

基于扩孔理论的劈裂注浆启劈压力解析*

何欢, 寇磊

(郑州大学 水利与交通学院, 郑州 450001)

摘要: 基于圆孔扩张理论, 结合 SMP (spatially mobilized plane) 强度准则与临界状态概念, 将变换应力后的张量应用于能描述软黏土各向异性的 Wheeler 模型, 对劈裂注浆中球孔扩张问题进行了分析. 采用双区间分析模型将土体分为弹性区和塑性区, 通过弹塑性区间边界条件, 推导了孔周土体的应力应变场和位移场, 对劈裂注浆后的土体扩张半径、启劈压力及塑性体应变进行理论计算, 并以算例进行了论证. 结果表明: 径向有效应力和环向有效应力随着参数 r/r_p 的增大而减小; 劈裂注浆的启劈压力随着内摩擦角数值的增大呈现上涨趋势; 内摩擦角是土体进行弹塑性分析时的一个重要影响因素, 当内摩擦角越大时, 塑性环向应变、塑性区半径、塑性区位移越小, 启劈压力越大.

关键词: 启劈压力; Wheeler 模型; SMP 强度准则; 球孔扩张

中图分类号: TU443 文献标志码: A DOI: 10.21656/1000-0887.440324

Analysis of Critical Fracturing Pressure of Splitting Grouting Based on the Cavity Expansion Theory

HE Huan, KOU Lei

(School of Water Conservancy and Transportation, Zhengzhou University,
Zhengzhou 450001, P.R.China)

Abstract: Based on the spherical cavity expansion theory, combined with the spatially mobilized plane (SMP) criterion and the critical state concept, the Wheeler model describing the anisotropy of soft clay was applied to analyze the spherical cavity expansion problem in split grouting. A dual interval analysis model was used to divide the soil into elastic and plastic zones, and the stress-strain and displacement fields of the soil around the cavity were derived under the elastic-plastic interval boundary conditions. Theoretical calculations of the soil expansion radius, the critical fracturing pressure, and the plastic volumetric strain after split grouting were carried out and demonstrated by several examples. The results show that, the radial and circumferential stresses decrease with parameter r/r_p ; the critical fracturing pressure increases with the internal friction angle; the internal friction angle is an important influential factor in the elastic-plastic analysis of the soil, and the larger the internal friction angle is, the smaller the plastic circumferential strain, the plastic radius and the plastic displacement, and the larger the splitting pressure, will be.

Key words: critical fracturing pressure; Wheeler model; SMP criterion; spherical cavity expansion

* 收稿日期: 2023-10-30; 修订日期: 2024-03-19

基金项目: 国家自然科学基金(51708512; 52079128)

作者简介: 何欢(1998—), 女, 硕士生 (E-mail: h2_strive@163.com);

寇磊(1983—), 男, 副教授, 博士(通讯作者. E-mail: koulei@zzu.edu.cn).

引用格式: 何欢, 寇磊. 基于扩孔理论的劈裂注浆启劈压力解析[J]. 应用数学和力学, 2024, 45(12): 1555-1566.

0 引言

随着城市地下空间的不断开发, 目前我国的注浆技术在施工病害修复中充当着较为重要的角色, 其中, 劈裂注浆通过注浆压力对土体进行压密, 促使土体产生裂纹并将浆液压入裂纹中, 从而在需加固的部分形成纵横交错的网状浆脉并为土体提供骨架支撑^[1]. 目前劈裂注浆已广泛应用于砂层强度的提高^[2-3]、堤坝防渗处理^[4]、隧道断层破碎带治理^[5]、土体加固和地基抬升^[6-8]、钢管桩承载力的提高^[9]等方面.

在劈裂注浆过程中, 针对土体弹塑性变化及扩散规律的研究常用圆形扩孔理论作为基础^[10]. 自 Vesic^[11] 提出圆孔扩张理论后, 其适用范围已扩展到了岩土工程领域, 而基于该理论根据地层的性质选择适合土体的本构模型与破坏准则有着十分重要的作用.

目前对注浆工程的启劈压力研究多采用的是 MC (Mohr-Coulomb) 强度准则和广义 SMP 强度准则. 周茗如等^[12] 结合 SMP 准则和 MC 准则等, 推导了不同理论下黄土地区不排水条件下的劈裂注浆压力预估公式, 并得到了 SMP 准则, 由于考虑了中主应力, 较传统 MC 模型的计算结果更加精确. 周亚龙等^[13] 结合广义 SMP 准则建立了复合式后注浆灌注桩荷载-沉降关系的计算方法, 得到了 SZ1 和 SZ2 桩终止注浆 5 min 内的平均注浆压力和桩顶最大抬升位移. 叶俊能等^[14] 采用广义 SMP 强度准则理论, 结合非相关联流动法则、土体弹塑性交界面上的边界条件和土体体积守恒定律, 得到了在注浆过程中土体发生劈裂破坏时的注浆压力解析表达式. 同时, 对软土的分析多采用的是 Cam-Clay 模型和修正 Cam-Clay 模型. 殷杰^[15] 同时考虑天然软黏土结构性和初始各向异性的影响, 基于修正 Cam-Clay 模型建立了包含 7 个独立参数的弹塑性本构模型. 李镜培等^[16-18] 采用基于 SMP 准则改进的 MCC (modified Cam-Clay) 修正 Cam-Clay 模型 (SMP-MCC) 和 AMCC (K_0 -based anisotropic modified Cam-Clay) 修正 Cam-Clay 模型 (K_0 -AMCC), 采用应力空间变换法推导了饱和黏土中柱孔弹塑性不排水圆柱空腔扩展的新解, 对柱孔扩张过程中孔壁周围土体应力的变化规律进行了研究. 左人宇等^[19] 通过室内试验测定了深圳某典型淤泥质黏土的修正 Cam-Clay 模型参数, 建立了所述软土 CU (consolidated undrain) 试验路径修正 Cam-Clay 模型的应力应变增量本构方程, 并通过计算值与试验值进行对比, 验证了修正 Cam-Clay 模型对于深圳海积软土的适用性. 周攀等^[20] 基于结构性黄土修正 Cam-Clay 模型, 在严格遵循平均有效应力与偏应力定义前提下, 针对排水柱孔扩张问题导出严密解, 研究了黄土地区原位测试、沉桩扩孔以及劈裂注浆等岩土工程问题.

虽然修正 Cam-Clay 模型发展较为完备, 但是它假设土体为各向同性材料, 且未考虑土的结构性这一重要因素. 基于上述分析, 本文在对于劈裂注浆的扩孔问题研究中, 选择能够反映原状软土地层各向异性的 Wheeler 模型^[21-22] 来代替 Cam-Clay 模型与修正 Cam-Clay 模型, 并通过变换应力方法将 Wheeler 模型本构与 SMP 强度准则相结合对劈裂注浆中圆形扩孔问题进行分析.

1 劈裂注浆不排水扩孔问题理论基础

1.1 SMP 强度准则

Matsuoka 等^[23-24] 提出的 SMP 强度准则在符合 MC 准则的基础上, 克服了 MC 强度理论所伴随的奇异性, 能够反映土体中主应力对理论分析的影响. 在三轴压缩条件下 SMP 强度准则可表示为

$$\frac{I_1 I_2}{I_3} - 8 \tan^2 \varphi - 9 = 0, \quad (1)$$

式中, I_1, I_2, I_3 分别为第一、第二、第三应力不变量; φ 为三轴压缩条件下土的内摩擦角.

