

# 混联 II 型惯容耗能减震结构响应及减震性能研究\*

李创第<sup>1</sup>, 柴一格<sup>1</sup>, 樊新宇<sup>1</sup>,  
王瑞勃<sup>1</sup>, 葛新广<sup>2</sup>

(1. 广西科技大学 土木建筑工程学院, 广西 柳州 545006;  
2. 柳州工学院 土木建筑学院, 广西 柳州 545616)

**摘要:** 针对多自由度混联 II 型惯容对结构减震效果和可靠度的影响较为复杂的问题, 运用功率谱二次分解法对该耗能结构的动力响应进行了研究. 通过复模态法将重构后的运动方程进行解耦, 获得了结构位移及速度、结构层间位移及速度、层间剪力、层间位移角和惯容力等响应的频域统一解表达式. 运用功率谱二次分解法, 获得了上述响应量的功率谱及谱矩的解析解. 以一栋 16 层的实际结构为例, 验证了功率谱及谱矩的正确性. 最后, 基于位移标准差和谱矩解析解探究了惯容系统参数对减震效果的影响, 并对动力可靠度进行了分析. 验证了布置混联 II 型惯容耗能结构具有良好的减震效果及可靠度.

**关键词:** 混联 II 型惯容系统; 随机地震响应; 复模态法; 0~2 阶谱矩; Clough-Penzien 谱  
**中图分类号:** TU311.3; O324 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.440325

## Study on the Responses and Damping Performances of Series-Parallel- II Inerter Systems' Dissipation Damping Structures

LI Chuangdi<sup>1</sup>, CHAI Yige<sup>1</sup>, FAN Xinyu<sup>1</sup>,  
WANG Ruibo<sup>1</sup>, GE Xinguang<sup>2</sup>

(1. School of Civil & Architectural Engineering, Guangxi University of Science and Technology, Liuzhou, Guangxi 545006, P.R.China;  
2. College of Civil and Architectural Engineering, Liuzhou Institute of Technology, Liuzhou, Guangxi 545616, P.R.China)

**Abstract:** Aimed at the complexity of the effects of the multi-degree-of-freedom series-parallel- II inerter system (SPIS- II) on the damping and reliability of structures, the dynamic responses of the energy dissipation structure were studied with the power spectrum quadratic decomposition method. The reconstructed equations of motion were decoupled with the complex modal method to obtain unified solution expressions in the frequency domain for the responses of structural displacements and velocities, structural inter-storey displacements and inter-storey velocities, inter-storey shear forces and inter-storey displacement angles. The analytical solu-

\* 收稿日期: 2023-11-01; 修订日期: 2024-10-11

基金项目: 国家自然科学基金(51468005); 广西重点研发计划(桂科 AB19259011)

作者简介: 李创第(1964—), 男, 教授, 博士(E-mail: lichuangdi1964@163.com);  
葛新广(1977—), 男, 讲师, 博士(通讯作者. E-mail: gxgzlr.2008@163.com).

引用格式: 李创第, 柴一格, 樊新宇, 王瑞勃, 葛新广. 混联 II 型惯容耗能减震结构响应及减震性能研究[J]. 应用数学和力学, 2025, 46(2): 208-222.

tions of power spectrums and spectral moments of the above responses were obtained with the quadratic decomposition method for the power spectrum. With a 16-storey actual structure as an example, the correctness of the power spectrums and spectral moments was verified. Finally, based on the displacement standard deviation and the analytical solution of the spectral moments, the effects of the inertial system parameters on the structural damping were explored, and the dynamic reliability was analyzed. The results show that, the proposed SPIS- II structure has good vibration damping effect and reliability.

**Key words:** series-parallel- II inerter system (SPIS- II); stochastic seismic response; complex modal method; 0th~2nd order spectral moments; Clough-Penzien spectrum

## 0 引 言

在自然界中,地震是最具破坏性和突发性的灾害之一,剧烈的地震不仅会造成经济上的损失,还会造成严重的人员伤亡<sup>[1]</sup>.土木工程领域为了减少地震给人类带来的破坏,国内外学者对提高结构的抗震性能做了大量研究.随着建筑结构高度的不断增加,传统抗震方法主要依据增加结构自身刚度来降低地震响应,虽然能在一定程度上提高结构的抗震性能,但当发生震级较高的地震时,建筑物仍会受到严重损害,且建筑造价较高.故在传统抗震方法的基础上引入结构振动控制技术,其中被动控制的应用较为广泛.被动控制是在结构中设置耗能元件(常称耗能器或阻尼器),在地震激励的作用下,结构产生运动使耗能元件被动地产生往复运动以减小结构的动力响应.耗能减震装置是由质量、阻尼和弹簧三种经典的力学元件组成,质量为单节点的惯性元件<sup>[2-3]</sup>,且质量元件的体量较大,在结构中不便于安装.新型的被动控制装置“inerter(惯容)”<sup>[4]</sup>在 20 世纪末被提出,作为一种两端点的惯性元件,产生的惯容力等于惯容元件质量和两端点的相对加速度之积<sup>[5-6]</sup>.Arakaki 等<sup>[7]</sup>通过滚珠丝杆放大了黏滞阻尼器的阻尼力,提高了该阻尼器减震能力,从而能够有效减小地震对结构动力响应的影响.惯容与传统减震装置相比可获得较大的惯性力,但不改变结构基本物理质量,惯容产生的惯性力反作用于结构对结构的动力响应进行调节.在工程应用中常用弹簧、阻尼(耗能元件)和惯容三种元件以不同的连接方式形成惯容减震系统<sup>[8-9]</sup>.三种元件串联时构成串联型惯容系统;耗能元件与弹簧并联后再与惯容元件串联时,被称为混联 I 型惯容系统;惯容元件与耗能元件并联后再与弹簧串联时,被称为混联 II 型惯容系统<sup>[10]</sup>.Zhang 等<sup>[11]</sup>发现了惯容系统阻尼增效现象,并证明了此现象的实质,进而提出了三种惯容减震系统的设计方法,并通过实例验证了所提设计方法与阻尼增效方程的实用性.潘超等<sup>[12]</sup>提出了惯容减震系统在白噪声激励下单自由度结构的设计方法,并在给定结构响应减缓率的情况下获得了惯容系统的参数,推导出了简洁的参数设计公式.惯容系统的参数对结构减震性能及动力可靠度存在影响,由于目前对动力可靠度的分析还较少,故本文研究了惯容的基本参数对位移标准差及减震效果和动力可靠度的影响.

由于地震动具有随机性,国内外的学者们提出了一系列随机地震模型如 Kanai-Tajimi 谱<sup>[13-14]</sup>、白噪声<sup>[15]</sup>、Clough-Penzien 谱<sup>[16]</sup>和胡聿贤谱<sup>[17]</sup>等地震动模型.由于 Kanai-Tajimi 谱会过分地夸大低频处的能量,为此,Clough-Penzien 谱通过在 Kanai-Tajimi 谱上增加滤波方程组的方法来改善,因此 Clough-Penzien 谱更加符合实际的地震激励.目前,常用时域法和频域法对结构随机地震模型进行分析,时域法包括矩递推法<sup>[18]</sup>、矩方法<sup>[19]</sup>和时域显式法<sup>[20]</sup>等.由于时域法中激励的协方差与响应的协方差有二重积分关系,故时域法的应用以协方差的表达式为前提.频域法<sup>[21-22]</sup>中激励功率谱与响应功率谱之间有代数关系,随机激励模型多数存在相应的功率谱表达式,故频域法的应用较为广泛,其中虚拟激励法<sup>[23]</sup>是频域法中的典型方法.虚拟激励法通过把平稳的随机过程转化成简谐过程的方法来达到简化计算过程的目的,但运用该方法求解谱矩的数值积分时的求解过程较为复杂.葛新广等<sup>[24-25]</sup>针对上述的不足,提出用求解响应功率谱的二次分解法将谱矩转化为模态参数与激励参数的线性组合,以获得耗能结构响应谱矩的解析解表达式,同时提高了计算精度.

