,因此对计算量的简化有限,且在复杂结构中,裂纹的路径往往无法预测.相比而言,自适应网格细化是更加高效的方法,它可以沿着裂纹扩展的路径自动进行网格细化,且无需预测裂纹路径. Burke 等^[10]和 Artina 等^[11]提出了基于后验误差估计的自适应相场建模方法; Hirshikesh 等^[12]则基于恢复误差估计,发展了相场模型的网格自适应分析.这些算法实现了二维情况下局部网格自适应细化,但难以扩展到三维问题. Heister 等^[13]采用了一种预测-校正算法建立了相场模型的网格自适应分析,以足够精细的网格处理裂纹问题,随后将其推广到三维问题^[14]中.本文在 Miehe 等^[6]提出的交错求解方案的基础上,采用相场及残余应变能历史作为细化准则,发展了一种鲁棒的预测-校正网格自适应细化算法,建立了混合相场模型^[7]的有限元分析,并在三维结构的断裂问题中对该算法进行了测试.

1 混合相场模型及其离散化

根据脆性断裂的变分原理^[4],裂纹的演化可通过最小化总能量泛函 E_T 来描述:

$$E_T(\mathbf{u}, \Gamma) = E_U(\mathbf{u}, \Gamma) + E_S(\Gamma) - P(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} W(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) d\Omega + \int_{\Gamma} g_c d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} d\Omega - \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} d\Gamma, \quad (1)$$

其中, Ω 为弹性体; \mathbf{u} 为位移场; E_U 为弹性应变能,可通过对弹性应变能密度 W 在弹性体上的积分得到,依赖于应变 $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$; E_S 为形成裂纹面 Γ 的裂纹表面能; g_c 为临界能量释放率; P 为外力功,是体积力 \mathbf{b} 和表面力 \mathbf{t} 分别在弹性体和应力边界所做功的和.

引入相场变量 d , 式(1)中的尖锐裂纹可用该相场变量正则化^[5].由此,总能量泛函可以改写为

$$E_T(\mathbf{u}, d) = \int_{\Omega} g(d) W(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) d\Omega + g_c \int_{\Omega} \gamma(d, \nabla d) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} d\Omega - \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} d\Gamma, \quad (2)$$

其中, $g(d)$ 为退化函数,通常取 $g(d) = (1 - d)^2$, γ 为裂纹表面密度函数,表示为

$$\gamma(d, \nabla d) = \frac{1}{2l} d^2 + \frac{l}{2} |\nabla d|^2, \quad (3)$$

l 为控制弥散裂纹宽度的相场参数.由于各个方向上退化程度相同,基于式(2)的模型为各向同性模型.而各向异性模型包含了对弹性应变能的拉压分解,仅拉的部分可驱动裂纹演化,其总能量泛函可表示为

$$E_T(\mathbf{u}, d) = \int_{\Omega} [g(d) W^+(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) + W^-(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))] d\Omega + g_c \int_{\Omega} \gamma(d, \nabla d) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} d\Omega - \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} d\Gamma, \quad (4)$$

其中, W^+ 和 W^- 分别表示仅由拉伸和压缩驱动的应变能密度,其表达式为

$$W^{\pm}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \lambda [(\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}))_{\pm}]^2 + \mu \text{tr}[(\boldsymbol{\varepsilon}^{\pm})^2], \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^+ + \boldsymbol{\varepsilon}^-, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{\pm} = \sum_{i=1}^3 \langle \boldsymbol{\varepsilon}_i \rangle_{\pm} \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i, \quad (5)$$

其中, $\langle * \rangle_{\pm} = \frac{1}{2} (* \pm | * |)$, λ 和 μ 为 Lamé 常数.

最小化式(2)和(4),可得混合相场模型^[7]的控制方程:

$$\begin{cases} 2(1-d)H^+ - \frac{g_c}{l}(d - l^2\Delta d) = 0, & H^+ = \max_{\tau \in [0,t]} W^+(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, \tau)), \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, d) + \mathbf{b} = \mathbf{0}, & \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, d) = (1-d)^2 \frac{\partial W(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \end{cases} \quad (6)$$

其中, H^+ 表示仅由拉伸应变能驱动的历史场函数,其弱形式为

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \left\{ \left(2H^+ + \frac{g_c}{l} \right) d \delta d + g_c l \nabla d \cdot \nabla(\delta d) \right\} d\Omega = \int_{\Omega} 2H^+ \delta d d\Omega, \\ \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} d\Omega. \end{cases} \quad (7)$$