为减少计算, 可以通过变换应力方法将三维主应力空间曲线形式的强度破坏面变换为变换应力空间的圆锥面^[25], 即将广义强度理论的表达式变换为扩展 Mises 准则的形式, 变换包含两部分:

1) 将子午面上的幂函数形式的破坏曲线变换为直线

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} + \left[p_r \left(\frac{p + \sigma_0}{p_r} \right)^n - p \right] \delta_{ij}, \quad (2)$$

式中, $\bar{\sigma}_{ij}$ 为过渡空间的应力张量; p_r 为参考平均应力; σ_0 为材料的三向拉伸强度; n 为特征参数; δ_{ij} 为 Kronecker 符号.

2) 将偏平面上的破坏曲线变换为圆

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \bar{p}\delta_{ij} + \frac{\bar{q}_a^*}{\bar{q}}(\bar{\sigma}_{ij} - \bar{p}\delta_{ij}), \tag{3}$$

式中, $\tilde{\sigma}_{ij}$ 为变换空间的应力张量; $\bar{q} = \sqrt{\frac{3}{2}(\bar{\sigma}_{ij} - \bar{p}\delta_{ij})(\bar{\sigma}_{ij} - \bar{p}\delta_{ij})}$; $\bar{p} = \frac{1}{3}\bar{\sigma}_{ii}$; $\bar{q}_a^* = q_c = M_i\bar{p}$.

对于球孔扩孔问题,球孔周围的土体假定为三轴压缩状态 ($\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$), SMP 准则进行变换应力后塑性区的屈服准则为

$$\tilde{\sigma}_r = A_1\tilde{\sigma}_\theta, \quad A_1 = \frac{1}{2}F - 1 = 4\tan^2\varphi + \frac{7}{2}. \tag{4}$$

1.2 Wheeler 模型

Wheeler 等^[21]提出的天然软土初始屈服面在 $p'-q$ 平面上为一倾斜的椭圆(图 1),椭圆的倾角斜度小于 K_0 线,但并非是关于 K_0 线对称,其在应力空间内的临界状态线(CSL)仍然为 M .图 1 中的 α 为 $p'-q$ 平面空间中的椭圆倾斜度的无量纲参数,同时 α 值是土壤塑性各向异性程度的量度,当 $\alpha = 0$ 时为修正 Cam-Clay 模型的屈服面.其在斜度为 α 的 a 线上的水平坐标为 p'_c , Wheeler 模型 $p'-q$ 曲线如图 1 所示,考虑变换应力的 Wheeler 屈服模型的屈服函数为

$$f = (\tilde{q} - \alpha\tilde{p})^2 - (M^2 - \alpha^2)(\tilde{p}'_c - \tilde{p})\tilde{p}, \tag{5}$$

式中, \tilde{q} 为变换空间的剪应力; α 为土体参数; \tilde{p} 为变换空间的静水压力; M 为应力比的临界状态值.

1.3 扩孔问题的基本假定

球孔扩张问题可以归结为轴对称平面问题,本文力学模型示意图如图 2 所示:考察初始半径为 a_0 的球孔,被均匀分布的初始应力 \tilde{p}_0 所扩张的问题.当初始应力 \tilde{p}_0 逐渐增大变成 \tilde{p} , 球孔半径也由初始半径 a_0 变为扩孔半径 a .当扩张压力 \tilde{p} 较小时,孔周土体处于弹性状态,其应力-应变关系满足广义 Hooke 定律;当压力 \tilde{p} 增加到临塑扩张压力 \tilde{p}_y 时,孔周围土体开始屈服出现塑性区,塑性关系服从 Wheeler 模型,塑性区半径将随着扩张压力 \tilde{p} 的增大而不断扩张,孔半径也将达到极限半径 a_u , 围绕孔的塑性区则扩大到了 r_p , 在半径 r_p 以外的土体仍将保持为弹性平衡状态, u_{rp} 为从塑性区到弹性区的扩张半径.

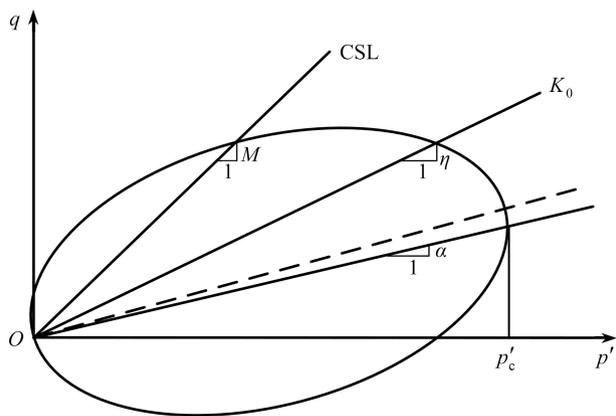


图 1 Wheeler 屈服曲线
Fig. 1 The Wheeler yield curve

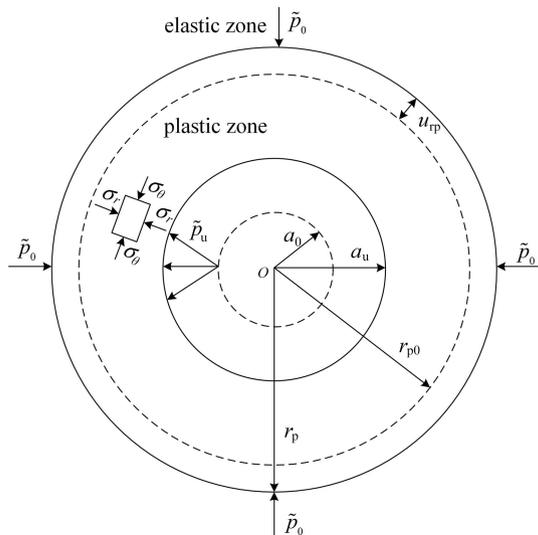


图 2 球孔扩张力学模型
Fig. 2 The mechanical model for spherical cavity expansion

2 启劈压力 \tilde{p}_u

2.1 r_p/a_u 表达式

在均布分布的内压力 \tilde{p} 作用于土体时,由球孔体积变化与孔周围土体弹塑性体积变化相等可得

$$1 = \left(\frac{r_p}{a}\right)^3 - \left(\frac{r_p - u_{rp}}{a}\right)^3 + \left(\frac{a_0}{a}\right)^3, \quad (6)$$

式中, r_p 为塑性区半径; u_{rp} 为弹性区到塑性区的扩张半径; a_0 为初始孔半径; a 为扩孔半径。

当小孔进行扩张时,随着 a 不断地增大最终成为 a_u , 则 $(a_0/a)^3$ 的大小无限趋近于 0, 最终可得 r_p 与 a_u 的关系式如下:

$$\frac{r_p}{a_u} = \sqrt[3]{1 + \left(\frac{r_p - u_{rp}}{a_u}\right)^3}. \quad (7)$$