为进一步研究该方法是否适于惯容减震结构的地震动响应分析及可靠度研究,本文以多自由度混联 II 型惯容系统为例,基于 Clough-Penzien 谱地震动激励下惯容参数对减震效果和可靠度进行分析.首先,推导出了在多自由度结构中每层设置混联 II 型惯容系统的运动方程,通过复模态法将运动方程进行解耦,获得了结

构位移、速度、层间位移、速度及层间剪力和位移角等响应的频域统一解。其次,基于文献[24-25]的方法,对频率响应特征值函数和 Clough-Penzien 谱功率谱密度函数进行了二次分解,并将其代入谱矩的定义式,获得了结构位移、层间位移、惯容力等响应的 0~2 阶谱矩,通过具体算例验证了求解响应功率谱及谱矩的正确性。最后,对惯容的基本参数对位移标准差的影响进行了研究,并分析了布置混联 II 型惯容系统的减震效果及结构的可靠度。

### 1 运动方程的重构

设置混联 II 型的惯容耗能结构,结构计算简图如图 1 所示,在地震动加速度  $\ddot{x}_g$  作用下运动方程为

$$M\ddot{\mathbf{x}} + C\dot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} + \mathbf{F}_s = -M\mathbf{I}\ddot{x}_g(t), \tag{1}$$

式中,  $M, C$  和  $K$  分别为质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵;  $\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}$  和  $\ddot{\mathbf{x}}$  分别为结构位移向量、速度向量和加速度向量,  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$  为  $n \times 1$  阶列向量,  $x_i$  为结构第  $i$  层相对地面的位移,  $n$  为结构楼层数;  $\mathbf{F}_s = [F_{s,1} - F_{s,2} \ F_{s,2} - F_{s,3} \ \dots \ F_{s,n-1} - F_{s,n} \ F_{s,n}]^T$  为  $n \times 1$  阶列向量,表示惯容力向量;  $\mathbf{I} = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$  为  $n \times 1$  阶列向量。

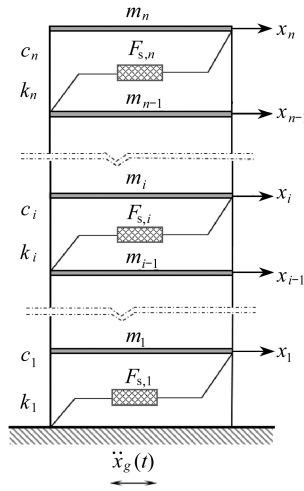
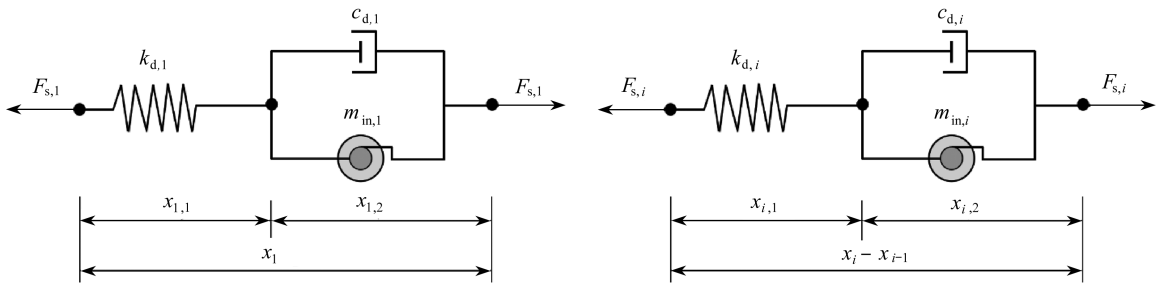


图 1 结构计算简图

Fig. 1 The structural calculation diagram

耗能系统中混联 II 型惯容系统的首层计算简图如图 2(a) 所示;第  $i$  层 ( $2 \leq i \leq n$ ) 计算简图如图 2(b) 所示。



(a) 混联 II 型惯容系统首层计算简图

(b) 混联 II 型惯容系统  $i$  层计算简图

(a) The calculation diagram of SPIS-II in the 1st layer

(b) The calculation diagram of SPIS-II in the  $i$ th layer

图 2 混联 II 型惯容系统的计算简图

Fig. 2 The diagram of the arrangement of SPIS-II

由图 2 可知,混联 II 型惯容系统存在以下关系:

$$\begin{cases} F_{s,1} = k_{d,1}\dot{\bar{x}}_{1,1} = c_{d,1}\dot{\bar{x}}_{1,2} + m_{in,1}\ddot{\bar{x}}_{1,2}, & \bar{x}_1 = \bar{x}_{1,1} + \bar{x}_{1,2}, \\ F_{s,i} = k_{d,i}\dot{\bar{x}}_{i,1} = c_{d,i}\dot{\bar{x}}_{i,2} + m_{in,i}\ddot{\bar{x}}_{i,2}, & \bar{x}_i - \bar{x}_{i-1} = \bar{x}_{i,1} + \bar{x}_{i,2}, \end{cases} \tag{2}$$

式中,  $k_{d,1}, c_{d,1}$  和  $m_{in,1}$  分别为混联 II 型惯容系统首层的刚度系数、阻尼系数和惯容系数;  $F_{s,1}$  为首层的惯容力;  $\bar{x}_{1,1}, \bar{x}_{1,2}$  分别为首层惯容系统中弹簧元件、阻尼元件两端的相对位移;  $\bar{x}_1$  为首层惯容系统的相对位移;  $k_{d,i}, c_{d,i}$  和  $m_{in,i}$  分别为混联 II 型惯容系统第  $i$  层的刚度系数、阻尼系数和惯容系数;  $F_{s,i}$  为第  $i$  层的惯容力;  $\bar{x}_{i,1}, \bar{x}_{i,2}$  分别为第  $i$  层惯容系统中弹簧元件、阻尼元件两端的相对位移;  $\bar{x}_i$  为第  $i$  层惯容系统的相对位移。

由式(2)可知,结构中所有混联 II 型惯容系统的力学关系为

$$\begin{cases} \mathbf{F}_s = \mathbf{K}_d \bar{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{C}_d \dot{\bar{\mathbf{x}}}_2 + \mathbf{M}_{in} \ddot{\bar{\mathbf{x}}}_2, \\ \bar{\mathbf{x}}_1 + \bar{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{x}, \end{cases} \quad (3)$$

式中,  $\mathbf{K}_d, \mathbf{C}_d$  和  $\mathbf{M}_{in}$  分别为惯容系统的刚度系数矩阵、阻尼系数矩阵和惯容系数矩阵;  $\bar{\mathbf{x}}_1$  为弹簧元件两端的相对位移,  $\bar{\mathbf{x}}_1 = [\bar{x}_{1,1} \quad \bar{x}_{2,1} \quad \cdots \quad \bar{x}_{n,1}]^T$ ;  $\bar{\mathbf{x}}_2$  为惯容元件两端的相对位移,  $\bar{\mathbf{x}}_2 = [\bar{x}_{1,2} \quad \bar{x}_{2,2} \quad \cdots \quad \bar{x}_{n,2}]^T$ 。

由式(3)得微分型本构关系为

$$\mathbf{M}_{in} \ddot{\bar{\mathbf{x}}}_2 + \mathbf{C}_d \dot{\bar{\mathbf{x}}}_2 + \mathbf{K}_d \bar{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{K}_d \mathbf{x}. \quad (4)$$

惯容耗能结构具有非比例阻尼特性,本文采用复模态法<sup>[14]</sup>不能直接对运动方程式(1)进行解耦,故先引入状态变量  $\mathbf{X}$ , 联立式(1)、(3)、(4)得到状态方程为

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x} \quad \bar{\mathbf{x}}_2 \quad \dot{\mathbf{x}} \quad \dot{\bar{\mathbf{x}}}_2]^T, \quad (5a)$$

$$\mathbf{M}_1 \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}_1 \mathbf{X} = \boldsymbol{\alpha} \ddot{\mathbf{x}}_g, \quad (5b)$$

式中,  $\mathbf{M}_1, \mathbf{K}_1$  为

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{C}_d & \mathbf{M} & \mathbf{M}_{in} \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{C}_d & \mathbf{0}_2 & \mathbf{M}_{in} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{M}_{in} & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ -\mathbf{K}_d & \mathbf{K}_d & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & -\mathbf{M} & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 & -\mathbf{M}_{in} \end{bmatrix},$$

$\mathbf{0}_1$  为  $n \times 1$  阶零矩阵;  $\mathbf{0}_2$  为  $n \times n$  阶零矩阵。

## 2 结构地震动响应解的统一表达式

式(5b)中存在复特征值对角阵  $\mathbf{p}$  和左、右特征矩阵  $\mathbf{V}, \mathbf{U}$ , 三者之间存在如下关系:

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{V}^T \mathbf{K}_1 \mathbf{U}}{\mathbf{V}^T \mathbf{M}_1 \mathbf{U}}. \quad (6)$$

根据复模态法<sup>[14]</sup>,对状态方程(5b)进行解耦,现引入复模态变换:

$$\mathbf{X} = \mathbf{U} \mathbf{z}, \quad (7)$$

式中,  $\mathbf{z}$  为复模态广义参数。

把式(7)代入式(5b),并左乘  $\mathbf{V}^T$ , 可得

$$\dot{\mathbf{z}} + \frac{\mathbf{V}^T \mathbf{K}_1 \mathbf{U}}{\mathbf{V}^T \mathbf{M}_1 \mathbf{U}} \mathbf{z} = \boldsymbol{\eta} \ddot{\mathbf{x}}_g, \quad (8)$$

式中,  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{V}^T \boldsymbol{\alpha} / (\mathbf{V}^T \mathbf{M}_1 \mathbf{U})$ 。

将式(6)代入式(8),式(8)可简化为

$$\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{p} \mathbf{z} = \boldsymbol{\eta} \ddot{\mathbf{x}}_g. \quad (9)$$

由于  $\mathbf{p}$  为对角阵,式(9)的分量形式为

$$\dot{z}_k + p_k z_k = \eta_k \ddot{x}_g, \quad k = 1, 2, 3, \dots, 4n, \quad (10)$$

式中,  $z_k, \eta_k, p_k$  分别为响应分量、模态强度系数及复特征值。

根据虚拟激励法,将随机激励转化为简谐激励,进而获得结构响应功率谱密度函数的精确表达式.现引入虚拟激励荷载:

$$\ddot{x}_g(\omega) = \sqrt{S_{\ddot{x}_g}(\omega)} e^{i\omega t}, \quad (11)$$

式中,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $S_{\ddot{x}_g}(\omega)$  为地震加速度  $\ddot{x}_g(t)$  的功率谱密度函数。

把式(11)代入式(10):

$$z_k(\omega) = \frac{\eta_k}{p_k + i\omega} \sqrt{S_{x_g}(\omega)} e^{i\omega t}, \quad (12)$$

式中,  $z_k(\omega)$  为式(10)的频域解.