位移场 \mathbf{u} 、相场 d 以及他们的变分和梯度分别表示为

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \sum_{i=1}^k N_i^u \mathbf{u}_i, \quad \delta \mathbf{u} = \sum_{i=1}^k N_i^u \delta \mathbf{u}_i, \quad \nabla \mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i=1}^k \mathbf{B}_i^u \mathbf{u}_i, \\ d = \sum_{i=1}^k N_i d_i, \quad \delta d = \sum_{i=1}^k N_i \delta d_i, \quad \nabla d = \sum_{i=1}^k \mathbf{B}_i^d d_i, \end{cases} \quad (8)$$

其中, k 为节点数, N_i 为形函数,相关的矩阵表示为

$$\mathbf{N}_i^u = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_i^u = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & 0 & N_{i,y} & 0 & N_{i,z} \\ 0 & N_{i,y} & 0 & N_{i,x} & N_{i,z} & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,z} & 0 & N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{B}_i^d = \begin{bmatrix} N_{i,x} \\ N_{i,y} \\ N_{i,z} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

采用交错求解方案求解离散化的混合相场模型,在第 n 加载步,平衡方程为

$$\mathbf{K}_{n-1}^u \mathbf{u}_n = \mathbf{P}_n^u, \quad (10)$$

其中,位移场的刚度矩阵 \mathbf{K}^u 和外力向量 \mathbf{P}^u 的分量分别表示为

$$\mathbf{K}_{IJ}^u = \int_{\Omega} (\mathbf{B}_I^u)^T \mathbf{D}^{\text{ed}} \mathbf{B}_J^u d\Omega, \quad (11)$$

$$\mathbf{P}_I^u = \int_{\Omega} (N_I^u)^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\partial\Omega_f} (N_I^u)^T \mathbf{t} d\Gamma. \quad (12)$$

式(11)中, $\mathbf{D}^{\text{ed}} = (1 - d_{n-1})^2 \mathbf{D}^e$, \mathbf{D}^e 为弹性模量矩阵, \mathbf{D}^{ed} 为断裂退化的弹性模量矩阵,由第 $n-1$ 步得到的相场 d_{n-1} ,用式(11)求出刚度阵 \mathbf{K}_{n-1}^u ,解方程(10)得到第 n 步的位移 \mathbf{u}_n .然后,由 \mathbf{u}_n 更新历史场 H^+ ,并利用相场演化方程

$$\mathbf{K}_n^d d_n = \mathbf{P}_n^d \quad (13)$$

解出第 n 步的相场 d_n ,完成第 n 个载荷步的计算.其中,相场的刚度阵 \mathbf{K}^d 和外力向量 \mathbf{P}^d 的分量分别表示为

$$\mathbf{K}_{IJ}^d = \int_{\Omega} \left[\left(2H^+ + \frac{g_c}{l} \right) N_I N_J + g_c l (\mathbf{B}_I^d)^T \mathbf{B}_J^d \right] d\Omega, \quad (14)$$

$$\mathbf{P}_I^d = \int_{\Omega} 2H^+ N_I d\Omega. \quad (15)$$

2 网格自适应细化算法

细化区域通过残余应变能历史 $(1-d)^2 H^+$ 及相场值 d 确定,细化准则可写为

$$(1-d)^2 H^+ \geq H_0 \quad \text{or} \quad d \geq d_0, \quad (16)$$

其中, d_0 为相场的阈值, H_0 为残余应变能历史的阈值,

$$H_0 = q \max_{k=1,m} \{ (1-d_k)^2 H_k^+ \}, \quad (17)$$

m 为当前时刻网格积分点的个数, q 为比例参数,如无特殊声明,本文中 q 和 d_0 均取 0.6.若单元的任意积分点满足方程(16)的自适应细化判据,则表明该单元需要进行细化.

图1展示了六面体网格的细化过程,细化时需在单元的边缘中点、面心和体心处插入新的节点,而新节点

的位移场和相场等物理量由与之相关的原节点线性插值产生.采用“细化等级(r)”来表示单元已细化的次数,如初始单元细化等级为0,一旦它们被细化,则细化等级变为1,再次细化则细化等级变为2,以此类推,相邻元素的细化等级不超过1级.本文采用单元的最大细化等级 r_{\max} 作为网格细化的停止准则, r_{\max} 可通过相场参数 l 进行设置(单元尺寸充分小于相场参数 l),当细化等级满足停止判据 $r = r_{\max}$ 时,自适应细化停止.

