

# 强噪声作用下双稳态 Van der Pol 系统的随机分岔\*

郜心茹, 吴志强, 陈胜利

(天津大学 力学系, 天津 300350)

**摘要:** 从联合概率密度的角度分析随机非线性系统的随机分岔行为, 现有研究通常需要人为判断概率密度特征有无本质变化, 并且此过程无法自动化. 该文提出了一种新的计算方法, 能够实现随机分岔点的自动计算. 以强噪声激励下的双稳态 Van der Pol 系统为例, 分析了阻尼系数变化对随机动力学响应的影响. 研究表明, 随着阻尼系数的增加, 系统的联合概率密度会发生三次分岔, 呈现四种不同类型的几何特征. 该文提出的方法有望应用于其他随机非线性系统的随机分岔行为研究.

**关键词:** 随机 P 分岔; 分岔点; 联合概率密度; 自动计算

**中图分类号:** O324 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.440375

## Stochastic Bifurcations of Bi-Stable Van der Pol Systems Under Strong Noise

GAO Xinru, WU Zhiqiang, CHEN Shengli

(Department of Mechanics, Tianjin University, Tianjin 300350, P.R.China)

**Abstract:** The analysis of the stochastic bifurcation behaviors of stochastic nonlinear systems often requires artificial judgment based on the joint probability density and cannot be automated. A new calculation method for automatic calculation of random bifurcation points was proposed. The bi-stable Van der Pol system under strong noise excitation was taken as an example, the influences of damping coefficient changes on stochastic dynamic responses were analyzed. The research results show that, the joint probability density of the system bifurcates for 3 times with the increase of the damping coefficient, exhibiting 4 different types of geometric features. The proposed method can hopefully be applied to the study of stochastic bifurcation behaviors of other stochastic nonlinear systems.

**Key words:** stochastic P-bifurcation; bifurcation point; joint probability density; automatic calculation

## 0 引言

随机分岔是指参数变化引起响应概率密度特征发生本质变化的现象. 随机分岔的计算包括两方面: ① 随机系统响应的平稳概率密度的定性变化; ② 随机分岔点位置的计算<sup>[1-3]</sup>. 在概率密度函数没有解析解的情况下, 目前还缺乏系统的计算方法以解决这一问题. 通常情况下, 人们需要观察概率密度曲面是否发生本质

\* 收稿日期: 2023-12-29; 修订日期: 2024-04-10

**作者简介:** 郜心茹(1999—), 女, 硕士(E-mail: rgaoxin@163.com);  
吴志强(1968—), 男, 教授, 博士, 博士生导师(通讯作者. E-mail: zhiqw@tju.edu.cn);  
陈胜利(1993—), 男, 博士(E-mail: shengli\_c@163.com).

**引用格式:** 郜心茹, 吴志强, 陈胜利. 强噪声作用下双稳态 Van der Pol 系统的随机分岔[J]. 应用数学和力学, 2024, 45(12): 1506-1514.

变化,以判断是否发生了随机分岔现象,因此还无法实现系统随机分岔点的自动计算.本文将重点研究在强噪声激励下,双稳态 Van der Pol 系统发生的随机分岔现象.

Van der Pol 作为典型的非线性系统,在 1927 年被提出之后,学者们对方程确定性动力学行为开展了详尽的研究,其随机动力学行为也在近年来得到了结论<sup>[4]</sup>.除仅具有单稳态的标准方程外,还包括含有平衡点和极限环的双稳态 Van der Pol 方程<sup>[5-9]</sup>、双节律 Van der Pol 方程(双极限环稳态)<sup>[10-13]</sup>、三稳态 Van der Pol 方程<sup>[14-20]</sup>.

针对含 Van der Pol 项的双稳态方程的随机响应幅值概率密度研究,文献[5]基于随机平均法分析了参数变化对双稳态 Duffing-Van der Pol 系统概率密度曲线形状的影响,并得到了参数对系统稳定性的影响.文献[6]基于 Monte-Carlo 方法得到了 Lévy 噪声激励下的双稳态 Duffing-Van der Pol 系统的平稳幅值概率密度函数,并分析了由于平稳概率密度性质的变化引发的分岔行为.文献[7]基于随机平均法定性地分析了系统振幅的平稳幅值概率密度曲线的类型.针对幅值概率密度函数的随机分岔分析,虽然丰富了人们对这类系统的认识,但无法像联合概率密度函数全面地揭示系统的随机动力学行为<sup>[2]</sup>.

针对随机激励下双稳态 Van der Pol 方程联合概率密度的研究,文献[8]基于电路实验得到了双稳态 Van der Pol 方程的联合概率密度.文献[21]采用加权残差迭代法,求解了 Van der Pol 方程的联合概率密度高精度近似表达式.文献[22]提出了一种数据驱动的方法,从而推导出了 Van der Pol 方程的平稳联合概率密度近似表达式.目前尚未见到有关于随机分岔点精确计算的报道.文献[23]提出的联合概率密度特征提取方法,为解决随机分岔点的自动计算提供了可能.