2.2 弹塑性交界面位移 u_{rp} 表达式

弹性区的应力为

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_r = \tilde{p}_0 + (\tilde{p}_y - \tilde{p}_0) \left(\frac{r_p}{r}\right)^3, \\ \tilde{\sigma}_\theta = \tilde{p}_0 - \frac{1}{2}(\tilde{p}_y - \tilde{p}_0) \left(\frac{r_p}{r}\right)^3, \end{cases} \quad (8)$$

式中, $\tilde{\sigma}_r$ 为变换应力空间的径向应力; $\tilde{\sigma}_\theta$ 为变换应力空间的环向应力; \tilde{p}_y 为变换应力空间的临塑扩张压力; \tilde{p}_0 为变换应力空间的初始应力。

考虑初始应变 $\tilde{\varepsilon}_0$ 之后的弹性区位移为

$$u_r = \frac{\tilde{p}_y - \tilde{p}_0}{4G} \left(\frac{r_p}{r}\right)^3 r, \quad (9)$$

式中, G 为剪切模量。

在土体弹塑性交界处即 $r = r_p$ 时,弹性区的应力(8)有 $\tilde{\sigma}_r = \tilde{p}_y$, $\tilde{\sigma}_\theta = \tilde{p}_0 - (\tilde{p}_y - \tilde{p}_0)/2$, 联合变换应力后 SMP 强度准则(4)可得

$$\tilde{p}_y = \frac{3A_1\tilde{p}_0}{A_1 + 2}, \quad (10)$$

式中, A_1 为材料有关内摩擦角的表达式,当 \tilde{p}_0 固定时,可以得到 \tilde{p}_y 为一固定值。

根据式(9)中 u_r 的表达式可得

$$u_{rp} = \frac{(A_1 - 1)\tilde{p}_0}{2G(A_1 + 2)} r_p, \quad r = r_p. \quad (11)$$

2.3 $\tilde{p}_u - \tilde{p}_y - \tilde{p}_0$ 关系式

球孔轴对称问题下的平衡微分方程为^[26]

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \quad (12)$$

因为塑性应力区间同时满足平衡微分方程和变换应力后的 SMP 强度准则,结合式(4)可得变换应力后塑性区内径向正应力 $\tilde{\sigma}_r$ 与半径 r 之间的关系为

$$\tilde{\sigma}_r = A_2 r^{2/A_1 - 2}. \quad (13)$$

代入边界条件: $r = a$ 时, $\tilde{\sigma}_r = \tilde{p}$; $r = r_p$ 时, $\tilde{\sigma}_r = \tilde{p}_y$, 可得

$$A_2 = \tilde{\sigma}_r r^{2-2/A_1} = \tilde{p} a^{2-2/A_1} = \tilde{p}_y r_p^{2-2/A_1}. \quad (14)$$

浆液通过注浆压力的驱动进入土体,浆液在注浆孔内首先会挤密周围土体,当注浆压力达到一定值,即启劈压力时,浆液流动的同时会在土体薄弱部分形成浆脉通道.当扩孔半径 a 达到极限半径 a_u 时,其注浆压力 \tilde{p} 则达到启劈压力 \tilde{p}_u , 将上式进行转化可得排水条件下的启劈压力公式为

$$\tilde{p}_u = \tilde{p}_y \left(\frac{r_p}{a_u}\right)^{2-2/A_1}. \quad (15)$$

将式(7)、(11)代入式(15)可得 $\tilde{p}_u - \tilde{p}_y - \tilde{p}_0$ 的关系式:

$$\tilde{p}_u = \tilde{p}_y \left(\frac{1}{1 - \left(1 - \frac{(A_1 - 1)\tilde{p}_0}{2G(A_1 + 2)} \right)^3} \right)^{(2A_1 - 2)/(3A_1)} \quad (16)$$

3 塑性区位移 u_{rp}

3.1 塑性区应变 ε_θ^p 和 ε_θ^e 求解

将塑性区的应变分为弹性应变和塑性应变两个分量来进行计算,求出塑性区 ε_θ^p 和 ε_θ^e 表达式即可求得塑性区位移的解析式.其中弹性区的基本物理方程满足

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - 2\nu\sigma_\theta), \\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{E}[(1 - \nu)\sigma_\theta - \nu\sigma_r], \end{cases} \quad (17)$$

式中, E 为弹性模量; ν 为 Poisson 比; $\sigma_r, \sigma_\theta, \varepsilon_r$ 和 ε_θ 分别为径向应力、环向应力、径向应变和环向应变.

将式(13)、(14)和(4)代入式(17)中,可得塑性区中弹性应变:

$$\begin{cases} \varepsilon_r^e = \frac{A_1 - 1}{EA_1} \tilde{p}_y \left(\frac{r_p}{r} \right)^{2-2/A_1}, \\ \varepsilon_\theta^e = \frac{1}{E} \frac{1 - (1 - A_1)\nu}{A_1} \tilde{p}_y \left(\frac{r_p}{r} \right)^{2-2/A_1}, \end{cases} \quad (18)$$

式中, ε_r^e 为塑性区内径向弹性应变; ε_θ^e 为塑性区内环向弹性应变.

求解塑性区中的塑性变形选择非相关联流动法则,假定材料以恒定速率膨胀得出用塑性应变增量表示的非相关联流动法则,根据初始屈服时各向塑性应变为 0,则非相关联流动法则可以表示为^[27]

$$\frac{\varepsilon_r^p}{\varepsilon_\theta^p} = -\frac{2}{\alpha'}, \quad (19)$$

式中, ε_r^p 为塑性区内径向塑性应变; ε_θ^p 为塑性区内环向塑性应变; $\alpha' = 2\tan^2\psi [1 + (1 + \cot^2\psi)^{1/2}] + 1$; ψ 为剪胀角.

球对称问题中的变形协调方程为

$$\frac{d\varepsilon_\theta}{dr} + \frac{\varepsilon_\theta - \varepsilon_r}{r} = 0. \quad (20)$$

将上式细分,代入式(18)、(19)并求解可得 ε_θ^p 与 r 的关系式为

$$\varepsilon_\theta^p = Cr^{-(1+2/\alpha)} + [-r^{-(1+2/\alpha)} A_3 \tilde{p}_y r_p^{2-2/A_1}] r^{2/A_1+2/\alpha-1}, \quad (21)$$

式中, $A_3 = \frac{3 - 2(1 - A_1)\nu - A_1}{EA_1}$.