运用复模态法将重构后的运动方程转化为  $4n$  个线性方程(如式(10)), 通过求解每个响应量的解(式(12)), 可得到耗能结构的动力响应. 联立式(5)及式(12), 耗能结构的位移与速度频域解为

$$x_i(\omega) = \sum_{k=1}^{4n} u_{i,k} z_k(\omega), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (13a)$$

$$\dot{x}_i(\omega) = \sum_{k=1}^{4n} u_{2n+i,k} z_k(\omega), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (13b)$$

式中,  $u_{i,k}$  为响应  $x_i(\omega)$  对应的模态系数,  $u_{i,k}$  为右特征向量  $\mathbf{u}$  的第  $i$  行第  $k$  列元素.

结构第  $i$  层的层间位移和层间速度频域解为

$$\Delta x_i(\omega) = \sum_{k=1}^{4n} (u_{i,k} - u_{i-1,k}) z_k(\omega), \quad i = 2, 3, 4, \dots, n, \quad (14a)$$

$$\Delta \dot{x}_i(\omega) = \dot{x}_i - \dot{x}_{i-1} = \sum_{k=1}^{4n} (u_{2n+i,k} - u_{2n+i-1,k}) z_k(\omega), \quad i = 2, 3, 4, \dots, n, \quad (14b)$$

式中, 首层的层间位移和层间速度分别为  $\Delta x_1 = x_1(\omega)$ ,  $\Delta \dot{x}_1(\omega) = \dot{x}_1(\omega)$ ;  $u_{i,k} - u_{i-1,k}$  为层间位移的模态系数,  $u_{2n+i,k} - u_{2n+i-1,k}$  为层间速度的模态系数.

结构第  $i$  层的层间剪力为

$$V_i(\omega) = k_i \sum_{k=1}^{4n} (u_{i,k} - u_{i-1,k}) z_k(\omega), \quad V_1(\omega) = k_1 \Delta x, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (15)$$

结构第  $i$  层的层间位移角为

$$\begin{cases} \theta_1 = \Delta x_1 / h_1, & i = 1, \\ \theta_i(\omega) = \frac{1}{h_i} \sum_{k=1}^{4n} u_{i,k} z_k(\omega), & i = 2, 3, 4, \dots, n. \end{cases} \quad (16)$$

惯容力的频域解为

$$\begin{cases} F_1(\omega) = \sum_{k=1}^{4n} K_d (u_{1,k} - u_{n+1,k}) z_k(\omega), \\ F_i(\omega) = \sum_{k=1}^{4n} K_d (u_{i,k} - u_{i-1,k} - u_{n+i,k}) z_k(\omega), & i = 2, 3, 4, \dots, n. \end{cases} \quad (17)$$

由式(13)–(17)可知, 上述的结构响应频域解可统一表示, 具体表达式为

$$Y(\omega) = \sum_{k=1}^{4n} \rho_{l,k} z_k(\omega), \quad (18)$$

式中,  $Y(\omega)$  为结构分量  $z_k(\omega)$  的频域统一解;  $\rho_{l,k}$  为响应分量的模态系数,  $l = 1, 2, 3, \dots, 7$  分别表示结构位移、速度、结构层间位移、层间速度、层间剪力、层间位移角、惯容力.

### 3 响应功率谱及谱矩计算

#### 3.1 结构响应功率谱

根据虚拟激励法得到结构响应功率谱密度函数为

$$S_Y(\omega) = \sum_{k=1}^{4n} \sum_{j=1}^{4n} \rho_{l,k} \rho_{l,j} z_k(\omega) z_j^*(\omega), \quad (19)$$

式中,  $z_j^*(\omega)$  为  $z_k(\omega)$  的复共轭项.

将式(12)代入式(19), 可得

$$S_Y(\omega) = \sum_{k=1}^{4n} \sum_{j=1}^{4n} \rho_{l,k} \rho_{l,j} \frac{\eta_k \sqrt{S_{x_g}(\omega)} e^{i\omega t}}{p_k - i\omega} \frac{\eta_j \sqrt{S_{x_g}(\omega)} e^{-i\omega t}}{p_j + i\omega} = H_Y(\omega) S_{x_g}(\omega), \quad (20)$$

$$H_Y(\omega) = \sum_{k=1}^{4n} \sum_{j=1}^{4n} \rho_{l,k} \eta_k \rho_{l,j} \eta_j \frac{1}{p_k - i\omega} \frac{1}{p_j + i\omega}, \quad (21)$$

式中,  $S_{x_g}(\omega)$  为 Clough-Penzien 谱地震动激励功率密度函数,  $H_Y(\omega)$  为频率响应特征值函数,

$$H_Y(\omega) = \sum_{j=1}^{4n} (\rho_{l,j} \eta_j)^2 \frac{1}{p_j + i\omega} \frac{1}{p_j - i\omega} + \sum_{k=1}^{4n-1} \sum_{j=k+1}^{4n} \rho_{l,k} \eta_k \rho_{l,j} \eta_j \left( \frac{1}{p_k + i\omega} \frac{1}{p_j - i\omega} + \frac{1}{p_j + i\omega} \frac{1}{p_k - i\omega} \right). \quad (22)$$

式(22)简化为

$$H_Y(\omega) = \sum_{j=1}^{4n} \frac{(\rho_{l,j} \eta_j)^2}{p_j^2 + \omega^2} + 2 \sum_{k=1}^{4n-1} \sum_{j=k+1}^{4n} \frac{\rho_{l,k} \eta_k \rho_{l,j} \eta_j}{p_k + p_j} \left( \frac{p_j}{p_j^2 + \omega^2} + \frac{p_k}{p_k^2 + \omega^2} \right). \quad (23)$$

Clough-Penzien 谱激励的功率谱密度函数为

$$S_{x_g}(\omega) = \frac{\omega^4}{(\omega_h^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_h^2 \omega_h^2 \omega^2} \frac{\omega_g^4 + 4\xi_g^2 \omega_g^2 \omega^2}{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_g^2 \omega_g^2 \omega^2} S_0, \quad (24)$$

式中,  $\xi_g$  为第一滤波场地土的阻尼比,  $\omega_g$  为卓越频率;  $\xi_h$  为第二滤波场地土的阻尼比;  $\omega_h$  为卓越频率. 利用留数定律对 Clough-Penzien 谱的功率谱密度函数式(24)简化, 获得  $S_{x_g}(\omega)$  的二次分解式为

$$S_{x_g}(\omega) = S_0 \sum_{r=1}^2 \sum_{k=1}^2 \left( 1 - \frac{c_{h,k}}{\omega^2 + \omega_{h,k}^2} \right) \frac{c_{g,r}}{\omega^2 + \omega_{g,r}^2}, \quad (25)$$

式中

$$\begin{aligned} \omega_{h,k}^2 &= -\bar{\omega}_{h,k}^2 \quad (k=1,2); \quad \bar{\omega}_{h,1}^2 = (1 - 2\xi_h^2) \omega_h^2 + 2\omega_h^2 \xi_h \sqrt{\xi_h^2 - 1}; \quad \bar{\omega}_{h,2}^2 = \text{conj}(\bar{\omega}_{h,1}^2); \\ \omega_{g,r}^2 &= -\bar{\omega}_{g,r}^2 \quad (r=1,2); \quad \bar{\omega}_{g,1}^2 = (1 - 2\xi_g^2) \omega_g^2 + 2\omega_g^2 \xi_g \sqrt{\xi_g^2 - 1}; \quad \bar{\omega}_{g,2}^2 = \text{conj}(\bar{\omega}_{g,1}^2); \\ c_{h,1} &= \frac{\omega_h^4 + 2\omega_h^2 \omega_{h,1}^2 (2\xi_h^2 - 1)}{\bar{\omega}_{h,1}^2 - \bar{\omega}_{h,2}^2}; \quad c_{h,2} = \text{conj}(c_{h,1}); \\ c_{g,1} &= \frac{\omega_g^4 + 4\xi_g^2 \omega_g^2 \omega_{g,1}^2}{\bar{\omega}_{g,1}^2 - \bar{\omega}_{g,2}^2}; \quad c_{g,2} = \text{conj}(c_{g,1}); \end{aligned}$$

其中  $\text{conj}(\cdot)$  表示复共轭项.

由式(20)、(23)及(25), 结构地震动响应的功率谱  $S_Y(\omega)$  可表示为

$$S_Y(\omega) = S_0 \sum_{j=1}^{4n} (\rho_{l,j} \eta_j)^2 A_j(\omega) + 2S_0 \sum_{k=1}^{4n-1} \sum_{j=k+1}^{4n} \frac{\rho_{l,k} \eta_k \rho_{l,j} \eta_j}{p_j + p_k} (p_j A_j(\omega) + p_k A_k(\omega)), \quad (26)$$

式中

$$A_j(\omega) = S_0 \sum_{r=1}^2 \sum_{k=1}^2 \frac{c_{g,r}}{\omega^2 + \omega_{g,r}^2} \left( 1 - \frac{c_{h,k}}{\omega^2 + \omega_{h,k}^2} \right) \frac{1}{p_j^2 + \omega^2}. \quad (27)$$

由式(27)可知, 响应功率谱  $S_Y(\omega)$  可表示为复特征值  $p_k$ 、模态系数  $\rho_k$ 、模态响应功率谱  $A_j(\omega)$  和模态强度系数  $\eta_k$  的线性组合.