近年来,强噪声的研究在物理、空气动力学、医学、生物学以及航空工程、振动工程等领域得到了广泛关注<sup>[24]</sup>.尤其在若干工程领域方面,强噪声引起的结构疲劳破坏会造成极其严重的影响,已然成为现在研究的热点之一<sup>[25-30]</sup>.然而,由于缺乏适当的研究工具,目前对于强噪声激励下,非线性系统的随机分岔现象的研究还相对较少见.

本文借助有限元软件 COMSOL 来计算系统联合概率密度,基于联合概率密度特征提取方法<sup>[23]</sup>,提出了一种自动计算随机分岔点的方法,以研究在强噪声激励下,阻尼系数变化引起的双稳态 Van der Pol 系统的随机分岔现象.

## 1 弱噪声激励下双稳态 Van der Pol 方程的随机分岔

Gauss 白噪声激励下双稳态 Van der Pol 系统随机微分方程为

$$\ddot{x} - (-\varepsilon + x^2 - x^4)\dot{x} + x = n(t), \quad (1)$$

其中,  $\varepsilon$  为阻尼参数;  $n(t)$  是强度为  $D$  的 Gauss 白噪声,其均值和相关函数满足  $E[n(t)] = 0, E[n(t)n(t + \tau)] = 2D\delta(t)$ .

确定性情况下<sup>[31]</sup>,阻尼系数变化过程中发生了两次分岔,分别是  $\varepsilon = 0$  处的亚临界 Hopf 分岔和  $\varepsilon = 0.125$  处的极限环鞍结分岔.当  $\varepsilon < 0$  时,系统仅有唯一稳定性极限环;当  $\varepsilon \in [0, 0.125]$  时,系统处于双稳态状态,系统同时存在一个稳定的平衡点和极限环;当  $\varepsilon > 0.125$  时,系统仅有一个稳定的平衡点.

随机激励时 ( $D \neq 0$ ),应用随机平均法,可得到漂移系数  $\bar{m}_1 = -\frac{\varepsilon r}{2} + \frac{r^3}{8} - \frac{r^5}{16} + \frac{D}{2r}$  和扩散系数  $\bar{b}_{11} = D$ . 根据漂移和扩散系数得到的 Itô 随机微分方程,进而得到其幅值转移概率密度满足的 Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK) 方程:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} [\bar{m}_1 p(r, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} [\bar{b}_{11} p(r, t)]. \quad (2)$$

令  $\partial p / \partial t = 0$ , 解得系统响应幅值  $r(t)$  的平稳概率密度函数如下:

$$p_s(r) = \eta \frac{r}{D} \exp\left(\frac{r^2}{D} \left(-\frac{\varepsilon}{2} + \frac{r^2}{16} - \frac{r^4}{48}\right)\right), \quad (3)$$

其中  $\eta$  为归一化常数.从式(3)可以看出,系统平稳概率密度函数的变化规律完全由随机噪声强度  $D$  和阻尼系数  $\varepsilon$  来确定.

令  $\frac{\partial p_s(r)}{\partial r} = \frac{\partial p_s(r)}{\partial r^2} = 0$ , 求解可得到参数  $(\varepsilon, D)$  满足的方程为

$$\begin{cases} \varepsilon = -\frac{3}{8}r^4 + \frac{1}{2}r^2, \\ D = -\frac{1}{4}r^6 + \frac{1}{4}r^4. \end{cases} \quad (4)$$

此即幅值概率密度曲线峰数变化条件,也即系统发生随机 P 分岔的转迁集(见图 1 阴影部分的边界)。

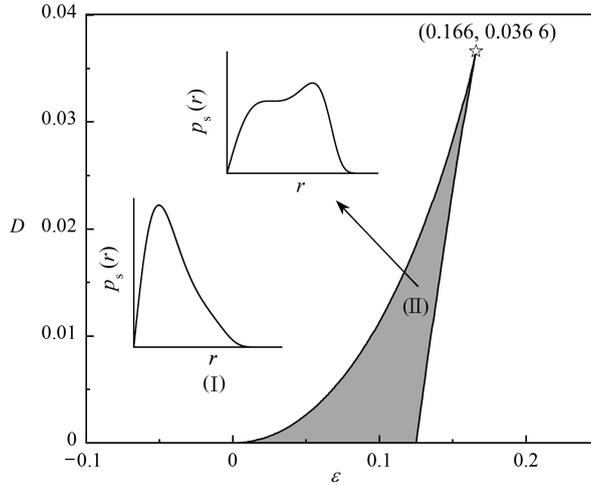


图 1 转迁集图

Fig. 1 Diagram of the transition set

由图 1 可见,转迁集曲线将平面分成了两个区域(I)、(II)。根据奇异性理论,同一区域内不同参数  $(\varepsilon, D)$  对应的幅值概率密度曲线定性相同。故当  $(\varepsilon, D)$  取值位于阴影区域(II)内时,幅值概率密度曲线呈现双峰的特点;取值位于区域(I)内时,幅值概率密度曲线呈现单峰的特点。