代入边界条件: $r = r_p$ 时, $\varepsilon_\theta^p = 0$, 可得 C 的表达式为

$$C = A_3 p_y r_p^{1+2/\alpha}. \quad (22)$$

故 $\varepsilon_\theta^p, \varepsilon_r^p$ 的表达式如下:

$$\begin{cases} \varepsilon_\theta^p = A_3 \tilde{p}_y (r_p^{1+2/\alpha} r^{-(1+2/\alpha)} - r_p^{2-2/A_1} r^{2/A_1-2}), \\ \varepsilon_r^p = -\frac{2}{\alpha} A_3 \tilde{p}_y - \frac{2}{\alpha} A_3 \tilde{p}_y [r_p^{1+2/\alpha} r^{-(1+2/\alpha)} - r_p^{2-2/A_1} r^{2/A_1-2}]. \end{cases} \quad (23)$$

3.2 $u_{rp} - \tilde{p}_y - r_p/r$ 关系式

轴对称问题下的几何方程为

$$\begin{cases} \varepsilon_r = -\frac{\partial u}{\partial r}, \\ \varepsilon_\theta = -\frac{u}{r}. \end{cases} \quad (24)$$

根据增量弹塑性理论可得

$$u = -(\varepsilon_{\theta}^p + \varepsilon_{\theta}^e)r. \quad (25)$$

将应变关系式(18)、(23)代入式(25)可得

$$u_{\text{tp}} = -\left(\frac{-2 + (1 - A_1)\nu + A_1}{EA_1}\tilde{p}_y\left(\frac{r_p}{r}\right)^{2-2/A_1} + A_3\tilde{p}_y\left(\frac{r_p}{r}\right)^{1+2/\alpha}\right). \quad (26)$$

4 塑性体应变 ε_v^p

根据塑性条件有

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{p}} d\tilde{p} + \frac{\partial f}{\partial \tilde{q}} d\tilde{q} + \frac{\partial f}{\partial \tilde{p}_c} d\tilde{p}_c = 0. \quad (27)$$

将式(5)代入式(27)并变形可以得到

$$\begin{cases} d\tilde{p}_c = \frac{[2M^2\tilde{p} - 2\alpha\tilde{q} - (M^2 - \alpha^2)\tilde{p}_c]d\tilde{p} + [2(\tilde{q} - \alpha\tilde{p})]d\tilde{q}}{(M^2 - \alpha^2)\tilde{p}}, \\ d\tilde{p} = \frac{[2(\tilde{q} - \alpha\tilde{p})]d\tilde{q} - [(M^2 - \alpha^2)\tilde{p}]d\tilde{p}_c}{-[2M^2\tilde{p} - 2\alpha\tilde{q} - (M^2 - \alpha^2)\tilde{p}_c]}. \end{cases} \quad (28)$$

则塑性区弹性、塑性体应变的表达式为

$$\begin{cases} d\varepsilon_v^p = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e_0} \frac{d\tilde{p}_c}{\tilde{p}_c}, \\ d\varepsilon_v^e = \frac{\kappa}{1 + e_0} \frac{d\tilde{p}}{\tilde{p}}, \end{cases} \quad (29)$$

式中, λ 为 $\nu' \cdot \ln p'$ 空间中屈服压缩线的斜率; κ 为 $\nu' \cdot \ln p'$ 空间中膨胀线的斜率; ν' 为比体积; e_0 为各向同性加载后的初始孔隙比.

上式中未含有 \tilde{q} , 故需将其进行替换, 在 Wheeler 屈服模型中 $\eta = q/\tilde{p}$, $\alpha = \tilde{q}/\tilde{p}_c$, 即 $\tilde{q} = \eta\tilde{p}$, $\tilde{q} = \alpha\tilde{p}_c$, 对其进行求微分可得

$$d\tilde{q} = \eta d\tilde{p} + \tilde{p} d\eta, \quad d\tilde{q} = \alpha d\tilde{p}_c + \tilde{p}_c d\alpha. \quad (30)$$

由于球孔扩张过程中处于不排水状态, 则塑性区总体应变 $d\varepsilon_v = 0$, 故有

$$d\varepsilon_v = \frac{\kappa}{1 + e_0} \left[\frac{2\eta(\eta - \alpha)\tilde{p}d\tilde{p} + 2(\eta - \alpha)\tilde{p}^2d\eta}{[(M^2 - \alpha^2)\tilde{p}_c - (2M^2 - 2\alpha\eta)\tilde{p}]\tilde{p}} - \frac{[(M^2 - \alpha^2)\tilde{p}]d\tilde{p}_c}{[(M^2 - \alpha^2)\tilde{p}_c - (2M^2 - 2\alpha\eta)\tilde{p}]\tilde{p}} \right] + c_p \left[-\frac{d\tilde{p}}{\tilde{p}} + \frac{2(\eta - \alpha)\tilde{p}d\eta}{(M^2 - \alpha^2)\tilde{p}_c} + \frac{(2M^2 - 4\alpha\eta + 2\eta^2)d\tilde{p}}{(M^2 - \alpha^2)\tilde{p}_c} \right], \quad (31)$$

式中, $c_p = (\lambda - \kappa)/(1 + e_0)$.

当孔周围土体达到临界破坏状态时, 应满足破坏条件: $du(\partial f/\partial \tilde{p}) = 0$, 其中 du 为加载因子, 由于 $du > 0$, 所以可得 $\partial f/\partial \tilde{p} = 0$, 故当到达临界状态时:

$$\tilde{p}_c = \frac{2(M^2 - \alpha\eta)}{M^2 - \alpha^2} \tilde{p}. \quad (32)$$

在土力学中定义土体进入临界状态时, 土体体应变增量 $d\varepsilon_v$ 为 0, 则可得

$$d\varepsilon_v = d\varepsilon_v^p + d\varepsilon_v^e = 0. \quad (33)$$

将式(28)、(32)代入 $d\varepsilon_v^p$ 表达式可得

$$d\varepsilon_v^p = c_p \left[\frac{(M^2 - 2\alpha\eta + \eta^2)}{(M^2 - \alpha\eta)\tilde{p}} d\tilde{p} - \frac{d\tilde{p}}{\tilde{p}} + \frac{(\eta - \alpha)d\eta}{M^2 - \alpha\eta} \right]. \quad (34)$$

假设塑性区某点 (\tilde{p}, \tilde{q}) 从临塑应力状态 $(\tilde{p}_y, \tilde{q}_y)$ 开始在塑性区内积分, 则塑性体应变有

$$\varepsilon_v^p = c_p \left[\frac{\eta^2 - \alpha\eta}{M^2 - \alpha\eta} \ln \tilde{p} + c_p \tilde{p} \left[\frac{\eta^2}{2(M^2 - \alpha\eta)} + \frac{1}{6} \alpha\eta^3 + \ln(M^2 - \alpha\eta) \right] \right]. \quad (35)$$

5 算例和讨论

5.1 模型验证

为验证本文提出模型的正确性和适用性,选用文献[28-29]的结果进行对比分析。

选用文献[29]在 SMP 强度准则下的非饱和土体扩孔弹塑性解析结果进行对比分析,研究不排水条件下土体扩孔问题中塑性区应力与参数 r/r_p 的关系,并取相同参数: $\tilde{p}_0 = 1\ 000\ \text{kPa}$, $\nu = 0.35$, $E = 3\ 000\ \text{kPa}$ 。本文在不同摩擦角 φ ($27^\circ, 35^\circ$) 下径向有效应力 $\tilde{\sigma}_r$ 和环向有效应力 $\tilde{\sigma}_\theta$ 与参数 r/r_p 的关系如图 3 所示。