### 3.2 地震动响应谱矩

地震动响应 0~2 阶谱矩的定义为

$$\alpha_{Y,q} = 2 \int_0^\infty \omega^q S_H(\omega) d\omega, \quad q = 0, 1, 2. \quad (28)$$

将式(26)代入式(28), 并令  $q = 0, 1$ , 可获得相应的 0 阶、1 阶谱矩, 具体表达式为

$$\alpha_{Y,q} = 2S_0 \left[ \sum_{j=1}^{4n} \rho_{l,j} \eta_j^2 T_j^q + 2 \sum_{j=1}^{4n-1} \sum_{k=j+1}^{4n} \frac{\rho_{l,k} \eta_k \rho_{l,j} \eta_j}{p_k + p_j} (p_j T_j^q + p_k T_k^q) \right], \quad (29)$$

式中,  $T_j^q = \int_0^\infty \omega^q A_j(\omega) d\omega$ .

将  $q = 0$  及  $q = 1$  分别代入式(29)中, 可获得  $T_j^0, T_j^1$  的值:

$$\left\{ \begin{aligned} T_j^0 &= \frac{\pi}{2} \left\{ \sum_{r=1}^2 c_{g,r} [(p_j + \omega_{g,r}) \omega_{g,r} p_j]^{-1} - \sum_{r=1}^2 \sum_{k=1}^2 \frac{c_{h,k} c_{g,r}}{\omega_{h,k}^2 - \omega_{g,r}^2} \times \right. \\ &\quad \left. [(\omega_{g,r} p_j^2 + \omega_{g,r}^2 p_j)^{-1} - (\omega_{h,k} p_j^2 + \omega_{h,k}^2 p_j)^{-1}] S_0 \right\}, \\ T_j^1 &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{r=1}^2 c_{g,r} (\ln p_j^2 - \ln \omega_{g,r}^2) (p_j^2 - \omega_{g,r}^2)^{-1} - \sum_{r=1}^2 \sum_{k=1}^2 \frac{c_{h,r} c_{g,k}}{2(\omega_{h,k}^2 - \omega_{g,r}^2)} \times \right. \\ &\quad \left. [(\ln p_j^2 - \ln \omega_{h,r}^2) (p_j^2 - \omega_{h,r}^2)^{-1} - (\ln p_j^2 - \ln \omega_{g,k}^2) (p_j^2 - \omega_{g,k}^2)^{-1}] \right\}, \end{aligned} \right. \quad (30)$$

式中,  $T_j^0, T_j^1$  与复特征值及激励参数有关. 由于复特征值和激励参数已知, 则式(30)可得到  $T_j^i$  模态谱矩的解析解.

根据随机振动理论<sup>[21]</sup>, 2阶谱矩的具体表达式如下:

$$\begin{cases} \alpha_{Y,0} = \sigma_Y^2, \\ \alpha_{Y,2} = \sigma_Y^2, \end{cases} \quad (31)$$

式中,  $\dot{Y} = \frac{dY}{dt}$ .

## 4 算 例

一栋 16 层的混凝土结构, 抗震设防烈度为 8 度, 场地类别为 II 类场地, 场地土为中等土. 其 1 层为门厅, 2, 3 层用于休闲娱乐等功能, 其余楼层用于住宅. 1 层层高 4.2 m, 2, 3 层层高 3.5 m, 4~16 层层高 3 m; 1 层质量  $5.5 \times 10^5$  kg, 2, 3 层质量  $4.5 \times 10^5$  kg, 4~16 层质量为  $3 \times 10^5$  kg; 1 层抗侧刚度  $3.5 \times 10^8$  N/m, 2, 3 层的抗侧刚度为  $2.6 \times 10^8$  N/m, 4~16 层抗侧刚度为  $1.67 \times 10^8$  N/m; 结构阻尼比  $\zeta$  为 0.05, 主体结构的阻尼依据 Rayleigh 阻尼分析, 即  $C = aM + bK$ , 其中  $a, b$  为 Rayleigh 阻尼常数,  $a = 2\omega_1 \omega_2 \zeta / (\omega_1 + \omega_2)$ ,  $b = 2\zeta / (\omega_1 + \omega_2)$ ,  $\omega_1$  为结构的第一自振频率,  $\omega_1 = 2.4217$  rad/s,  $\omega_2$  为结构的第二自振频率,  $\omega_2 = 7.1004$  rad/s.

Clough-Penzien 谱的主要参数为

$$\omega_g = 15.71 \text{ rad/s}, \omega_h = 0.15 \omega_g, S_0 = 2.317 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}^3, \xi_g = 0.72, \xi_h = 0.72.$$

根据文献[3]拟合得到  $\mu_m = 0.3527, \mu_\kappa = 0.06571, \mu_\xi = 0.08288$ . 由式(32)~(34)可知, 惯容系统参数  $m_{in}, k_d$  和  $c_d$  与结构质量系数  $m$  有关, 由于 4~16 层为结构的标准层, 以结构标准层为依据进行计算, 求得  $m_{in} = 1.94 \times 10^4$  kg,  $k_d = 2.3 \times 10^7$  N/m,  $c_d = 2.43 \times 10^4$  N·s/m, 且各层惯容系统的参数值相同:

$$\mu_m = m_{in}/m, \quad (32)$$

$$\mu_\kappa = k_d / (m\omega_0^2), \quad (33)$$

$$\mu_\xi = c_d / (2\zeta m\omega_0), \quad (34)$$

$$\mu_\omega = \omega_{in}/\omega_0, \quad \omega_{in} = \sqrt{k_d/m_{in}}, \quad (35)$$

式中,  $m$  为主体结构标准层质量,  $\omega_0$  为主体结构第一阶自振圆频率,  $\mu_m$  为惯容系统的惯质比,  $\mu_\kappa$  为惯容系统的刚度比,  $\mu_\xi$  为惯容系统的阻尼比,  $\mu_\omega$  为惯容系统的频率比,  $m_{in}$  为惯容系统的惯容系数,  $c_d$  为惯容系统的阻尼系数,  $k_d$  为惯容系统的刚度系数.

### 4.1 结构响应功率谱对比

为验证本文方法得到的各响应量功率谱式(26)的正确性, 将其与虚拟激励法公式(A5)、(A6)进行对比, 虚拟激励法分析过程见附录 A. Clough-Penzien 谱模型下的功率谱密度函数为式(24), 在求解各响应量功率谱式(26)时, 首先对式(24)进行二次分解, 见式(25), 故将其与式(24)进行对比验证, 如图 3 所示. 由图 3 可知, 本文对 Clough-Penzien 谱模型的二次分解与式(24)的曲线完全重合, 验证了式(25)的正确性. 将各响应量功率谱式(26)与式(A5)、(A6)对比得到图 4—6. 由图 4—6 可知两种方法得到的结构位移、结构层间位移以及层间剪力功率谱曲线图形相同, 验证了本文所求式(26)的正确性.