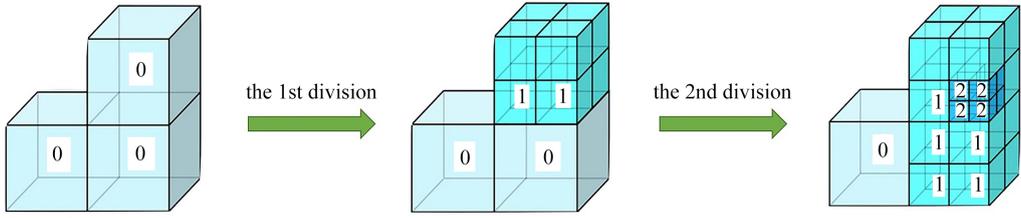


图1 自适应网格细化示意图

Fig. 1 Schematic diagram of the adaptive mesh refinement

为了高效地进行自适应细化,本文采用一种鲁棒高效的网格自适应预测-校正算法,其计算流程图如图2所示.在一个载荷步内包括交错求解模块、网格自适应细化模块以及它们之间的“预测-校正”迭代,通过交错求解模块得到残余应变能历史值或相场值后,进入网格自适应细化模块,根据式(16)的自适应细化准则对网格进行校核并细化,细化等级加1,细化后重新回到“交错求解”模块,不断重复这一过程,直到网格足够精细,上述过程始终在同一载荷步内进行.

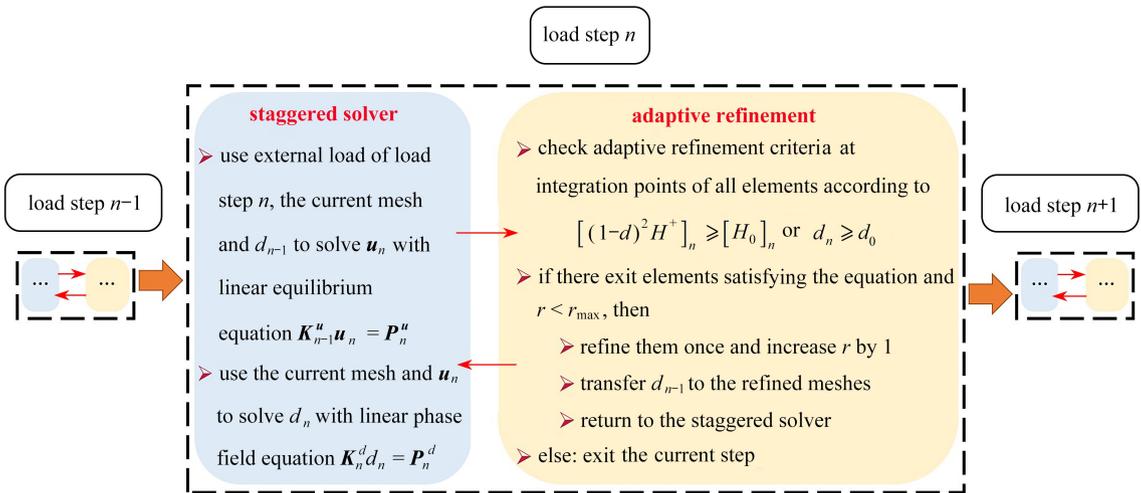


图2 预测-校正算法

Fig. 2 The predictor-corrector algorithm

3 数值算例

3.1 单槽方板拉伸

首先考虑拉伸载荷下的单槽方板,其模型如图3(a)所示.相关参数为 $\lambda = 121.15 \text{ GPa}$, $\mu = 80.77 \text{ GPa}$, $g_c = 2.7 \text{ N/mm}$, $l = 0.015 \text{ mm}$, $r_{\max} = 2$.方板侧面在 X 和 Z 方向固定;底面在 Y 和 Z 方向固定;顶面在 X 方向固定;在 Y 方向上,前500个载荷步施加增量为 $\Delta u = 1 \times 10^{-5}$ 的竖直位移,此后施加增量为 $\Delta u = 1 \times 10^{-6}$ 的竖直位移,直至完全断裂,采用六面体网格进行离散.采用自适应细化算法时,方板的裂纹样式和断裂相场如图3(b)和3(c)所示,自适应网格如图4(b)所示.由图可见,裂纹沿水平直线方向扩展,并于方板右侧中心处完全断裂,裂纹样式、断裂相场和自适应网格三者符合得很好,说明了网格自适应算法的准确性和鲁棒性.

该算例的网格比较如图4所示.其他条件不变,若采用局部预置细化网格方案,所得到的裂纹路径与网格自适应细化方案的结果一致,但自适应细化方案的节点数量、网格数量和CPU时间均明显少于局部预置细化网格方案,如表1所示,由此说明自适应网格细化对提高相场模型的计算效率具有显著效果.