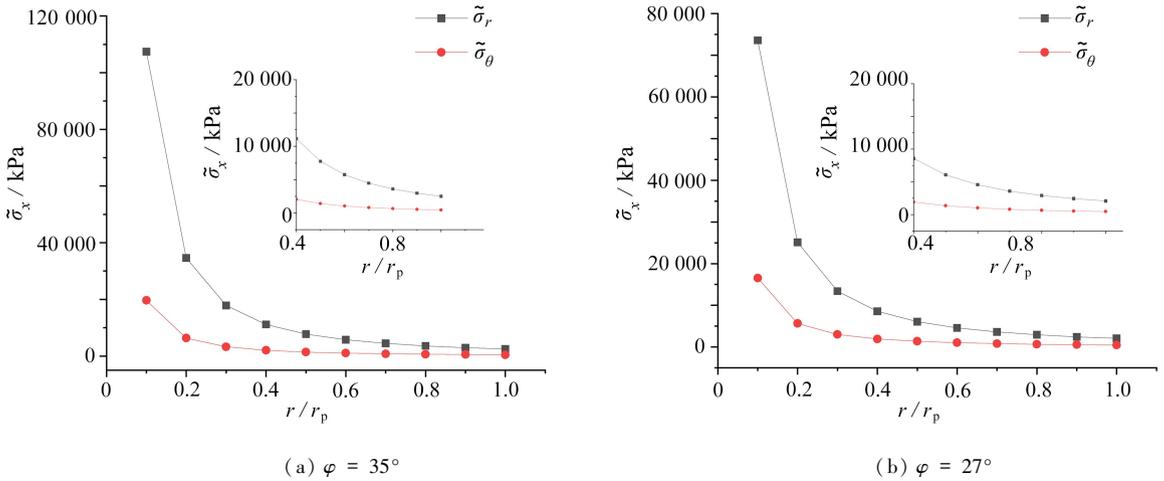


图 3 有效应力与参数 r/r_p 之间的关系

Fig. 3 Relationships between the effective stress and parameter r/r_p

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同。

从图 3 中可以看出,径向有效应力和环向有效应力随着参数 r/r_p 的增大而减小,当参数越靠近 0 时,非线性关系越明显,图线变化的转折点均集中于点 $r/r_p = 0.4$ 左右,当参数 $r/r_p \geq 0.4$ 时,有效应力的降低幅度越小且数值趋于 0。数据与文献[29]中关于环向有效应力与径向有效应力的变化趋势一致,即与参数 r/r_p 的关系均呈现非线性向线性的转变。

选用文献[28]在圆孔扩张理论中基于不同内摩擦角对劈裂注浆控制压力的研究内容进行对比,验证本文中关于启劈压力的理论计算式的可适用性,拟定参数: $\nu = 0.3$, $E_s = 4\ \text{MPa}$, $\tilde{p}_0 = 0.05\ \text{kPa}$ 。其启劈压力变化趋势如表 1 所示。

表 1 启劈压力对比数值

Table 1 Comparative values of the critical fracturing pressure

$\varphi / (^\circ)$	ref. [28]		this papaer	
	p_{shui}/kPa	relative increment	\tilde{p}_u/kPa	relative increment
26	598.1	0.030 2	34.7	0.031 7
27	616.7	0.029 4	35.8	0.032 4
28	635.4	0.028 9	37.0	0.033 0
29	654.3	0.028 2	38.3	0.033 5
30	673.3	0.078 7	39.6	0.099 8
33	730.8		44.0	

表 1 展示了启劈压力随着内摩擦角数值的增大呈现上涨趋势,且相对增量基本一致,与文献[28]计算数值的变化趋势基本类似。同时,文献[28]经过实际工程验证,保证了其数据变化趋势符合实际工程情况,故本文启劈压力的理论计算式也具有工程可适用性。

5.2 经典模型对比

Wheeler 模型相较于修正 Cam-Clay 模型仅多出一个描述土体各向异性的 a 值,参考文献[30]中通过室

内试验得到的原状黄土的 α 值,选取相同参数: $M = 1.4, \lambda = 0.17, \kappa = 0.031, e_0 = 1.095$, 讨论在 $p = 100$ kPa 作用下, MCC 模型与 Wheeler 模型中剪应力 \tilde{q} 与塑性体应变 ε_v^p 关系的对比结果,如图 4 所示。

从图 4 中可以看出,剪应力与塑性体应变之间呈正相关关系,当剪应力为 0 时,原状黄土已产生了一定的塑性体应变,说明此时土体应力达到屈服面,考虑土体弹性体应变一般为线性关系,本文得出的塑性体应变与文献[30]中由 Wheeler 与 MCC 模型得到的体应变变化趋势一致,即在剪应力值较小时, Wheeler 模型得到的应变值相较于 MCC 模型的较大,当剪应力值达到一定值时, Wheeler 模型计算得到的值相较于 MCC 模型的较小.因此,结合文献[30]中有关试验值与模型值的对比结论,考虑结构各向异性的 Wheeler 模型能更好地模拟原状软土的应力应变特性。

5.3 参数分析

5.3.1 土体应变影响因素分析

选定参数 $\tilde{p}_0 = 1\ 000$ kPa, $\nu = 0.35, \psi = 30^\circ, E = 3\ 000$ kPa, 研究内摩擦角 φ 对塑性环向应变 ε_θ^p 的影响,结果如图 5 所示。

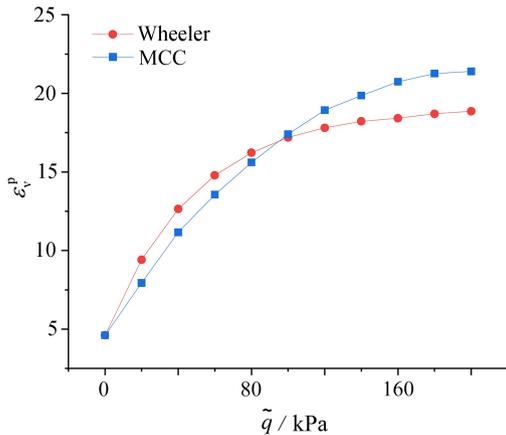


图 4 剪应力与塑性体应变之间的关系

Fig. 4 Relationships between the shear stress and the plastic volumetric strain

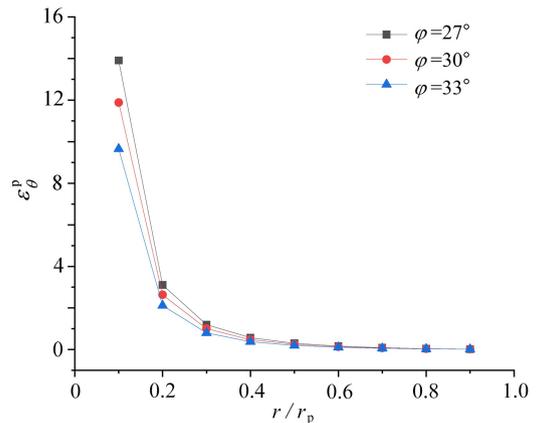


图 5 内摩擦角对塑性环向应变的影响

Fig. 5 Effects of the internal friction angle on the plastic circumferential strain

从图 5 中可以看出,塑性环向应变随着参数 r/r_p 的增加呈现递减趋势,当 $r/r_p \geq 0.4$ 时,塑性环向应变的减小速率逐渐趋于 0,并且离弹塑性交界面处越近时应变的数值越小.同时在相同条件下,摩擦角越大则塑性环向应变越小,离扩孔中心越近时摩擦角的影响效果越大,当 $r/r_p \geq 0.3$ 时,内摩擦角的变化对于塑性环向应变的影响程度逐渐减小。

5.3.2 土体塑性区半径影响因素分析

对剪胀角 ψ 与内摩擦角 φ , 分别分析其对劈裂注浆过程中塑性半径的影响趋势.令 $\tilde{p}_0 = 1\ 000$ kPa, 分析剪胀角 ψ 时令内摩擦角 φ 为 30° , 分析内摩擦角 φ 时令剪胀角 ψ 为 30° , 结果如图 6 所示。