根据以上对系统随机分岔情况的分析可以发现,当  $D > 0.0366$  时,从幅值概率密度的角度已经难以揭示系统行为随参数的变化。因此,需要借助能更全面反映系统随机行为的联合概率密度来进行深入分析。下文将引入一种新的算法,基于联合概率密度讨论系统的随机分岔现象。本文所称强噪声是指其强度  $D > 0.0366$  的情形。

## 2 基于联合概率密度的随机分岔分析方法

本节主要概述了基于联合概率密度分析系统响应随机分岔的流程和基本思想,具体实现将在第 3 节中介绍。计算过程包括如下步骤:

1) 计算给定参数下系统的联合概率密度。目前,已有多种计算方法可供选用。例如:基于随机微分方程响应计算的 Monte-Carlo 模拟方法,以及直接通过 FPK 方程计算概率密度的方法,如路径积分法、有限元法和有限差分法。本文采用了 COMSOL 有限元软件,主要因为其编程简便、算法稳定且计算效率高。

2) 提取联合概率密度图的几何特征(峰、环形脊)。采用文献[23]提出的方法,不仅可以准确定位峰的位置,还能提取环形脊脊线(参见后文中图 4),这是实现随机分岔现象自动计算的关键。

3) 在感兴趣的参数范围内重复步骤 1)、2),参数变化的步长就是分岔点的定位精度。

4) 绘制几何特征随参数的变化图,若几何特征变化即可得系统的随机 P 分岔图。

经上述步骤后,即可得到类似后文中图 3 的随机分岔图。从图中可以判断是否有分岔发生,并确定出分岔点的位置。也就是说,运用上述方法即可实现随机分岔临界参数的自动计算,并将随机分岔的定性分析提高到定量计算。

该法可被视为随机版的 Poincare 分岔计算方法,也是通过提取随机响应解的特征,并绘制参数变化下解

的特征以获得分岔图.需特别强调的是,该方法与现有文献中计算随机系统 Poincare 图的方法有本质不同.例如,文献[32]直接利用确定性 Poincare 截面来计算随机响应的分岔,只能定性地展示扩散现象,无法给出定量分析.

### 3 强噪声激励下阻尼系数对随机 P 分岔的影响

本节将首先简述 COMSOL 软件计算联合概率密度的过程,并进行精度验证,然后讨论阻尼系数变化对双稳态系统随机动力学响应的影响.

#### 3.1 平稳联合概率密度 COMSOL 软件求解

方程(1)平稳概率密度对应的 FPK 方程为

$$\frac{\partial}{\partial x}(py) - D \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y}(p(-x + h(x)y)) = 0, \quad (5)$$

其中  $h(x) = -\varepsilon + x^2 - x^4$ .

设方程(5)的弱解为  $\hat{p}$ ,此时系统存在残差  $R$  为

$$\frac{\partial}{\partial x}(\hat{p}y) - D \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y}(\hat{p}(-x + h(x)y)) = R. \quad (6)$$

在偏微分方程两侧相乘试探函数  $v_i$  后,等式两侧分别在域  $\Omega$  上积分,从而得到相应的弱形式:

$$\int_{\Omega} R v_i dx dy = \int_{\Omega} \left( -\hat{p}y \frac{\partial v_i}{\partial x} + \left( \hat{p}(-h(x)y + x) + D \frac{\partial \hat{p}}{\partial y} \right) \frac{\partial v_i}{\partial y} \right) dx dy + \int_{\partial\Omega} \left( \hat{p}y + (\hat{p}(-h(x)y + x)) - D \frac{\partial \hat{p}}{\partial y} \right) v_i dS = 0. \quad (7)$$

弱形式(7)中包含两部分,其中前一部分为面积分,另外一部分为边界积分.COMSOL 中提供了弱形式模块,能够灵活地指定要计算的方程,大大简化了数值模拟的过程.主要计算过程如下:

1) 前置条件选择.主要包括研究模块,方程维数以及研究类型,这里分别选择数学组件中的弱形式模块,方程维数选为 2 维,研究类型选为稳态.