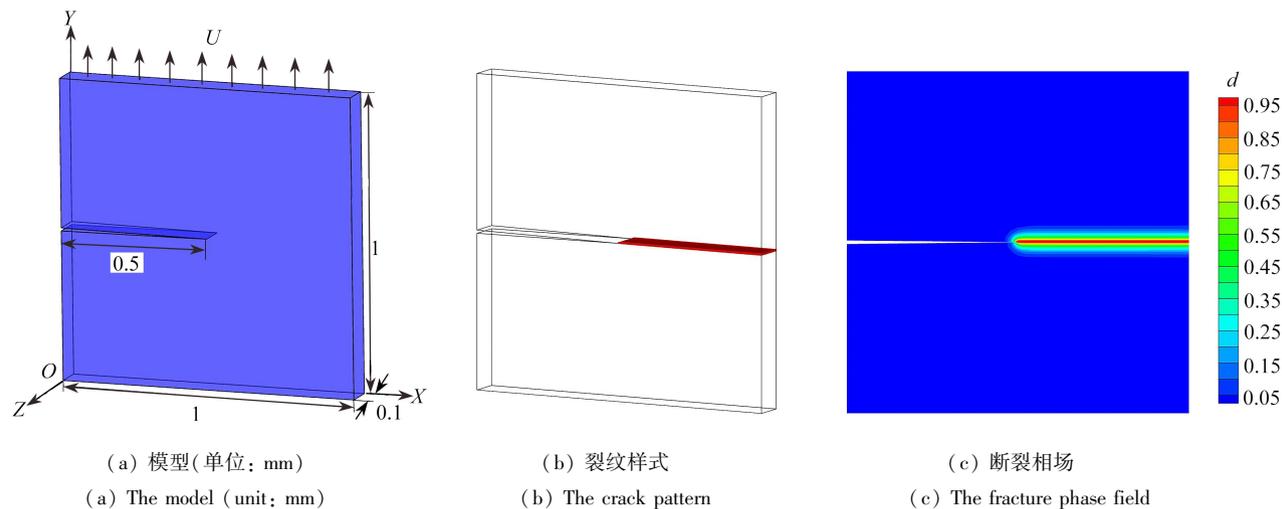


图 3 单槽方板拉伸

Fig. 3 Tension of the single groove square plate

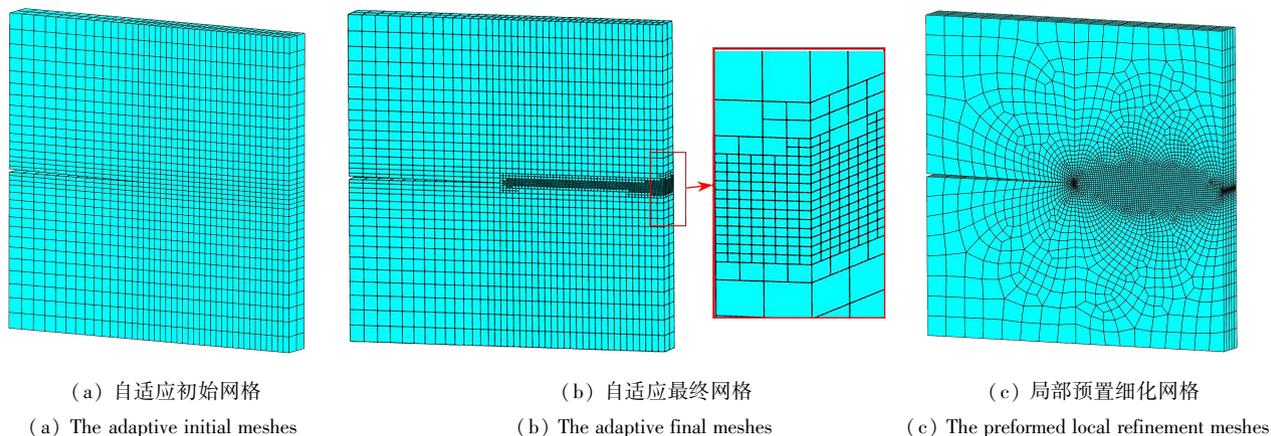


图 4 单槽方板拉伸的网格比较

Fig. 4 Meshes comparison for tension of the single groove square plate

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同。

表 1 单槽方板拉伸的节点数量、网格数量和 CPU 时间比较

Table 1 Comparison of node number, mesh number, and CPU time for tension of the single groove square plate

	node number	mesh number	CPU time t / min
preformed local refinement meshes	21 852	17 775	438
adaptive initial state	4 206	2 624	55
adaptive final state	12 148	8 756	