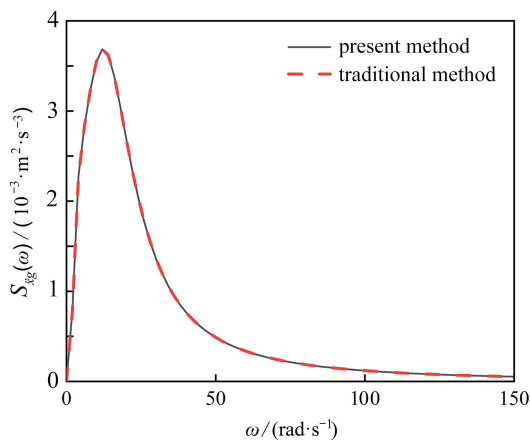


图 3 地震加速度功率谱

Fig. 3 Seismic acceleration power spectrums

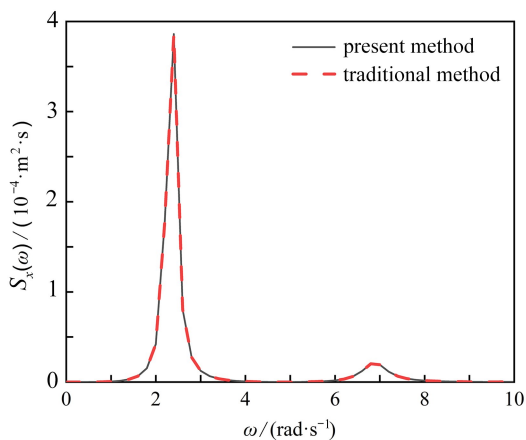


图 4 结构位移功率谱

Fig. 4 Structural displacement power spectrums

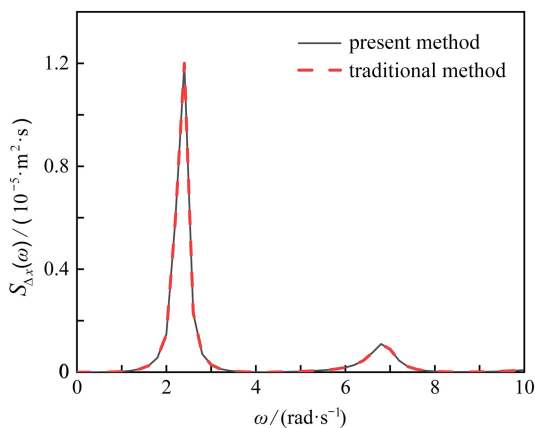


图 5 结构层间位移功率谱

Fig. 5 Structural inter-layer displacement power spectrums

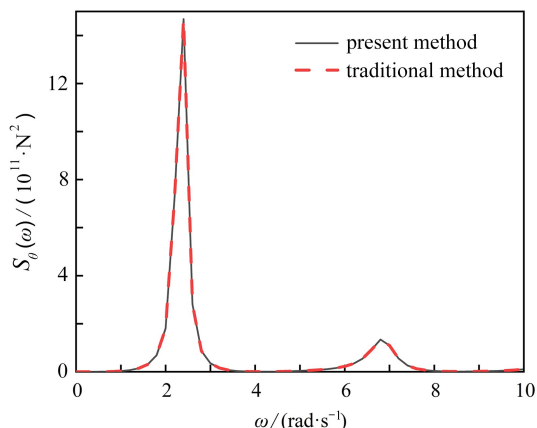


图 6 层间剪力功率谱

Fig. 6 Structural inter-layer shear power spectrums

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同。

## 4.2 结构和阻尼器的响应谱矩

本文为验证响应谱矩解析解式(28)~(31)的正确性,将其与虚拟激励法公式(A7)进行对比.由式(A7)可知,虚拟激励法求解响应谱矩时对响应功率谱  $S_H(\omega)$  在  $[0, \infty]$  内进行积分,本文将取 4 种积分步长,  $\Delta\omega$  依次取 1.0 rad/s, 0.5 rad/s, 0.25 rad/s, 0.01 rad/s.将式(28)~(31)与虚拟激励法公式(A7)在 4 种不同积分步长下的谱矩进行对比,如图 7—14 所示.

图 7—9 分别为位移 0~2 阶谱矩.虚拟激励法在积分步长为 0.5 时得到的顶层位移 0 阶和 1 阶谱矩与本文方法获得的 0 阶和 1 阶谱矩相差最大,差值分别为  $2.55 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ ,  $6.16 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$ ;虚拟激励法在积分步长为 1 时得到的顶层位移 2 阶谱矩与本文方法获得的 2 阶谱矩相差最大,差值为  $1.61 \times 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}^2$ .图 10—12 分别为层间位移 0~2 阶谱矩.虚拟激励法在积分步长为 0.5 时得到的第四层层间位移 0 阶谱矩与本文方法获得的 0 阶谱矩相差最大,差值为  $2.45 \times 10^{-5} \text{ m}^2$ ;虚拟激励法在积分步长为 1 时得到的第 4 层层间位移 1 阶和 2 阶谱矩与本文方法获得的 1 阶和 2 阶谱矩相差最大,差值分别为  $6.44 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $2.48 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}^2$ .图 13、14 分别为惯容力 0 阶和 2 阶谱矩.虚拟激励法在积分步长为 0.5 时得到的顶层惯容力 0 阶和 2 阶谱矩与本文方法得到的 0 阶和 2 阶谱矩相差最大,差值分别为  $2.3 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ ,  $7 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}^2$ .

对比图 7—14 中各工况曲线可知,本文方法与虚拟激励法在积分步长  $\Delta\omega = 0.01$  时的工况曲线基本一致,验证了本文方法所获得结构和阻尼器的响应谱矩的正确性.由式(A7)知,虚拟激励法求谱矩时受积分步长的影响,本文方法不受积分步长影响且计算精度较高.



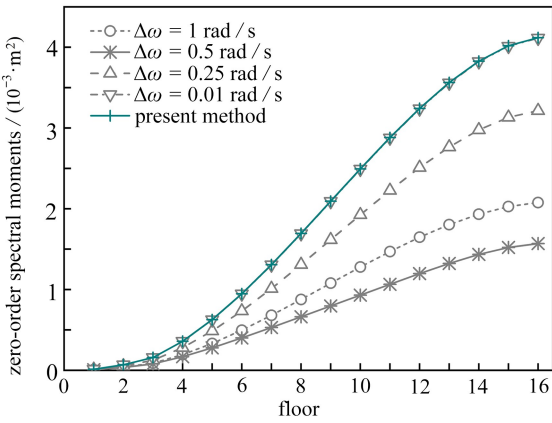


图7 位移0阶谱矩

Fig. 7 Zero-order spectral moments of displacements

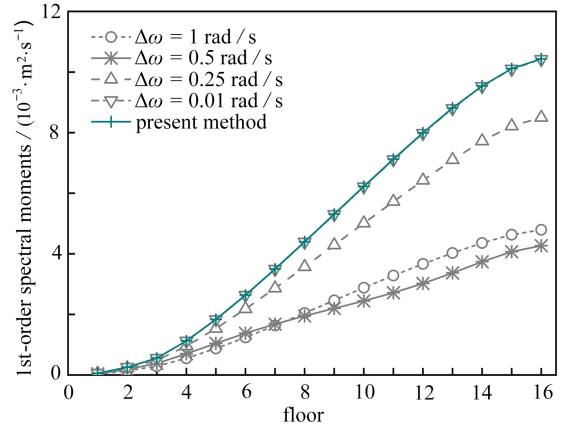


图8 位移1阶谱矩

Fig. 8 First-order spectral moments of displacements

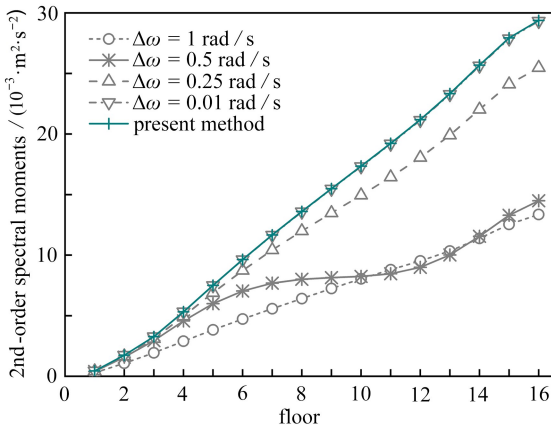


图9 位移2阶谱矩

Fig. 9 Second-order spectral moments of displacements

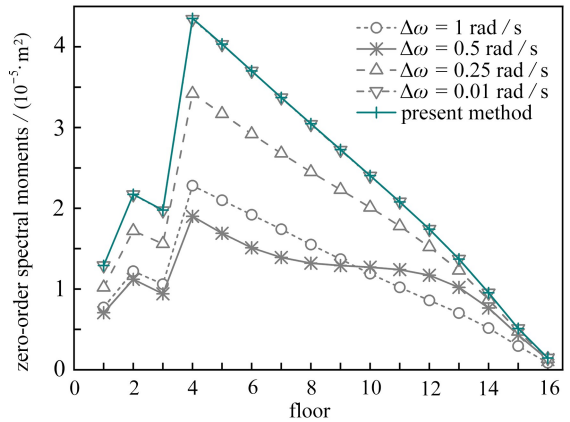


图10 层间位移0阶谱矩

Fig. 10 Zero-order spectral moments of interlayer displacements

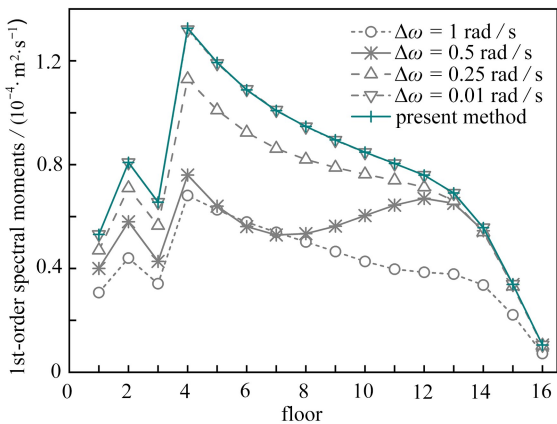


图11 层间位移1阶谱矩

Fig. 11 First-order spectral moments of interlayer displacements

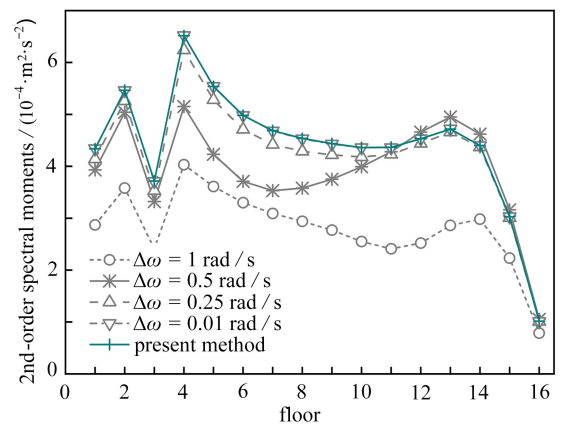


图12 层间位移2阶谱矩

Fig. 12 Second-order spectral moments of interlayer displacements

### 4.3 惯容参数影响分析

根据式(32)~(35)分析惯容系统的惯质比 $\mu_m$ 、频率比 $\mu_\omega$ 、阻尼比 $\mu_\xi$ 对结构顶层位移标准差的影响。惯质比、频率比和阻尼比属于无量纲的参数,具有通用性并基于文献[26-27]进行优化取值,其中惯质比 $\mu_m$ 的取值范围为0.01~0.1,频率比 $\mu_\omega$ 的取值范围为0.2~2.0,阻尼比 $\mu_\xi$ 的取值范围为0.5~5.0,其中各点的间距