2) 输入弱形式.在 COMSOL 中弱形式的面积分和边界积分在弱形式偏微分方程模块下的不同节点进行输入:

(a) 弱形式的面积分部分.在弱形式偏微分模块下对应的弱表达式一栏输入面积分中的被积函数.首先根据 COMSOL 的语法规则,将上述求得的弱表达式转换为 COMSOL 语句,将  $\hat{p}$  替换为  $u$ ,  $\hat{p}$  对  $x, y$  的导数替换为  $ux$  以及  $uy$ . 试函数  $\partial v_i$  替换为  $\text{test}(u)$ . 在 COMSOL 的语法中,  $\text{test}$  函数和导数算子之间是可以替换的,因此公式中的  $\partial v_i / \partial x$  和  $\partial v_i / \partial y$  分别替换为  $\text{test}(ux)$  和  $\text{test}(uy)$ . 则式(7)中面积分的具体形式为

$$(ut) \text{test}(u) = -\text{test}(ux)(uy) + D(uy) \text{test}(uy) + \text{test}(uy)(u(-h(x)y + x)). \quad (8)$$

(b) 弱形式的边界积分部分.在弱形式偏微分模块下的弱贡献一栏输入边界积分对应的被积函数.根据 FPK 方程的边界条件,在区域边界处其概率密度及其导数值都为 0,因此边界积分同样为 0.因此在弱贡献一栏中直接填入 0.

3) 确定计算范围.根据平稳概率密度函数得到系统的幅值概率曲线,选取峰值后幅值概率基本接近为 0 处的幅值定义为  $R$ , 初步得到计算区域为  $x_{\max} = -x_{\min} = R, y_{\max} = -y_{\min} = R$ .

4) 建立约束条件.在 COMSOL 中首先定义关于计算结果  $u$  的积分函数:  $df = \text{intop1}(u)$ . 在全局约束中定义  $df - 1 = 0$ , 即可保证计算结果在计算区域内归一化.

5) 区域离散化设置.对计算区域进行网格划分,选择合适的网格类型(三角形或四边形).随后选择合适的形函数,如 Lagrange、Hermite 函数等.本文计算中网格选取四边形,形函数选择 Lagrange 函数.

6) 选择求解器并计算.COMSOL 稳态求解器中提供了多种不同的算法选项:直接求解法、迭代求解法等.本文选择直接求解法计算系统的平稳联合概率密度.

根据以上步骤,选取参数  $\varepsilon = 0.07, D = 0.06$ , 计算得到系统的 PDF 曲面如图 2 所示.图 2(a)为 COMSOL 软件计算得到的 PDF 曲面;图 2(b)给出了用 Monte-Carlo 方法得到的结果,图中红色圆点代表了特征提取得

到的峰;图 2(c) 给出了峰点位置的比较结果.观察两种方法得到的结果图可以看出:COMSOL 计算结果得到的特征峰的位置为(1.40, -0.34), (-1.39, 0.36), Monte-Carlo 数值模拟得到的峰的位置为(1.399, -0.343), (-1.386, 0.360).可以看出两者计算结果一致性很强,位置相对误差约为 0.1%.但 COMSOL 软件计算联合概率密度的效率远远高于 Monte-Carlo 方法.因此本文选用 COMSOL 软件为工具,以应对随机分岔计算需要的大量联合概率密度计算问题.

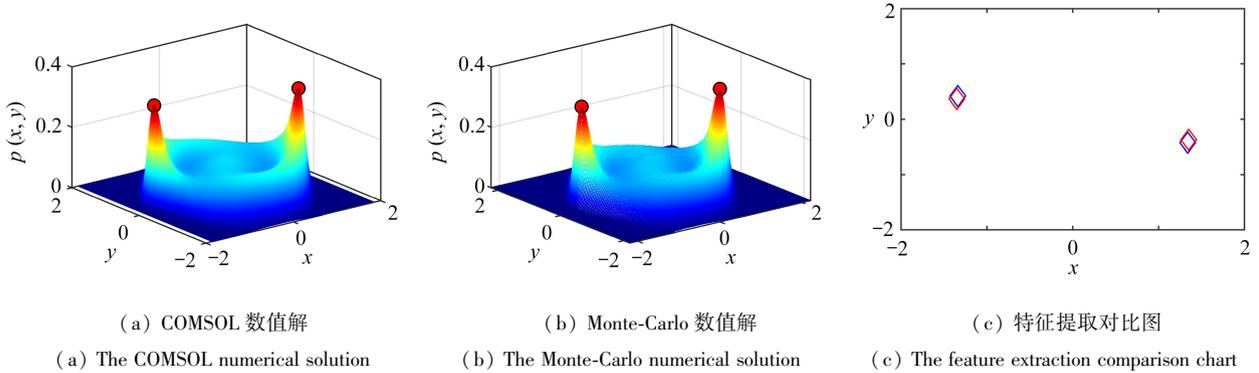


图 2 联合概率密度验证

Fig. 2 The joint probability density validation

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同.

### 3.2 阻尼系数对概率密度的影响

取噪声强度  $D = 0.06$ , 阻尼系数  $\varepsilon$  变化范围为  $[0, 0.2]$ .以 0.001 为  $\varepsilon$  变化的步长,逐点计算系统对应的联合概率密度曲面并提取其几何特征,即得到如图 3 所示的分岔图.图中黑色曲线表示环形盆,  $\diamond$  表示环上峰,  $*$  表示原点峰.因为联合概率密度曲面关于原点中心对称,故图中只画一个峰作为环上峰代表.图 4 选取了不同区间内的阻尼系数参数,给出了其联合概率密度曲面俯视图和其对应的几何特征图,图中红色圆点表示环上峰,黑色实线表示环形盆,  $*$  表示原点峰.