从图 6(a)中可以看出,塑性半径会随着注浆压力的提高随之增加,且增加趋势渐缓.同等注浆压力下剪胀角越大时,塑性半径的数值和变化幅度越大,剪胀角表示土体剪切过程体积变化的情况,同剪胀角基本性质相同。

对比图 6(a)与图 6(b)可得,内摩擦角对于塑性半径的影响小于剪胀角对于塑性半径的影响.两图中塑性半径的变化趋势类似,不同的是在图 6(b)中,同等条件下内摩擦角越小,所得的塑性半径数值越大,当劈裂注浆压力较小时,内摩擦角对于塑性半径的影响相对较小,基本可以忽略不计。

5.3.3 土体塑性区位移影响因素分析

本小节选取内摩擦角 φ 、初始应力 \tilde{p}_0 两个影响因素对土体塑性区位移的影响进行分析.选用参数: $\nu = 0.35, E = 3\ 000$ kPa, 剪胀角 ψ 宜选取内摩擦角 φ 的一半作为计算值^[31].具体结果如图 7 所示。

从图 7(a)中可以看出,其整体趋势与图 4 类似,塑性区位移随着参数 r/r_p 增大呈非线性递减,在相同条件下内摩擦角越大则塑性区位移数值越小,且影响效果随 r/r_p 的增大而递减,当 $r/r_p \geq 0.4$ 时,内摩擦角对塑

性区位移的影响程度逐渐趋于 0。

由图 7(b)可得,初始应力与塑性区位移呈线性递增关系,当初始应力为固定数值时,内摩擦角越小则塑性区位移越大,并且随着初始应力的增加,内摩擦角对塑性区半径的影响程度逐渐增大。

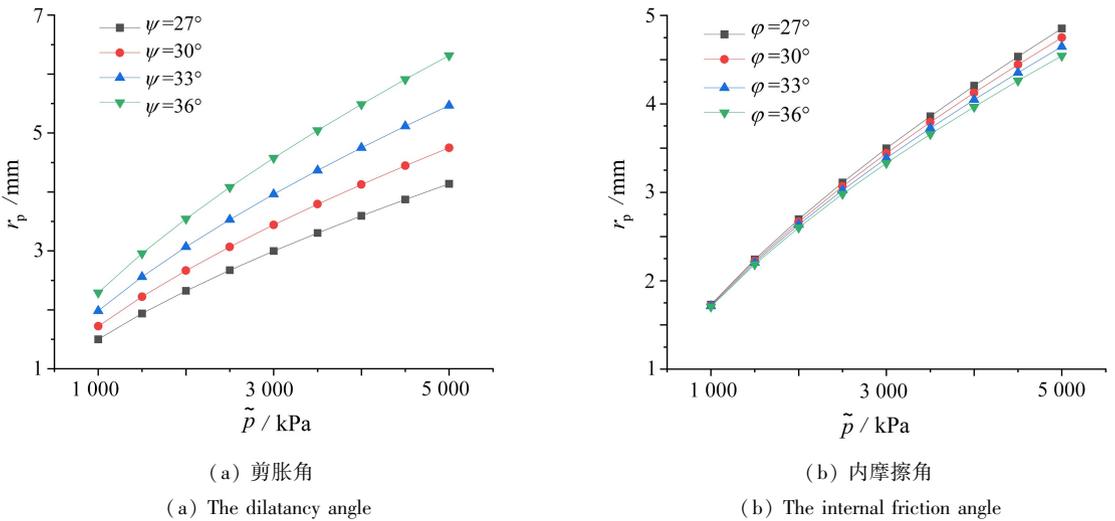


图 6 塑性半径影响因素分析

Fig. 6 Impact analysis of plastic radius

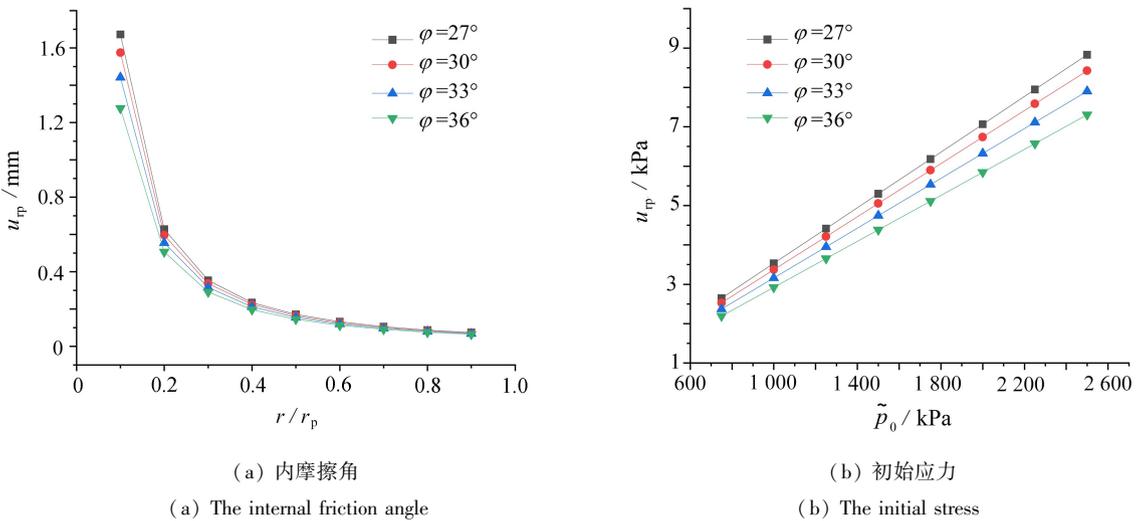


图 7 塑性区位移影响分析

Fig. 7 Impact analysis of displacements in the plastic zone

5.3.4 启劈压力影响因素分析

1) Poisson 比和弹性模量对启劈压力影响分析

考虑影响因素 Poisson 比 ν 、弹性模量 E 对于启劈压力的影响趋势,结果如图 8 所示。

从图 8 中可以看出,启劈压力在内摩擦角增大的情况下均呈现上升状态,且上升幅度越来越大,变化趋势与表 1 类似。Poisson 比与弹性模量对于启劈压力的影响状态相反,在相同内摩擦角下,Poisson 比与启劈压力呈负相关,而弹性模量与启劈压力呈正相关。

2) 土体初始应力对启劈压力影响分析

拟定参数 $\nu = 0.3, E = 3\,000\text{ kPa}$, 考虑在不同内摩擦角 φ ($27^\circ, 30^\circ, 33^\circ, 36^\circ$) 下初始应力 \tilde{p}_0 与启劈压力 \tilde{p}_u 的关系,具体表现趋势如图 9 所示。

从图 9 中可以看出:初始应力与启劈压力呈线性关系,当初始应力越大时,所需要的启劈压力越大,并且当内摩擦角越大,启劈压力增长的幅度越大;在同一初始应力状态时,内摩擦角越大土体强度越大,所需要的