为  $\Delta\mu_m = 0.005, \Delta\mu_\omega = 0.1, \Delta\mu_\xi = 0.25$ 。图 15—17 给出了确定一个参数分别讨论顶层位移标准差在其他两参数影响下的变化趋势。由图 15 可知:顶层位移标准差随着  $\mu_m$  的增大而逐渐减小,当  $\mu_\omega = 1.0$  时,顶层位移标准差随着  $\mu_\xi$  取值的逐渐增大减震效果越明显。由图 16 可知:当  $\mu_m$  和  $\mu_\xi$  一定时,顶层位移标准差随着  $\mu_\omega$  的变化基本相同,在  $0.2 \leq \mu_\omega \leq 0.4$  范围内变化趋于稳定,当  $0.4 \leq \mu_\omega$  时,随着  $\mu_\omega$  的增大减震效果相对明显。由图 17 可知,顶层位移标准差随着  $\mu_\xi$  的增大而逐渐减小,当  $\mu_\omega = 1.0, \mu_m = 0.03$  时,顶层位移标准差随着  $\mu_\xi$  的增大而减小。综上所述,惯容系统的惯质比  $\mu_m = 0.03$ ,频率比  $\mu_\omega = 1.0$ ,阻尼比  $\mu_\xi = 1.2$  时的结构顶层位移标准差最小。

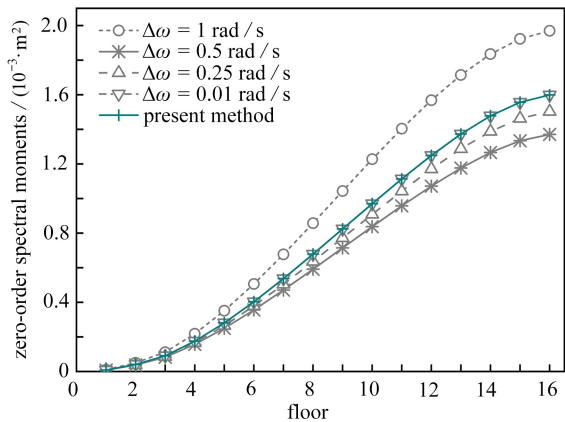


图 13 惯容力 0 阶谱矩

Fig. 13 Zero-order spectral moments of inertial forces

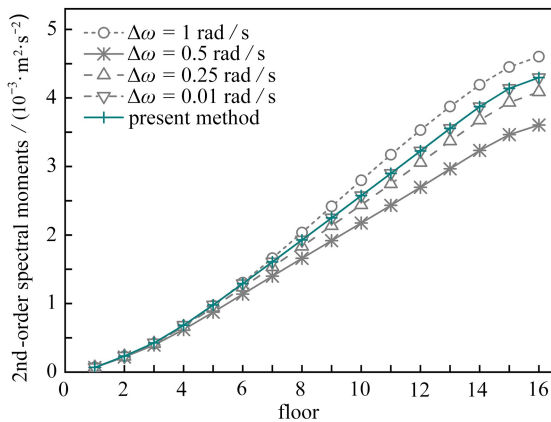
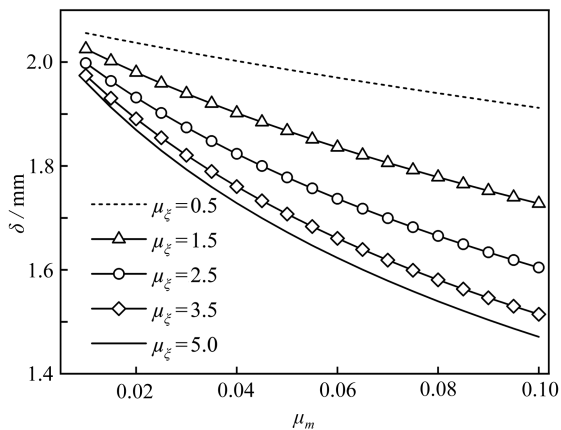
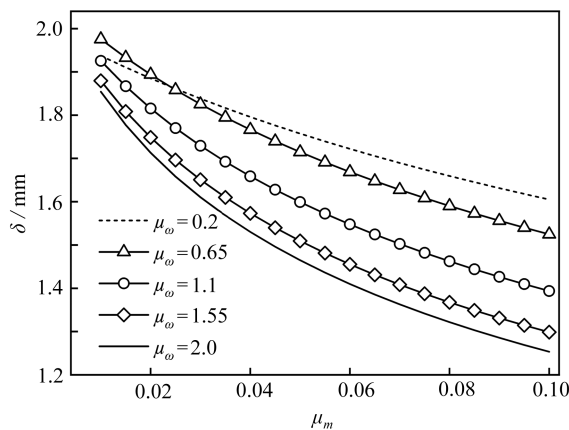


图 14 惯容力 2 阶谱矩

Fig. 14 Second-order spectral moments of inertial forces



(a)  $\mu_\omega = 1.0$



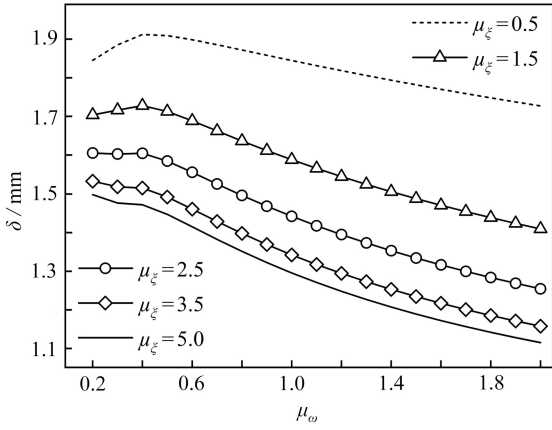
(b)  $\mu_\xi = 1.2$

图 15 质量比  $\mu_m$  对结构位移的影响

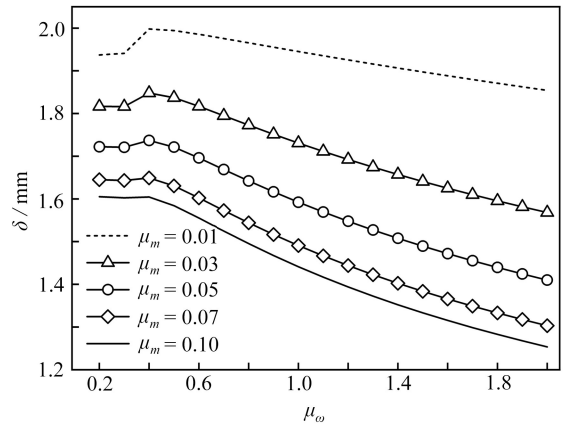
Fig. 15 Effects of mass ratio  $\mu_m$  on structure displacements

#### 4.4 惯容系统减震效果及可靠度分析

为验证设置混联 II 型惯容系统能够提高结构减震性能,我们对设置惯容系统与未设置惯容系统的绝对位移标准差和层间位移标准差进行对比分析。由图 18 可知,设置混联 II 型惯容系统能有效地提高减震效果。由图 18(a)可知,设置混联 II 型惯容系统在顶层相较于未设置时结构位移标准差最大,顶层的减震效果最好,其减震率达到 75%。由图 18(b)对比可知,在第 4 层时层间位移标准差的差值最大,第 4 层的减震率为 37%,且结构每层的减震率都高于 35%。由此表明,设置混联 II 型惯容系统可有效降低结构响应且具有良好的减震效果。