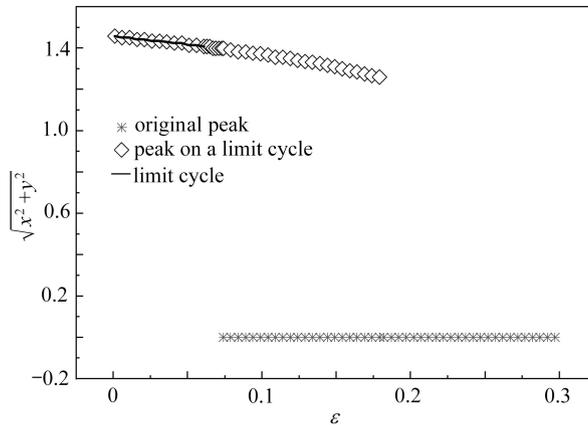


图 3  $D = 0.06$  时,系统的分岔图

Fig. 3 The bifurcation diagram of the system for  $D = 0.06$

根据图 3 结果可得到,该系统在  $\varepsilon = 0.061, 0.072, 0.18$  处发生分岔.在阻尼系数变化过程中系统联合概率密度几何特征的本质发生变化,分别为:环形盆消失、原点峰出现、环上峰消失.由图 4 可以看出,环上峰、原点峰和环的位置是正确的,这证实了图 3 所示的分岔图是准确的.同时根据  $\varepsilon$  变化分成 4 组不同区间的特征图,得到噪声强度  $D = 0.06$  时阻尼系数变化对系统几何特征的影响如下:

- 1)  $\varepsilon < 0.061$  时,系统联合概率密度特征为含环上峰的环形盆(见图 4(a)、4(b)).
- 2)  $0.061 < \varepsilon < 0.072$  时,系统联合概率密度特征为环上峰(见图 4(c)、4(d)).
- 3)  $0.072 < \varepsilon < 0.18$  时,系统联合概率密度特征为原点峰和环上峰(见图 4(e)、4(f)).