启劈压力越大,与实际劈裂注浆过程中启劈压力变化的基本趋势相符。

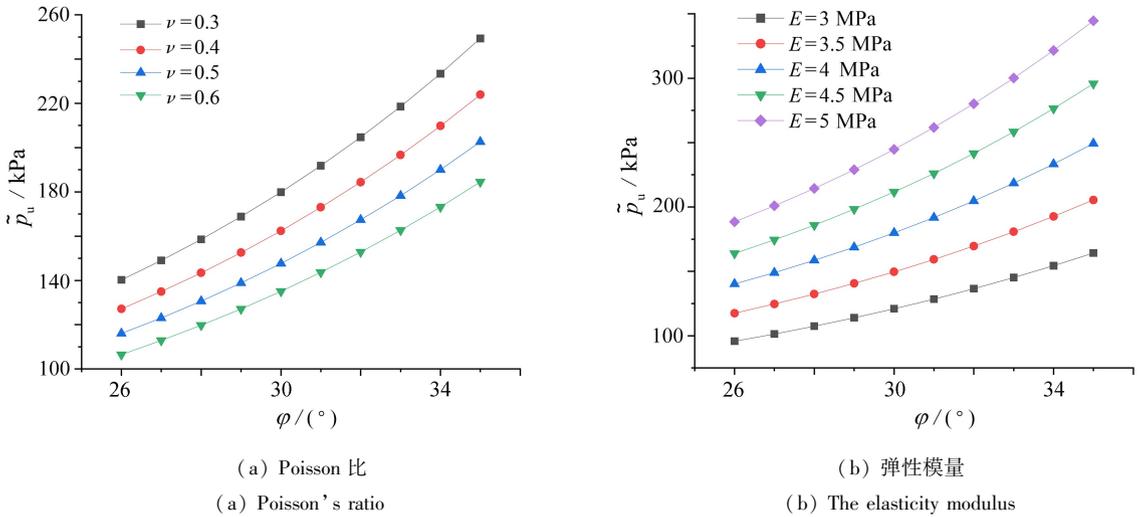


图 8 启劈压力影响分析

Fig. 8 Impact analysis of the critical fracturing pressure

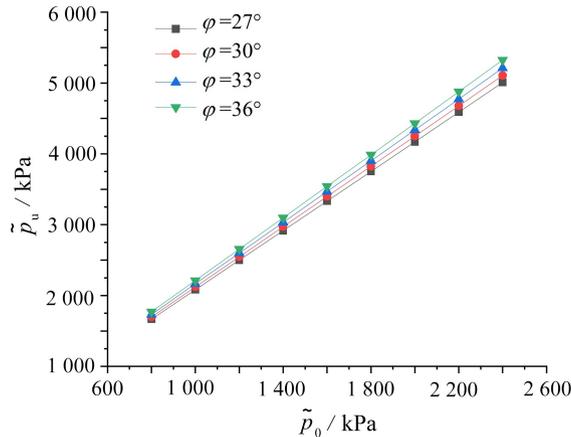


图 9 初始应力对启劈压力的影响

Fig. 9 Effects of the initial stress on the critical fracturing pressure

6 结 论

1) 基于圆孔扩张理论建立原状不排水土体扩孔问题弹塑性分析模型,将变换应力后的 SMP 强度准则与 Wheeler 模型相结合,通过弹塑性区间边界条件,推导了孔周土体弹性区和塑性区的应力应变公式,对劈裂注浆后的启劈压力、塑性区位移及塑性体应变进行了理论分析。

2) 对塑性环向应变、塑性区半径、土体塑性区位移和启劈压力的影响因素进行了分析,经参数分析发现,内摩擦角是土体进行弹塑性分析时的一个重要影响因素,当内摩擦角越大时,塑性环向应变、塑性区半径、塑性区位移越小,启劈压力越大。

参考文献 (References):

- [1] 马连生, 王腾, 周茗如, 等. 黄土劈裂注浆土体裂纹扩展模型研究[J]. 地下空间与工程学报, 2018, 14(4): 962-967. (MA Liansheng, WANG Teng, ZHOU Mingru, et al. Study on the crack extended model for loess with fracturing grouting[J]. *Chinese Journal of Underground Space and Engineering*, 2018, 14(4): 962-967. (in Chinese))
- [2] 沙飞, 李术才, 刘人太, 等. 富水砂层高效注浆材料试验与应用研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2019, 38(7):

- 1420-1433. (SHA Fei, LI Shucui, LIU Rentai, et al. Performance and engineering application of effective microfine cement-based grout(EMCG) for water-rich sand strata[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2019, **38**(7): 1420-1433.(in Chinese))
- [3] 张连震, 刘人太, 张庆松, 等. 软弱地层劈裂-压密注浆加固效果定量计算方法研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2018, **37**(5): 1169-1184. (ZHANG Lianzhen, LIU Rentai, ZHANG Qingsong, et al. Calculation of reinforcement effect of fracturing-compaction grouting in soft strata[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2018, **37**(5): 1169-1184.(in Chinese))
- [4] 石明生, 王复明, 刘恒, 等. 堤坝高聚物定向劈裂注浆试验与有限元模拟[J]. 水利学报, 2016, **47**(8): 1087-1092. (SHI Mingsheng, WANG Fuming, LIU Heng, et al. Finite-element simulation and experiment on polymer directional fracturing and grouting for dykes and dams[J]. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2016, **47**(8): 1087-1092.(in Chinese))
- [5] 李术才, 张伟杰, 张庆松, 等. 富水断裂带优势劈裂注浆机制及注浆控制方法研究[J]. 岩土力学, 2014, **35**(3): 744-752. (LI Shucui, ZHANG Weijie, ZHANG Qingsong, et al. Research on advantage-fracture grouting mechanism and controlled grouting method in water-rich fault zone[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2014, **35**(3): 744-752. (in Chinese))
- [6] 李鹏, 张庆松, 张霄, 等. 基于模型试验的劈裂注浆机制分析[J]. 岩土力学, 2014, **35**(11): 3221-3230. (LI Peng, ZHANG Qingsong, ZHANG Xiao, et al. Analysis of fracture grouting mechanism based on model test [J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2014, **35**(11): 3221-3230.(in Chinese))
- [7] 张乐文, 辛冬冬, 丁万涛, 等. 基于基床系数法的劈裂注浆过程分析[J]. 岩土工程学报, 2018, **40**(3): 399-407. (ZHANG Lewen, XIN Dongdong, DING Wantao, et al. Process analysis of split grouting based on foundation bed coefficient method[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2018, **40**(3): 399-407.(in Chinese))
- [8] 李建斌, 刘汉龙, 孔纲强, 等. 侧向辐射注浆技术处治现役高速公路沉降分析[J]. 岩土力学, 2017, **38**(S1): 479-487. (LI Jianbin, LIU Hanlong, KONG Gangqiang, et al. Analysis of settlement of reinforced operating expressway using lateral radiation grouting technique[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2017, **38**(S1): 479-487.(in Chinese))
- [9] 文磊, 孔纲强, 张振东, 等. 海相淤泥质土中后注浆微型钢管桩浆液扩散及承载特性研究[J]. 工程力学, 2019, **36**(4): 214-220. (WEN Lei, KONG Gangqiang, ZHANG Zhendong, et al. Study on the diffusion and bearing capacity of post-grouting steel pipe micropiles in marine muddy soil[J]. *Engineering Mechanics*, 2019, **36**(4): 214-220.(in Chinese))
- [10] 党星海, 周鹏, 钞鑫, 等. 非饱和黄土中椭球形扩孔问题弹塑性解析[J]. 应用数学和力学, 2020, **41**(9): 994-1010. (DANG Xinghai, ZHOU Peng, CHAO Xin, et al. Elastoplastic analysis of ellipsoidal hole expansion in unsaturated loess[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, **41**(9): 994-1010.(in Chinese))
- [11] VESIĆ A S. Expansion of cavities in infinite soil mass[J]. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, 1972, **98**(3): 265-290.
- [12] 周茗如, 张建斌, 卢国文, 等. 扩孔理论在非饱和黄土劈裂注浆中的应用[J]. 建筑结构学报, 2018, **39**(S1): 368-378. (ZHOU Mingru, ZHANG Jianbin, LU Guowen, et al. Application of expansion hole theory in fracture grouting of unsaturated loess[J]. *Journal of Building Structures*, 2018, **39**(S1): 368-378.(in Chinese))
- [13] 周亚龙, 王旭, 张延杰, 等. 灌注桩基础桩底复合式后注浆及承载特性研究[J]. 岩土工程学报, 2022, **44**(10): 1864-1872. (ZHOU Yalong, WANG Xu, ZHANG Yanjie, et al. Composite post grouting at pile tip and bearing characteristics of cast-in-place pile foundation[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2022, **44**(10): 1864-1872.(in Chinese))
- [14] 叶俊能, 胡威, 周晔, 等. 基于广义 SMP 强度准则的球孔注浆理论计算及验证[J]. 工业建筑, 2023, **53**(5): 150-157. (YE Junneng, HU Wei, ZHOU Ye, et al. Theoretical calculations and verification of spherical cavity grouting based on generalized SMP strength criterion[J]. *Industrial Construction*, 2023, **53**(5): 150-157.(in Chinese))
- [15] 殷杰. 结构性软黏土的修正剑桥模型[J]. 工程力学, 2013, **30**(1): 190-197. (YIN Jie. A modified Cam Clay model for structured soft clays[J]. *Engineering Mechanics*, 2013, **30**(1): 190-197.(in Chinese))