3.2 单槽带孔平板拉伸

该算例考虑拉伸载荷下的单槽带孔平板,其模型和初始网格如图 5(a)和 5(b)所示.相关参数为 $\lambda = 1.94$ GPa, $\mu = 2.45$ GPa, $g_c = 2.28$ N/mm, $l = 0.5$ mm, $r_{max} = 3$.平板底端固定,顶端在前 500 载荷步施加增量 $\Delta u = 1 \times 10^{-3}$ 的竖直位移,此后施加增量为 $\Delta u = 1 \times 10^{-4}$ 的竖直位移,直至完全断裂,采用六面体网格进行离散.采用自适应细化算法时,带孔矩形板的自适应网格、裂纹样式和断裂相场如图 5(d)—5(f)所示.由图可见,裂纹从槽的前缘沿直线扩展后向下偏转,延伸至孔边缘,然后在孔右端中心处萌生新裂纹,并向右沿直线扩展,于板右侧中心处完全断裂.自适应网格、裂纹样式和断裂相场三者符合得很好,说明了自适应细化算法的准确性和鲁棒性.Ambati 等^[7]对此算例进行了实验研究,得出的裂纹路径如图 5(c)所示.而自适应细化算法得出的裂纹扩展路径与其基本一致,从而再一次说明网格自适应算法可准确模拟裂纹,且网格可沿裂纹扩展路径自适应细化.

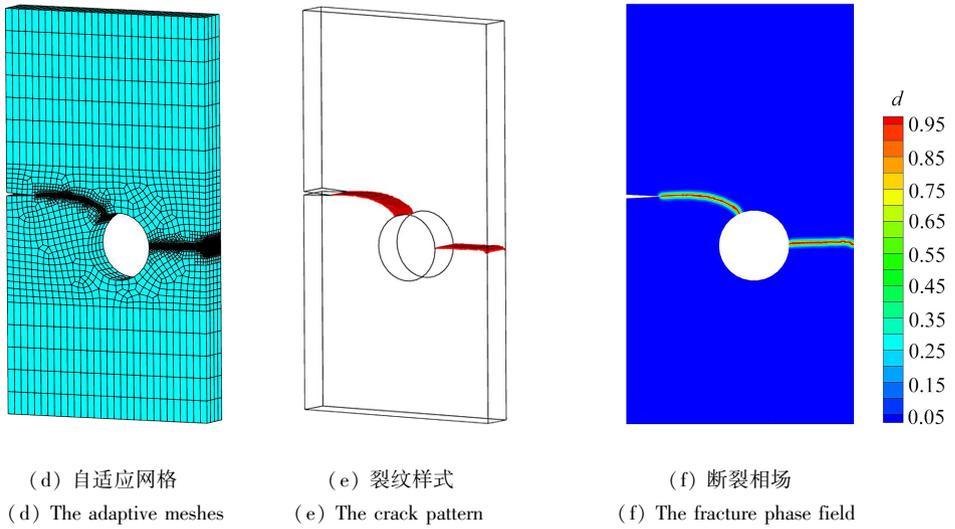
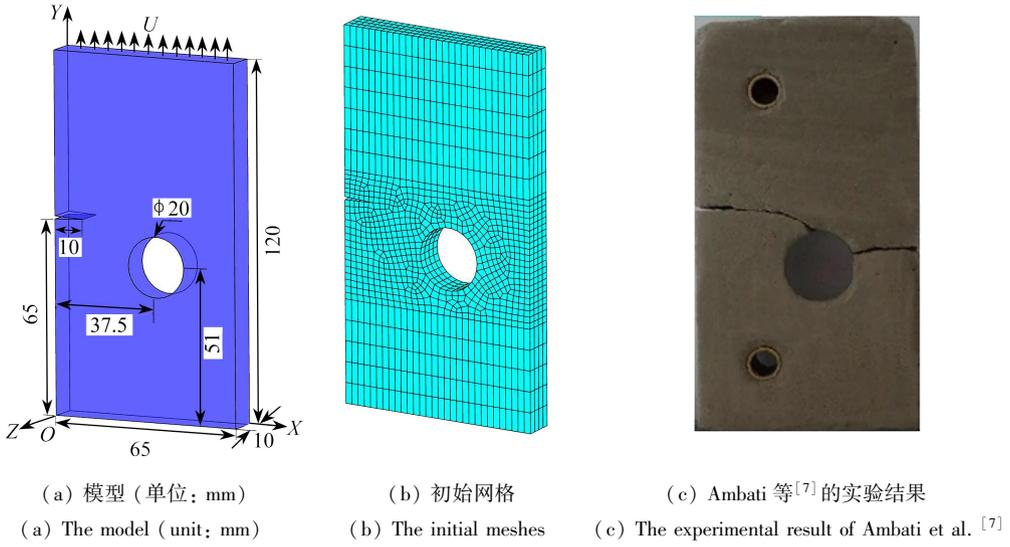


图 5 单槽带孔平板拉伸

Fig. 5 Tension of the single groove plate with a hole

3.3 双槽方板拉伸

该算例考虑拉伸载荷下的双槽方板,其模型和初始网格如图 6(a)和 6(b)所示.