4)  $\varepsilon > 0.18$  时,系统联合概率密度特征为原点峰(见图 4(g)、4(h))。

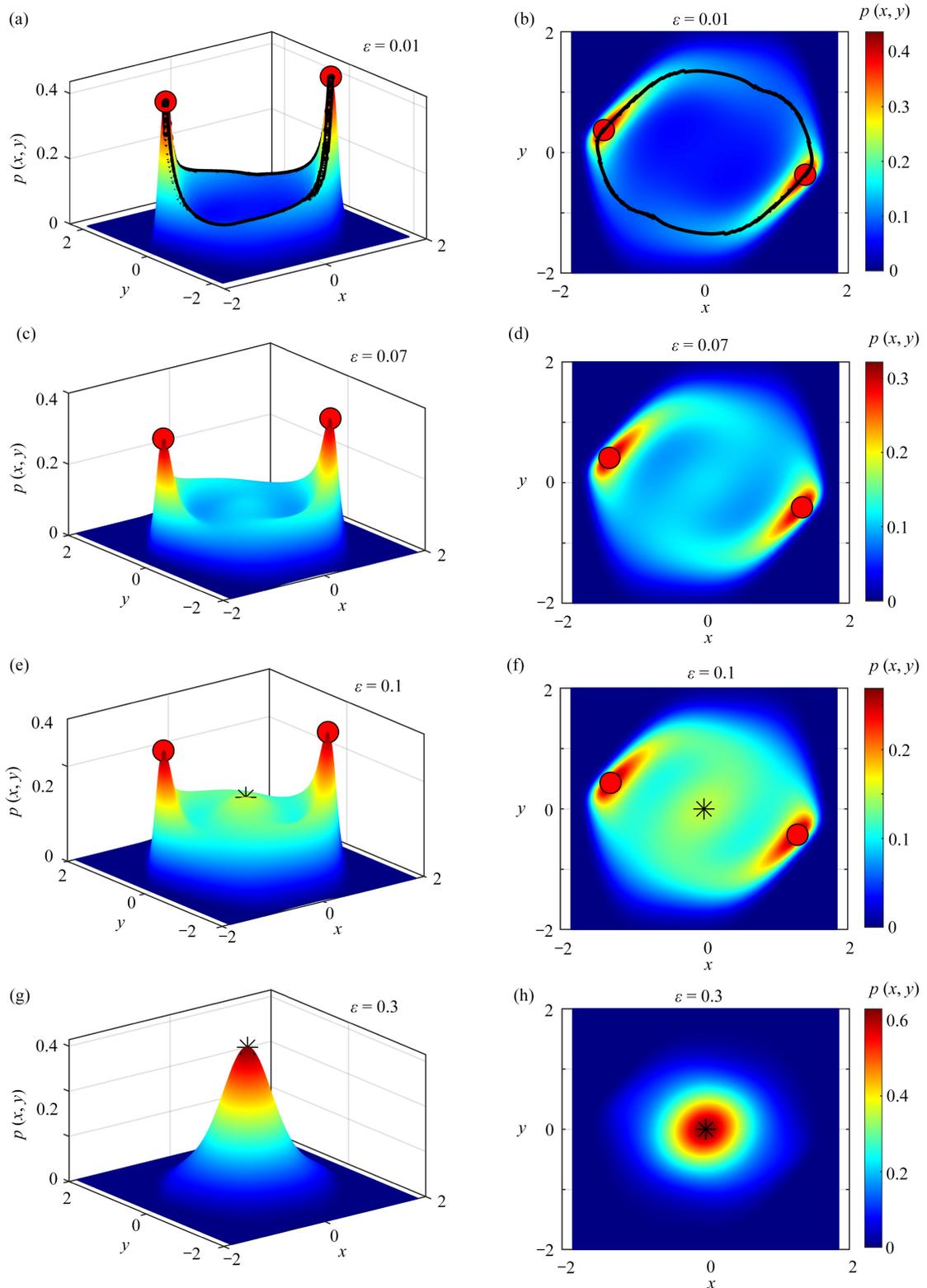


图 4  $D = 0.06$  时,系统联合概率密度曲面图及其几何特征图

Fig. 4 System joint probability density surface graphs and geometric feature graphs for  $D = 0.06$

### 3.3 与已有实验结果对照

文献[8]中使用的电路实验方法得到了不同激励强度和阻尼系数下双稳态 Van der Pol 系统的联合概率

密度曲面。

①  $D = 0.003$ ,  $\varepsilon = 0.1$  时,系统联合概率密度特征为峰与底部环状结构共存,即含环上峰的环形盆,其特征与图 4(a) 类似。

②  $D = 0.5$ ,  $\varepsilon = 0.1$  时,系统联合概率密度特征为环上峰结构,其特征与图 4(c) 类似。

③  $D = 0.005$ ,  $\varepsilon = 0.1$  时,系统联合概率密度特征为三峰台状结构,即原点峰和环上峰,其特征与图 4(e) 类似。

④  $D = 0.005$ ,  $\varepsilon = 0.2$  时,系统联合概率密度特征为单峰结构,即原点峰和环上峰,其特征与图 4(g) 类似。

根据上述对照可知,本文中使用的自动计算随机分岔点的方法有效地揭示了随机非线性系统中存在的不同类型的联合概率密度。

为了验证方法的有效性,我们还计算了更多激励强度下系统的随机分岔。初步发现更大强度噪声激励下,阻尼变化引起的随机分岔顺序仍为环形盆消失、原点峰出现和环上峰消失,但分岔点位置有变化,见表 1。后续更详细的计算有望揭示类似于图 1 的联合概率密度转迁集图,提供对此类随机系统行为更全面的认知。

表 1 激励强度对随机分岔点位置影响

Table 1 The influences of the stimulation intensity on the positions of stochastic bifurcation points

$D$	the disappearance of the limit cycle $\varepsilon$	the appearance of the origin peak $\varepsilon$	the disappearance of the peak on a limit cycle $\varepsilon$
0.06	0.061	0.072	0.180
0.07	0.053	0.073	0.193
0.08	0.043	0.073	0.207
0.09	0.031	0.072	0.218
0.1	0.022	0.072	0.232

## 4 结 论

本文提出了一种能自动计算系统随机分岔临界参数的方法。该方法基于已有的联合概率密度特征提取方法的算法发展而来,不仅可以确定随机分岔是否发生,还能同时确定分岔点的具体位置。需要指出的是,除用于分析由参数变化引发的系统平稳概率密度随机分岔,它还可应用于瞬态概率密度演化过程中的分岔分析,相关的研究正在进行中。

针对强噪声激励下的双稳态 Van der Pol 系统,我们研究发现:当噪声强度  $D = 0.06$ , 阻尼系数在  $[0, 0.2]$  区间内变化时,系统响应会经历三次分岔,分岔点位置分别为  $\varepsilon = 0.061, 0.072, 0.18$ 。系统联合概率密度呈现了 4 种不同类型的几何特征,分别为含有环上峰的环形盆、仅有环上峰、原点峰与环上峰共存以及仅有原点峰。在更强激励条件下,直至  $D = 0.1$  时,阻尼增加引起的随机分岔顺序仍保持不变,但分岔点的位置发生了变化。要更全面地认识噪声强度和阻尼系数变化对联合概率密度影响的规律,需要计算导致联合概率密度图有本质变化的参数集合,即参数空间转迁集。此项工作还有待进一步开展。