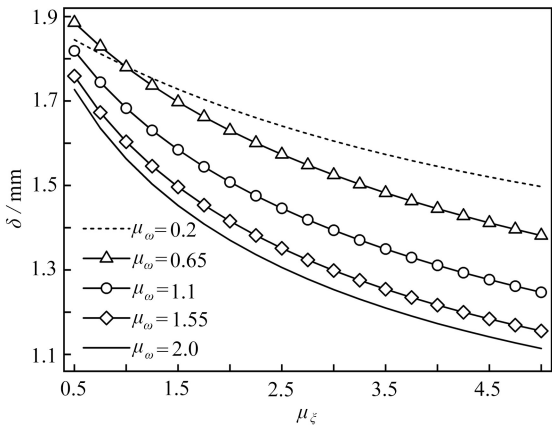
(a)  $\mu_m = 0.03$



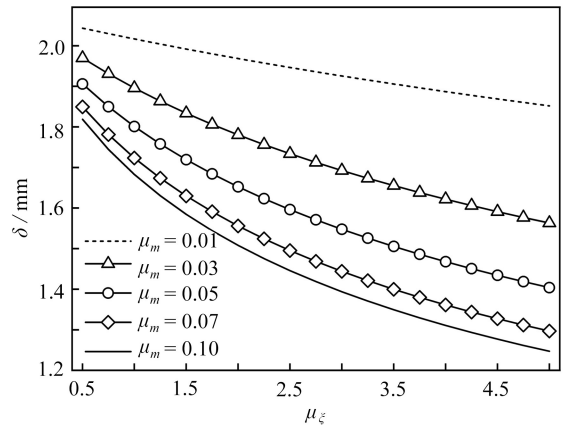
(b)  $\mu_\xi = 1.2$

图 16 频率比  $\mu_\omega$  对结构位移的影响

Fig. 16 Effects of frequency ratio  $\mu_\omega$  on structural displacements



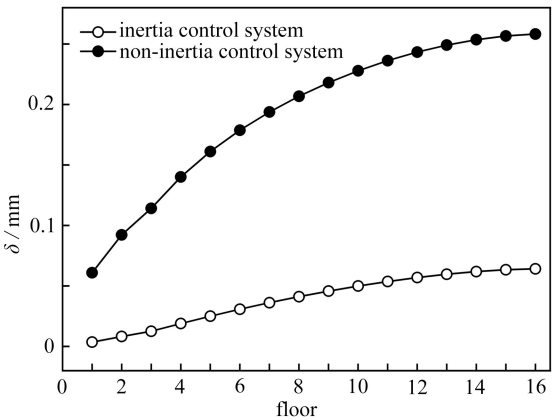
(a)  $\mu_m = 0.03$



(b)  $\mu_\omega = 1.0$

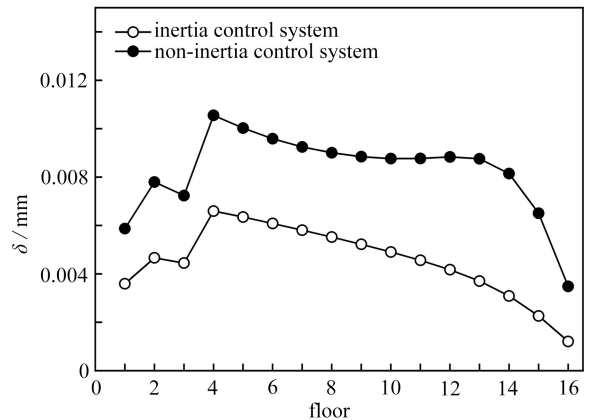
图 17 阻尼比  $\mu_\xi$  对结构位移的影响

Fig. 17 Effects of damping ratio  $\mu_\xi$  on structural displacements



(a) 绝对位移对比

(a) Comparison of displacements



(b) 层间位移对比

(b) Comparison of interlayer displacements

图 18 设置与未设置混联 II 型惯容系统对比

Fig. 18 Comparison of SPIS-II systems with and without setting

根据 Vanmarcke 提出的平稳激励下动力可靠度<sup>[28]</sup>灾变函数理论公式为

$$R(b) = -\frac{\sigma_{\dot{y}}}{\pi\sigma_Y} \exp\left(-\frac{b^2}{2\sigma_Y^2}\right) \frac{1 - \exp[-\sqrt{0.5\pi}(q_Y)^{1.2}b/\sigma_Y]}{1 - \exp[-0.5(b/\sigma_Y)^2]}, \quad (36)$$

式中,  $b$  为位移响应给定的安全界限值,  $q_Y$  为谱参数,

$$q_Y = \sqrt{1 - \frac{\alpha_{Y,1}^2}{\alpha_{Y,0}^2\alpha_{Y,2}^2}}. \quad (37)$$

构件动力可靠度为

$$P_{Y,s} = \exp[TR(b)], \quad (38)$$

式中,  $T$  为随机动荷载的一次激励时间。

对混联 II 型惯容系统结构进行动力可靠度分析, 设定结构在震动激励作用下的层间位移的取值为  $h/550$ , 随机震动激励时间  $T$  为 15 s, 结合式(28)~(31), 通过式(36)~(38) 计算结构各楼层的动力可靠度, 如表 1 所示. 由表可知位移 0~2 阶谱矩都在第 4 层值最大, 从第 4 层开始随着楼层的升高层间位移逐渐减小, 故从第 4 层开始结构动力可靠度随楼层的升高可靠度逐渐变大, 耗能减震效果也随楼层逐步提升.

表 1 结构动力可靠度

Table 1 Structural dynamic reliability

floor	zero-order spectral moment	1st-order spectral moment	2nd-order spectral moment	structural dynamic reliability
	$\text{/(}10^{-5} \cdot \text{m}^2\text{)}$	$\text{/(}10^{-5} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}\text{)}$	$\text{/(}10^{-4} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}\text{)}$	
1	1.289 89	5.307 92	4.336 70	0.999 999 99
2	2.172 01	8.082 16	5.464 36	0.996 745 34
3	1.977 02	6.554 71	3.715 54	0.998 281 83
4	4.350 01	13.256 9	6.515 65	0.987 597 19
5	4.033 20	11.933 6	5.538 19	0.993 317 28
6	3.701 03	10.880 3	4.980 16	0.996 953 28
7	3.370 76	10.083 5	4.686 89	0.998 896 34
8	3.046 64	9.470 34	4.537 06	0.999 720 98
9	2.725 98	8.953 31	4.437 67	0.999 960 07
10	2.404 80	8.480 55	4.360 38	0.999 997 70
11	2.079 13	8.043 30	4.366 77	0.999 999 97
12	1.740 31	7.594 79	4.531 23	0.999 999 99
13	1.370 18	6.907 11	4.716 54	1
14	0.952 46	5.567 50	4.399 76	1
15	0.510 79	3.386 29	3.026 79	1
16	0.145 52	1.048 24	1.014 54	1

## 5 结 论

本文基于 Clough-Penzien 谱随机地震激励作用下设置混联 II 型惯容系统的耗能结构, 进行了震动响应及减震性能分析的研究, 同时探究了惯容参数对位移标准差的影响, 并对设置混联 II 型惯容系统的减震效果和可靠度进行了分析, 所得结论如下:

1) 本文在  $n$  层结构中设置混联 II 型惯容系统, 根据 d' Alembert 原理推导出多自由度惯容耗能结构运动方程的表达式并对其进行重构, 运用复模态法对其解耦, 进而计算出耗能结构的统一表达式. 基于功率谱二次分解法, 给出了多自由度惯容耗能结构在 Clough-Penzien 谱下的平稳震动响应谱矩的简明解析解.

2) 本文将获得的谱矩解析解与虚拟激励法在 4 种不同积分步长下的数值解进行了对比, 表明相对虚拟激励法是要不断通过试算提高精度的方法, 本文的方法更为简单, 且具有较高的精度.

3) 惯容系统参数对结构体系的减震效果的特点: 频率比不变时, 随着阻尼比和质量比的增大, 减震性能逐渐增强; 阻尼比不变时, 随着质量比和频率比的增大, 减震性能逐渐增强; 质量比不变时, 随着阻尼比

和频率比的增大, 减震性能逐渐增强; 当阻尼比或质量比不变时, 当频率比大于 0.4 后, 频率比变大减震效果越好。

4) 通过有无控结构的减震性能和动力可靠度分析表明, 设置混联 II 型惯容系统能整体提升结构的抗震性能及动力可靠度。

### 附录 A 耗能结构响应谱矩的虚拟激励法

对式(1)、式(3)进行 Fourier 变换:

$$-M\omega^2 \mathbf{x}(\omega) + iC\omega \mathbf{x}(\omega) + K\mathbf{x}(\omega) + F_S(\omega) = -MI\sqrt{S_{\dot{x}_g}(\omega)} e^{i\omega t}, \quad (A1a)$$

$$F_S(\omega) = K_d \mathbf{x}_1(\omega) = i\omega C_d \mathbf{x}_2(\omega) - \omega^2 M_{in} \mathbf{x}_2(\omega), \quad (A1b)$$

$$\mathbf{x}(\omega) = \mathbf{x}_1(\omega) + \mathbf{x}_2(\omega), \quad (A1c)$$

式中,  $i = \sqrt{-1}$ 。

由式(A1b)、(A1c)得到

$$\mathbf{x}_1(\omega) = K_d^{-1} F_S(\omega), \quad (A2a)$$

$$\mathbf{x}_2(\omega) = (i\omega C_d - \omega^2 M_{in})^{-1} F_S(\omega). \quad (A2b)$$

把式(A2)代入式(A1b), 可得

$$F_S(\omega) = \frac{\mathbf{x}(\omega)}{D_{F_S}(\omega)}, \quad (A3)$$

$$\text{式中, } D_{F_S}(\omega) = \frac{K_d(i\omega C_d - \omega^2 M_{in})}{K_d + i\omega C_d - \omega^2 M_{in}}.$$

将式(A3)代入式(A1a), 可得到结构位移为

$$\mathbf{x}(\omega) = \frac{MI e^{i\omega t}}{H_x(\omega)} \sqrt{S_{\dot{x}_g}(\omega)}, \quad (A4)$$

$$\text{式中, } H_x(\omega) = -M\omega^2 + i\omega C + K + D_{F_S}(\omega).$$

结构位移的功率谱为

$$S_x(\omega) = \frac{MI \times MI}{H_x(i\omega) H_x^*(i\omega)} S_{\dot{x}_g}(i\omega), \quad (A5)$$

式中,  $S_x(\omega)$  为  $\mathbf{x}$  的功率谱密度函数,  $H_x^*(i\omega)$  为  $H_x(i\omega)$  的共轭项。

速度的功率谱为

$$S_{\dot{x}}(\omega) = \omega^2 S_x(\omega). \quad (A6)$$

层间剪力、层间位移角等响应可依据位移及速度的功率谱进行求解。

将式(A4)代入谱矩计算公式, 可得到绝对位移 0~2 阶谱矩为

$$\alpha_s = 2 \int_0^\infty \omega^q S_x(\omega) d\omega, \quad q = 0, 1, 2. \quad (A7)$$