- [16] 李镜培, 唐剑华, 李林, 等. 饱和黏土中柱孔三维弹塑性扩张机制研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2016, **35**(2): 378-386. (LI Jingpei, TANG Jianhua, LI Lin, et al. Mechanism of three dimensional elastic-plastic expansion of cylindrical cavity in saturated clay[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2016, **35**(2): 378-386. (in Chinese))
- [17] LI J P, LI L, SUN D A, et al. Analysis of undrained cylindrical cavity expansion considering three-dimensional strength of soils[J]. *International Journal of Geomechanics*, 2016, **16**(5): 04016017.
- [18] LI J P, GONG W B, LI L, et al. Drained elastoplastic solution for cylindrical cavity expansion in K_0 -consolidated anisotropic soil[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2017, **143**(11): 04017133.
- [19] 左人宇, 罗锦华, 陆钊. 深圳海积软土基于 CU 试验的修正剑桥模型[J]. 地下空间与工程学报, 2016, **12**(3): 646-655. (ZUO Renyu, LUO Jinhua, LU Zhao. Modified Cam-Clay model based on the CU test about marine soft soil in Shenzhen[J]. *Chinese Journal of Underground Space and Engineering*, 2016, **12**(3): 646-655. (in Chinese))
- [20] 周攀, 李镜培, 李亮, 等. 结构性黄土排水柱孔扩张问题弹塑性解析[J]. 岩石力学与工程学报, 2021, **40**(1): 175-186. (ZHOU Pan, LI Jingpei, LI Liang, et al. Elastic-plastic solution for drained cylindrical cavity expansion in structured loess[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2021, **40**(1): 175-186. (in Chinese))
- [21] WHEELER S J, NÄÄTÄNEN A, KARSTUNEN M, et al. An anisotropic elastoplastic model for soft clays[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 2003, **40**(2): 403-418.
- [22] KARSTUNEN M, KOSKINEN M. Plastic anisotropy of soft reconstituted clays[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 2008, **45**(3): 314-328.
- [23] MATSUOKA H, NAKAI T. Stress-deformation and strength characteristics of soil under three different principal stresses[J]. *Proceedings of the Japan Society of Civil Engineers*, 1974, **1974**(232): 59-70.
- [24] MATSUOKA H, SUN D. Extension of spatially mobilized plane (SMP) to frictional and cohesive materials and its application to cemented sands[J]. *Soils and Foundations*, 1995, **35**(4): 63-72.
- [25] 姚仰平, 路德春, 周安楠, 等. 广义非线性强度理论及其变换应力空间[J]. 中国科学 E 辑: 工程科学 材料科学, 2004, **34**(11): 1283-1299. (YAO Yangping, LU Dechun, ZHOU Annan, et al. Generalized nonlinear strength theory and transformed stress space[J]. *Scientia Sinica (Series E)*, 2004, **34**(11): 1283-1299. (in Chinese))
- [26] HAI S Y. 岩土介质小孔扩张理论[M]. 周国庆, 赵光思, 梁恒昌, 等译. 北京: 科学出版社, 2013. (HAI S Y. *Cavity Expansion Methods in Geomechanics*[M]. ZHOU Guoqing, ZHAO Guangsi, LIANG Hengchang, et al, transl. Beijing: Science Press, 2013. (in Chinese))
- [27] 胡长明, 王志宇, 梅源, 等. 基于广义 SMP 准则的球孔扩张理论解及其应用[J]. 应用力学学报, 2020, **37**(5): 1948-1956. (HU Changming, WANG Zhiyu, MEI Yuan, et al. Theoretical solutions of spherical cavity expansion based on generalized SMP criterion and applications[J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2020, **37**(5): 1948-1956. (in Chinese))
- [28] 王腾. 湿陷性黄土劈裂注浆理论分析及试验研究[D]. 兰州: 兰州理工大学, 2017. (WANG Teng. The theoretical analysis and experimental study of fracturing grouting of collapsible loess[D]. Lanzhou: Lanzhou University of Technology, 2017. (in Chinese))
- [29] 卢国文. 黄土扩孔问题的理论解析及其在劈裂注浆中的应用研究[D]. 兰州: 兰州理工大学, 2018. (LU Guowen. Theoretical analysis of the problem of loess cavity expansion and its application in splitting grouting[D]. Lanzhou: Lanzhou University of Technology, 2018. (in Chinese))
- [30] 张玉伟, 翁效林, 宋战平, 等. 考虑黄土结构性和各向异性的修正剑桥模型[J]. 岩土力学, 2019, **40**(3): 1030-1038. (ZHANG Yuwei, WENG Xiaolin, SONG Zhanping, et al. A modified Cam-Clay model for structural and anisotropic loess[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2019, **40**(3): 1030-1038. (in Chinese))
- [31] 孔位学, 芮勇勤, 董宝弟. 岩土材料在非关联流动法则下剪胀角选取探讨[J]. 岩土力学, 2009, **30**(11): 3278-3282. (KONG Weixue, RUI Yongqin, DONG Baodi. Determination of dilatancy angle for geomaterials under non-associated flow rule[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2009, **30**(11): 3278-3282. (in Chinese))