## 参考文献 (References):

- [1] 陈予恕. 非线性振动系统的分叉和混沌理论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1993. (CHEN Yushu. *Bifurcation and Chaos Theory of Nonlinear Vibration Systems* [M]. Beijing: Higher Education Press, 1993. (in Chinese))
- [2] 朱位秋. 非线性随机动力学与控制: Hamilton 理论体系框架[M]. 北京: 科学出版社, 2003. (ZHU Weiqiu. *Nonlinear Stochastic Dynamics and Control: Hamilton Theory System Frame* [M]. Beijing: Science Press, 2003. (in Chinese))
- [3] 朱位秋, 蔡国强. 随机动力学引论[M]. 北京: 科学出版社, 2017. (ZHU Weiqiu, CAI Guoqiang. *Introduction to Stochastic Dynamics* [M]. Beijing: Science Press, 2017. (in Chinese))
- [4] VAN DER POL B. Forced oscillations in a circuit with non-linear resistance (reception with reactive triode)

- [J]. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 1927, **3**(13): 65-80.
- [5] 刘坤峰, 靳艳飞. 相关白噪声激励下双稳态 Duffing-Van der Pol 系统的随机分岔[J]. 动力学与控制学报, 2020, **18**(4): 12-18. (LIU Kunfeng, JIN Yanfei. Stochastic bifurcation in bistable duffing-Van der Pol system driven by correlated white noises[J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2020, **18**(4): 12-18. (in Chinese))
- [6] 顾仁财, 许勇, 郝孟丽, 等. Lévy 稳定噪声激励下的 Duffing-Van der Pol 振子的随机分岔[J]. 物理学报, 2011, **60**(6): 157-161. (GU Rencai, XU Yong, HAO Mengli, et al. Stochastic bifurcations in Duffing-Van der Pol oscillator with Lévy stable noise[J]. *Acta Physica Sinica*, 2011, **60**(6): 157-161. (in Chinese))
- [7] LI Y, WU Z, ZHANG G, et al. Stochastic P-bifurcation in a bistable Van der Pol oscillator with fractional time-delay feedback under Gaussian white noise excitation[J]. *Advances in Difference Equations*, 2019, **2019**(1): 448.
- [8] 宋凯令, 吴志强. 加性噪声激励对双稳态 Van der Pol 系统联合概率密度的影响[J]. 应用力学学报, 2020, **37**(6): 2395-2403. (SONG Kaoling, WU Zhiqiang. Influence of additive noise excitation on joint probability density of bi-stable Van der Pol system[J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2020, **37**(6): 2395-2403. (in Chinese))
- [9] SUN Z, FU J, XIAO Y, et al. Delay-induced stochastic bifurcations in a bistable system under white noise[J]. *Chaos: an Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2015, **25**(8): 083102.
- [10] CHAMGOUÉ A C, YAMAPI R, WOAFU P. Bifurcations in a birhythmic biological system with time-delayed noise[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2013, **73**(4): 2157-2173.
- [11] GUO Q, SUN Z, XU W. Stochastic bifurcations in a birhythmic biological model with time-delayed feedbacks[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2018, **28**(4): 1850048.
- [12] GUIMFACK B A, MBAKOB Y R, TABI C B, et al. On stochastic response of fractional-order generalized birhythmic Van der Pol oscillator subjected to delayed feedback displacement and Gaussian white noise excitation[J]. *Chaos, Solitons and Fractals: the Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, and Nonequilibrium and Complex Phenomena*, 2022, **157**. DOI: 10.1016/j.chaos.2022.111936.
- [13] YONKEU R M, YAMAPI R, FILATRELLA G, et al. Stochastic bifurcations induced by correlated noise in a birhythmic Van der Pol system[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2016, **33**: 70-84.
- [14] LI Y, WU Z. Stochastic P-bifurcation in a tri-stable Van der Pol system with fractional derivative under Gaussian white noise[J]. *Journal of Vibroengineering*, 2019, **21**(3): 803-815.
- [15] 吴志强, 王文博, 张祥云. 三稳态 Van der Pol 系统随机 P 分岔电路实验研究[J]. 振动与冲击, 2018, **37**(13): 111-116. (WU Zhiqiang, WANG Wenbo, ZHANG Xiangyun. A tri-stable Van der Pol system's stochastic P-bifurcation circuit experiment[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2018, **37**(13): 111-116. (in Chinese))
- [16] 李亚杰, 吴志强, 兰奇逊, 等. 联合噪声激励下分数阶三稳 Van der Pol 振子的随机 P 分岔[J]. 振动与冲击, 2021, **40**(16): 275-280. (LI Yajie, WU Zhiqiang, LAN Qixun, et al. Stochastic P bifurcation in a tri-stable Van der Pol oscillator with fractional derivative excited by combined Gaussian white noises[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2021, **40**(16): 275-280. (in Chinese))
- [17] 郝颖, 吴志强. 三稳态 Van der Pol-Duffng 振子的随机 P 分岔[J]. 力学学报, 2013, **45**(2): 257-264. (HAO Ying, WU Zhiqiang. Stochastic P-bifurcation of tri-stable Van der Pol-Duffing oscillator[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2013, **45**(2): 257-264. (in Chinese))
- [18] 吴志强, 王耀光, 张祥云, 等. 一类三稳态系统确定性及随机分岔现象分析[J]. 天津大学学报(自然科学与工程技术版), 2018, **51**(9): 895-902. (WU Zhiqiang, WANG Yaoguang, ZHANG Xiangyun, et al. Deterministic and stochastic bifurcations of a tri-stable system[J]. *Journal of Tianjin University (Science and Technology)*, 2018, **51**(9): 895-902. (in Chinese))
- [19] 吴志强, 郝颖. 乘性色噪声激励下三稳态 Van der Pol-Duffing 振子随机 P-分岔[J]. 物理学报, 2015, **64**(6): 53-58. (WU Zhiqiang, HAO Ying. Stochastic P-bifurcations in tri-stable Van der Pol-Duffing oscillator with multiplicative colored noise[J]. *Acta Physica Sinica*, 2015, **64**(6): 53-58. (in Chinese))
- [20] 吴志强, 郝颖. 随机激励 Van der Pol-Duffing 方程三峰 P-分岔[J]. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2013, **43**