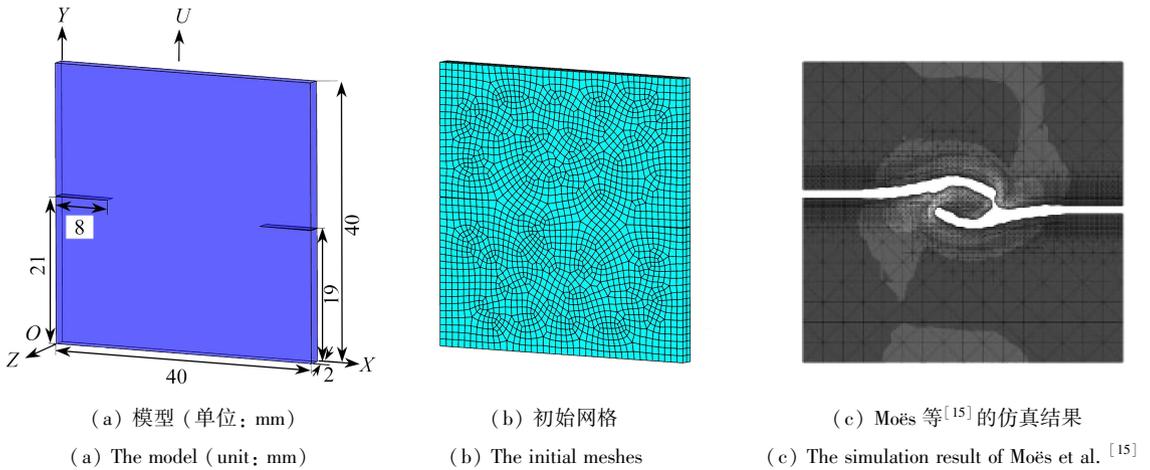


图 6 双槽方板拉伸

Fig. 6 Tension of the double groove square plate

Moës 等^[15] 对此算例进行了数值模拟研究, 得出的裂纹路径如图 6(c) 所示. 相关参数为 $E = 210 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$, $g_c = 2.7 \text{ N/mm}$, $l = 0.2 \text{ mm}$. 方板底端固定, 顶端在前 500 载荷步施加增量为 $\Delta u = 1 \times 10^{-4}$ 的竖直位移, 此后施加增量为 $\Delta u = 1 \times 10^{-5}$ 的竖直位移, 直至完全断裂, 采用六面体网格进行离散. 我们利用自适应细化算法, 比较了不同细化等级的断裂相场和自适应网格, 如图 7 所示. 当 $r_{\max} = 1$ 时, 裂纹扩展路径与 Moës 等^[15] 的仿真结果不符, 说明了较低的细化等级不足以正确模拟裂纹扩展; 而当 $r_{\max} = 2$ 和 $r_{\max} = 3$ 时, 裂纹路径均可被正确模拟, 但后者比前者更为精细; 当 r_{\max} 取更大值时, 裂纹的模拟效果无明显提升, 而更为密集的网格会造成计算效率的显著下降, 因此并无必要.

取 $r_{\max} = 3$, 双槽方板的断裂相场如图 8 所示, 自适应网格和裂纹样式如图 9 所示. 由图可见, 两条裂纹首先近似沿直线扩展, 在距离接近时并不直接汇聚, 但均会受到对方影响而使扩展方向发生偏转, 并形成“错位”现象, 断裂相场、自适应网格和裂纹样式三者符合得很好. 可以注意到, 网格自适应细化算法得到的裂纹扩展路径与 Moës 等^[15] 的仿真结果基本一致, 从而再一次验证了所发展算法的准确性和鲁棒性.