### 参考文献 (References):

- [1] 张瑞甫, 吴明瑞, 周方圆, 等. 利用惯容隔震系统的结构层间隔震研究[J]. 世界地震工程, 2020, 36(4): 8-16. (ZHANG Ruifu, WU Mingrui, ZHOU Fangyuan, et al. Research on mid-story isolation of structure using inerter isolation system[J]. *World Earthquake Engineering*, 2020, 36(4): 8-16. (in Chinese))
- [2] 隋葵, 伍振平, 申泽波, 等. 粘滞阻尼耗能连梁的超高层结构减震性能研究[J]. 世界地震工程, 2021, 37(1): 66-77. (SUI Yan, WU Zhenping, SHEN Zebo, et al. Research on seismic performance of super high rise structure with viscous damping energy dissipation coupling beam[J]. *World Earthquake Engineering*, 2021, 37(1): 66-77. (in Chinese))
- [3] 潘超, 张瑞甫, 王超, 等. 单自由度混联 II 型惯容减震体系的随机地震响应与参数设计[J]. 工程力学, 2019, 36(1): 129-137. (PAN Chao, ZHANG Ruifu, WANG Chao, et al. Stochastic seismic response and design of structural system with series-parallel-II inerter system[J]. *Engineering Mechanics*, 2019, 36(1): 129-137.

- (in Chinese))
- [4] SMITH M C. Synthesis of mechanical networks: theinerter[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, **47**(10): 1648-1662.
- [5] IKAGO K, SUGIMURA Y, SAITO K, et al. Modal response characteristics of a multiple-degree-of-freedom structure incorporated with tuned viscous mass dampers[J]. *Journal of Asian Architecture and Building Engineering*, 2012, **11**(2): 375-382.
- [6] 翁锦华. 惯容装置限位的层间隔震结构减震性能研究[J]. 应用基础与工程科学学报, 2022, **30**(5): 1188-1200. (WENG Jinhua. Study on seismic performance of story isolation structure with inerter device[J]. *Journal of Basic Science and Engineering*, 2022, **30**(5): 1188-1200.(in Chinese))
- [7] ARAKAKI T, KURODA H, ARIMA F, et al. Development of seismic devices applied to ball screw, part 2: performance test and evaluation of RD-series[J]. *AIJ Journal of Technology and Design*, 1999, **5**(9): 265-270.
- [8] 张瑞甫, 曹嫣如, 潘超. 惯容减震(振)系统及其研究进展[J]. 工程力学, 2019, **36**(10): 8-27. (ZHANG Ruifu, CAO Yanru, PAN Chao. Inerter system and its state-of-the-art[J]. *Engineering Mechanics*, 2019, **36**(10): 8-27.(in Chinese))
- [9] 黄绪宏, 许维炳, 王瑾, 等. 考虑惯容的多颗粒阻尼器等效力学模型及试验验证[J]. 振动与冲击, 2021, **40**(18): 102-111. (HUANG Xuhong, XU Weibing, WANG Jin, et al. Equivalent model and experimental verification of a multi-particle damper with inerter[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2021, **40**(18): 102-111.(in Chinese))
- [10] 李创第, 江丽富, 王瑞勃, 等. 单自由度混联 II 型惯容系统随机地震动响应分析[J]. 应用数学和力学, 2023, **44**(3): 260-271. (LI Chuangdi, JIANG Lifu, WANG Ruibo, et al. Responses of SDOF structures with SPIS-II dampers under random seismic excitation[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2023, **44**(3): 260-271.(in Chinese))
- [11] ZHANG R, ZHAO Z, PAN C, et al. Damping enhancement principle of inerter system[J]. *Structural Control and Health Monitoring*, 2020, **27**(5): e2523.
- [12] 潘超, 刘媛, 张瑞甫, 等. 惯容减震系统性能成本控制解析设计方法[J]. 建筑结构学报, 2022, **43**(11): 107-116. (PAN Chao, LIU Yuan, ZHANG Ruifu, et al. Performance-cost design method of inerter system based on closed-form formulae[J]. *Journal of Building Structures*, 2022, **43**(11): 107-116.(in Chinese))
- [13] KANAI K. An empirical formula for the spectrum of strong earthquake motions[J]. *Bulletin of Earthquake Research Institute, University of Tokyo*, 1961, **39**(1): 86-95.
- [14] 邹万杰, 姜琰, 张梦丹, 等. 基于 Kanai-Tajimi 谱六参数黏弹性耗能结构地震响应的简明封闭解[J]. 振动与冲击, 2022, **41**(6): 130-138. (ZOU Wanjie, JIANG Yan, ZHANG Mengdan, et al. Concise and closed solution of the seismic responses of viscoelastic energy dissipation structures under Kanai-Tajimi spectrum excitation[J]. *Vibration and Shock*, 2022, **41**(6): 130-138.(in Chinese))
- [15] HOUSNER G W. Characteristics of strong-motion earthquakes[J]. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1947, **37**(1): 19-31.
- [16] 李创第, 陈明杰, 葛新广. 基于 Clough-Penzien 谱激励的指数型非黏滞阻尼结构随机地震动响应简明封闭解[J]. 应用数学和力学, 2021, **42**(3): 282-291. (LI Chuangdi, CHEN Mingjie, GE Xinguang. A simple closed response solution to random ground motion for exponential non-viscous-damping structures based on the Clough-penzien spectrum excitation[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, **42**(3): 282-291.(in Chinese))
- [17] 邹万杰, 刘美华, 李创第. 基于胡聿贤谱的带支撑广义 Maxwell 阻尼隔震结构随机响应分析[J]. 力学学报, 2022, **54**(9): 2601-2615. (ZOU Wanjie, LIU Meihua, LI Chuangdi. Seismic response analysis of generalized Maxwell damping isolated structure with braces under HU Yuxian spectrum excitation[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2022, **54**(9): 2601-2615.(in Chinese))
- [18] TOOTKABONI M, GRAHAM-BRADY L. Stochastic direct integration schemes for dynamic systems subjected to random excitations[J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2010, **25**(2): 163-171.

- [19] XU J, SPENCERJ B F, LU X L, et al. Optimization of structures subject to stochastic dynamic loading[J]. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 2017, **32**(8): 657-673.
- [20] SU C, XIAN J H. Nonstationary random vibration analysis of fractionally-damped systems by numerical explicit time-domain method[J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2022, **68**: 103228.
- [21] 葛新广, 龚景海, 李创第, 等. 功率谱二次正交化法在随机地震动响应的应用[J]. 振动工程学报, 2022, **35**(3): 616-624. (GE Xinguang, GONG Jinghai, LI Chuangdi, et al. Application of quadratic orthogonalization method of response power spectrum to random ground motion response[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2022, **35**(3): 616-624. (in Chinese))
- [22] 林家浩, 张亚辉, 赵岩. 虚拟激励法在国内外工程界的应用回顾与展望[J]. 应用数学和力学, 2017, **38**(1): 1-32. (LIN Jiahao, ZHANG Yahui, ZHAO Yan. The pseudo-excitation method and its industrial applications in China and abroad[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, **38**(1): 1-32. (in Chinese))
- [23] 林家浩, 张亚辉. 随机振动的虚拟激励法[M]. 北京: 科学出版社, 2004. (LIN Jiahao, ZHANG Yahui. *Excitation Method for Random Vibration*[M]. Beijing: Science Press, 2004. (in Chinese))
- [24] 葛新广, 张梦丹, 龚景海, 等. 频响函数二次正交法在 Davenport 风速谱下结构系列响应简明封闭解的应用研究[J]. 振动与冲击, 2021, **40**(21): 207-214. (GE Xinguang, ZHANG Mengdan, GONG Jinghai, et al. Application of FRF quadratic orthogonal method in getting concise closed form solutions of structural series responses under Davenport wind speed spectrum[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2021, **40**(21): 207-214. (in Chinese))
- [25] GE X G, GONG J H, ZHAO C J, et al. Structural dynamic responses of building structures with non-viscous dampers under Kanai-Tajimi spectrum excitation[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2022, **517**: 116556.
- [26] 徐怀兵, 欧进萍. 设置混合调谐质量阻尼器的高层建筑风振控制实用设计方法[J]. 建筑结构学报, 2017, **38**(6): 144-154. (XU Huaibing, OU Jinping. Design method for wind-induced vibration control of high-rise buildings with hybrid tuned mass dampers[J]. *Journal of Building Structures*, 2017, **38**(6): 144-154. (in Chinese))
- [27] 彭勇波, 孙培芳. 随机地震动作用下结构-TMDI 系统参数设计与概率密度演化分析[J]. 土木工程学报, 2023, **12**(56): 8-20. (PENG Yongbo, SUN Peifang. Parameter desing and probability density evolution analysis of structure-TMDI system subjected to stochastic earthquake ground motions[J]. *China Civil Engineering Journal*, 2023, **12**(56): 8-20. (in Chinese))
- [28] 欧进萍, 段宇博. 高层建筑结构的抗震可靠度分析与优化设计[J]. 地震工程与工程振动, 1995, **15**(1): 1-13. (OU Jinping, DUAN Yubo. Seismic reliability analysis and optimum design of tall buildings[J]. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 1995, **15**(1): 1-13. (in Chinese))