- (4): 524-529. (WU Zhiqiang, HAO Ying. Three-peak P-bifurcations in stochastically excited Van der Pol-Duffing oscillator[J]. *Scientia Sinica: Physica, Mechanica & Astronomica*, 2013, **43**(4): 524-529. (in Chinese))
- [21] CHEN L C, LIU J, SUN J Q. Stationary response probability distribution of SDOF nonlinear stochastic systems [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2017, **84**(5): 051006.
- [22] TIAN Y, WANG Y, JIANG H, et al. Stationary response probability density of nonlinear random vibrating systems: a data-driven method[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2020, **100**(3): 2337-2352.
- [23] CHEN S, WU Z. Method for extracting geometrical characteristics of joint probability density based on contour lines[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2022, **38**(2): 521029.
- [24] 沈壕. 强噪声学[M]. 北京: 科学出版社, 1996. (SHEN Hao. *Strong Noise Science*[M]. Beijing: Science Press, 1996. (in Chinese))
- [25] LI P, YAN Y, LIN H. Numerical simulation and experimental researches on the vibration-acoustic coupled property of an aircraft model under strong reverberation noise[J]. *Journal of Vibration and Control*, 2017, **23**(17): 2757-2766.
- [26] MA Q, CAO S, GONG T, et al. Weak fault feature extraction of rolling bearing under strong Poisson noise and variable speed conditions[J]. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2022, **36**(11): 5341-5351.
- [27] LI H, WANG G Z, LI L J, et al. Design of the swimming system of a bionic jellyfish robot for seabed exploration[J]. *Applied Ocean Research*, 2023, **134**: 103498.
- [28] 马乐, 刘杰, 马志丽, 等. 强噪声下全驱空中作业平台自抗扰反演控制[J]. 中国惯性技术学报, 2022, **30**(3): 395-402. (MA Le, LIU Jie, MA Zhili, et al. Active disturbance rejection backstepping control for fully-actuated flight platform of aerial manipulation with strong noise[J]. *Journal of Chinese Inertial Technology*, 2022, **30**(3): 395-402. (in Chinese))
- [29] 雷春丽, 史佳硕, 马淑珍, 等. 强噪声环境下基于 MSDCNN 的滚动轴承故障诊断方法[J/OL]. 北京航空航天大学学报[2024-04-10]. <https://doi.org/10.13700/j.bh.1001-5965.2023.0456>. (LEI Chunli, SHI Jiashuo, MA Shuzhen, et al. Based on MSDCNN in strong noise environment rolling bearing fault diagnosis method[J/OL]. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*[2024-04-10]. <https://doi.org/10.13700/j.bh.1001-5965.2023.0456>. (in Chinese))
- [30] 叶正伟, 邓生文, 梁相玲. Gauss 白噪声激励下的永磁同步电动机模型的分岔分析[J]. 应用数学和力学, 2023, **44**(7): 884-894. (YE Zhengwei, DENG Shengwen, LIANG Xiangling. Bifurcation analysis of the permanent magnet synchronous motor model under white Gaussian noises[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2023, **44**(7): 884-894. (in Chinese))
- [31] 郝颖. 多稳态系统随机 P-分岔及其在高维机翼颤振系统中的应用[D]. 天津: 天津大学, 2014. (HAO Ying. Stochastic P-bifurcation in multi-stable system and its application in high dimensional wing flutter system[D]. Tianjin: Tianjin University, 2014. (in Chinese))
- [32] ALEXANDROV D V, BASHKIRTSEVA I A, CRUCIFIX M, et al. Nonlinear climate dynamics: from deterministic behaviour to stochastic excitability and chaos[J]. *Physics Reports*, 2021, **902**: 1-60.