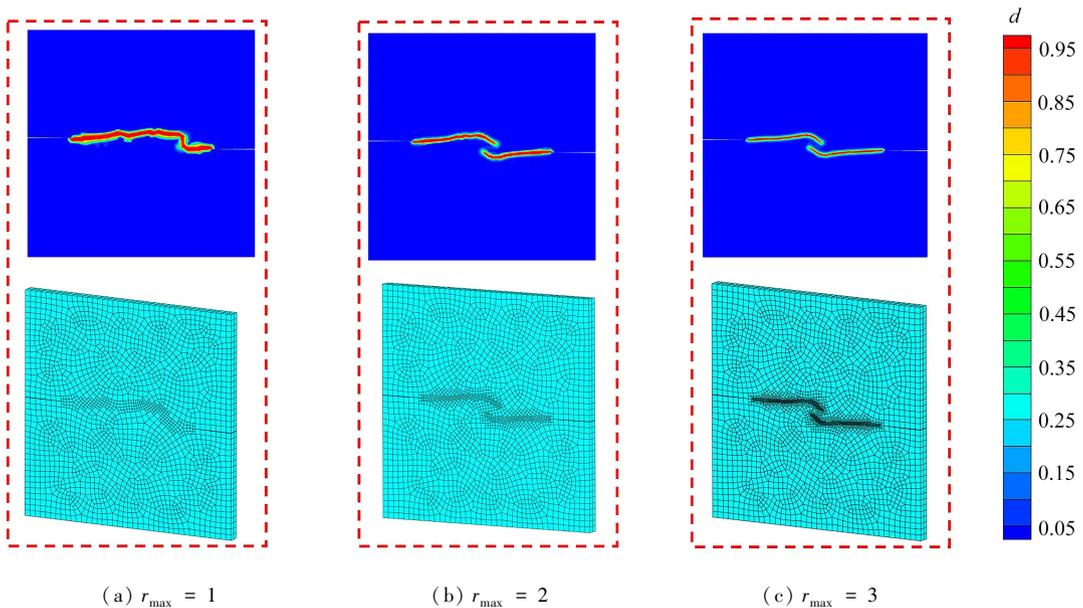


图 7 不同细化等级的断裂相场和自适应网格

Fig. 7 The fracture phase field and adaptive meshes with different refinement levels

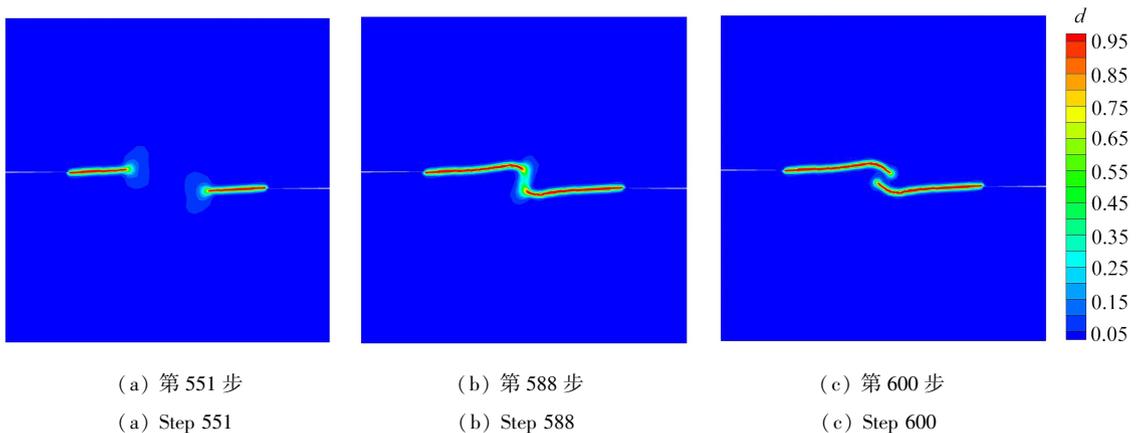


图 8 $r_{\max} = 3$ 时的断裂相场

Fig. 8 The fracture phase field for $r_{\max} = 3$

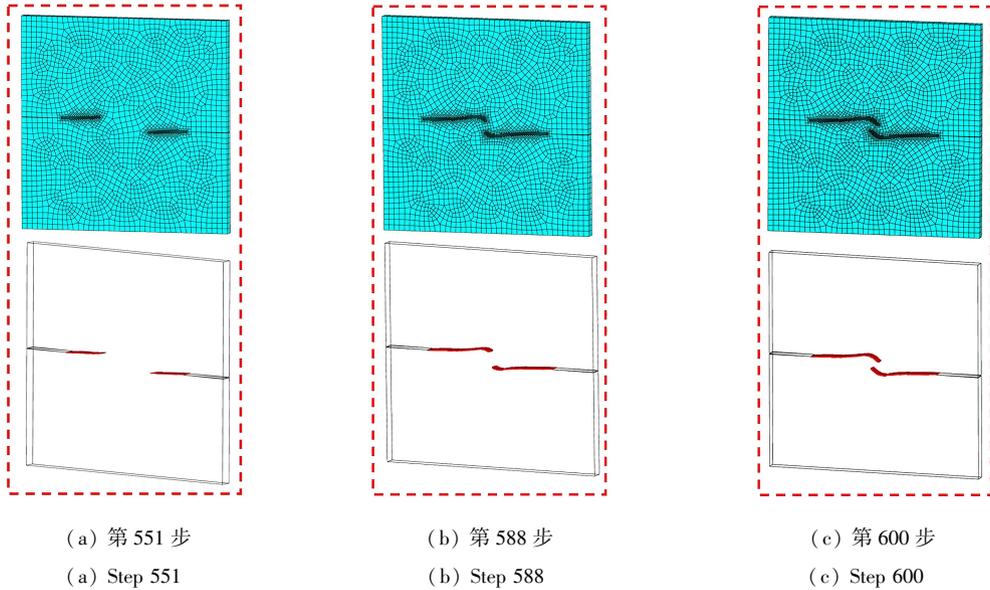


图 9 $r_{\max} = 3$ 时的自适应网格和裂纹样式

Fig. 9 Adaptive meshes and crack patterns for $r_{\max} = 3$

4 结 论

本文发展了预测-校正网格自适应细化算法,进行了断裂相场模型的三维自适应有限元分析,所得结论如下:

1) 本文建立的相场模型有限元分析方法能够准确地描述三维结构的裂纹扩展,扩展路径与经典实验结果或经典数值模拟结果基本一致;

2) 网格可以沿着结构的裂纹扩展路径自适应地局部细化,在满足高精度分析要求的同时,减少了网格中单元的数量,提高了计算效率;

3) 采用交错求解方案,每个加载步内位移场和相场均只需求解一个线性方程组,进一步提高了效率。

当然,本文所发展的方法也具有一定的缺陷:第一,自适应细化停止准则仅依靠人为设定的 r_{\max} ,过于简单,仍需要开发更智能的、不需要人为设定的停止准则,如基于后验误差估计的停止准则;第二,所发展的方法在处理韧性断裂、多物理场等更复杂的断裂问题时,仍具有一定的局限性。

不可否认的是,尽管具有以上缺陷,本文所发展的算法仍具有一定优势,能准确、鲁棒、高效地对三维复杂裂纹进行模拟,且是在十分成熟的有限元框架下开发的,因此,该算法完全能够胜任对实际工程结构中断裂问题的高效模拟,且可以展望其在动态断裂、复合材料、生物组织等更多领域的应用前景。

致谢 本文作者衷心感谢大连理工大学中白国际合作基金(ICR2203)对本文的资助。

参考文献 (References):

- [1] 唐红梅,周福川,陈松,等. 高烈度下双裂缝主控结构面危岩的断裂破坏机制分析[J]. 应用数学和力学, 2021, 42(6): 645-655. (TANG Hongmei, ZHOU Fuchuan, CHEN Song, et al. Analysis of the fracture failure mechanism of dangerous rocks with double crack main control structural planes under high intensity[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, 42(6): 645-655. (in Chinese))
- [2] 肖刘. 某型飞机机翼断裂分析[J]. 装备制造技术, 2013, 5: 132-133. (XIAO Liu. Analysis of wing fracture of a certain type of aircraft[J]. *Equipment Manufacturing Technology*, 2013, 5: 132-133. (in Chinese))
- [3] GRIFFITH A A. The phenomena of rupture and flow in solids[J]. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical Physical and Engineering Sciences*, 1920, A221(4): 163-198.
- [4] FRANCFORT G A, MARIGO J J. Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem[J]. *Journal of*

- the Mechanics & Physics of Solids*, 1998, **46**(8): 1319-1342.
- [5] BOURDIN B, FRANCFORT G A, MARIGO J J. Numerical experiments in revisited brittle fracture[J]. *Journal of the Mechanics & Physics of Solids*, 2000, **48**(4): 797-826.
- [6] MIEHE C, HOFACKER M, WELSCHINGER F. A phase field model for rate-independent crack propagation: robust algorithmic implementation based on operator splits[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010, **199**(45/48): 2765-2778.
- [7] AMBATI M, GERASIMOV T, LORENZIS L D. A review on phase-field models of brittle fracture and a new fast hybrid formulation[J]. *Computational Mechanics*, 2015, **55**(2): 383-405.
- [8] WU J Y, HUANG Y, ZHOU H, et al. Three-dimensional phase-field modeling of mode I + II / III failure in solids[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2021, **373**: 113537.
- [9] MOLNAR G, GRAVOUIL A. 2D and 3D Abaqus implementation of a robust staggered phase-field solution for modeling brittle fracture[J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2017, **130**: 27-38.
- [10] BURKE S, ORTNER C, SULI E. An adaptive finite element approximation of a variational model of brittle fracture[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2010, **48**(3): 980-1012.
- [11] ARTINA M, FORNASIER M, MICHELETTI S, et al. Anisotropic mesh adaptation for crack detection in brittle materials[J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2015, **37**(4): B633-B659.
- [12] HIRSHIKESH, JANSARI C, KANNAN K, et al. Adaptive phase field method for quasi-static brittle fracture based on recovery based error indicator and quadtree decomposition[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2019, **220**: 106599.
- [13] HEISTER T, WHEELER M F, WICK T. A primal-dual active set method and predictor-corrector mesh adaptivity for computing fracture propagation using a phase-field approach[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2015, **290**: 466-495.
- [14] LEE S, WHEELER M F, WICK T. Pressure and fluid-driven fracture propagation in porous media using an adaptive finite element phase field model[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2016, **305**: 111-132.
- [15] MOËS N, STOLZ C, BERNARD P E, et al. A level set based model for damage growth: the thick level set approach[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2011, **86**(3): 358-380.