

基于 PD-FEM 混合模型的材料热力耦合损伤分析*

曾金宝, 姜翠香, 张益豪

(武汉科技大学 理学院, 武汉 430065)

摘要: 提出了一种新的近场动力学-有限元方法(peridynamics-finite element method, PD-FEM)混合模型.该模型用于求解材料热力耦合损伤问题,将求解域划分为近场动力学(PD)区域和有限元方法(FEM)区域,通过 FEM 节点与 PD 物质点构成的混合键连接各个子区域.采用该模型对氧化铝陶瓷板在热冲击载荷作用下的损伤行为进行了模拟分析,计算结果表明,采用该混合模型获得的裂纹萌生及扩展与实验研究结果吻合良好,验证了该模型的正确性.该 PD-FEM 混合模型继承了 PD 处理不连续问题的优势,同时,由于 FEM 的引入,大大提高了 PD 方法在研究材料热力耦合损伤问题时的求解效率.

关键词: 热力耦合; 近场动力学; PD-FEM 模型; 裂纹; 损伤

中图分类号: O346.1 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.450006

Thermal-Mechanical Coupling Damage Analysis of Material Based on PD-FEM Hybrid Model

ZENG Jinbao, JIANG Cuixiang, ZHANG Yihao

(College of Science, Wuhan University of Science and Technology,
Wuhan 430065, P.R.China)

Abstract: A new PD-FEM (peridynamics-finite element method) hybrid model method was proposed for solving thermal-mechanical coupling problems. Its solution region was divided into peridynamics and finite element subregions. The hybrid bonds introduced to mixed these two subregions were composed of finite element nodes and peridynamics material points. The hybrid model was used to simulate damage behavior of alumina ceramic plates under thermal shock loads. Calculation results showed that the cracks initiation and propagation obtained by the hybrid model were in good agreement with experiment results, which validated the accuracy and availability of the hybrid model. The PD-FEM hybrid model inherits the advantage of peridynamics in dealing with discontinuous problems. Because the finite element method is introduced, the model significantly improves the efficiency of studying thermal-mechanical coupling problems using peridynamics method.

Key words: thermal-mechanical coupling; peridynamics; PD-FEM model; crack; damage

0 引言

耐火陶瓷材料被广泛运用于冶金、军工和航空航天等领域,耐火陶瓷材料固有的脆性导致其抗热冲击性

* 收稿日期: 2024-01-08; 修订日期: 2024-03-01

作者简介: 曾金宝(1995—),男,硕士生(E-mail: 1156043124@qq.com);

姜翠香(1967—),女,博士,硕士生导师(通讯作者. E-mail: jiangcuixiang@wust.edu.cn).

引用格式: 曾金宝,姜翠香,张益豪.基于 PD-FEM 混合模型的材料热力耦合损伤分析[J].应用数学和力学,2024,45(10):1345-1358.

能较差^[1],在热冲击载荷作用下裂纹萌生和扩展,最终导致材料失效,因此,对耐火陶瓷材料在热力耦合条件下的损伤行为进行研究是非常必要的.有限元方法(FEM)因适用范围广、计算效率高的特点在热力耦合问题分析中得到了广泛应用^[2-5],然而FEM在求解不连续问题时存在不足,其空间微分求解形式导致裂纹尖端存在奇异性.Silling等^[6-8]提出了近场动力学(PD)理论.该理论基于非局部作用思想建立的积分求解形式,使其在处理不连续问题时具有天然优势.

在基于PD理论的热力学研究方面,Bobaru等^[9-10]提出了适用于不连续问题的PD瞬态热传导模型.Oterkus等^[11]通过能量守恒和自由能密度函数,推导了广义的PD完全热力耦合模型,化简后得到了键基PD(bond-based peridynamics, BBPD)热力耦合方程.D'Antuono等^[12]提出了弱耦合BBPD热力耦合模型,采用多速率显式积分方案,研究了薄板和厚板在热冲击荷载下裂纹的萌生和扩展.Wang等^[13]建立了一种考虑应变软化特性的态基近场动力学(state-based peridynamics, SBPD)弱耦合热弹性模型,研究了陶瓷尺寸对热冲击裂纹的影响.Gao等^[14]提出了基于SBPD的完全热力耦合模型,解除了BBPD热力耦合模型中Poisson比只能取定值的限制,推导了基于SBPD的完全耦合热弹性方程及其无量纲形式,通过将热响应和力学响应的结果与边界元法和FEM的结果进行比较,验证了该模型的有效性.Wang等^[15]提出了一种改进的BBPD热力耦合模型,该模型考虑了物质点间的距离对微导热系数的影响,采用自适应动态松弛法使位移场快速达到稳定状态,研究了脆性固体材料的热冲击响应问题.李星等^[16]采用热焓法改写经典热传导方程,建立了一种考虑相变的BBPD热力耦合模型,研究了多孔介质冻结破坏问题,得到了多孔介质中材料相变过程中液固界面的演化特征.

然而,采用PD方法分析热力耦合条件下材料损伤行为时存在计算效率低的问题,为了提高整体求解效率,研究人员对PD与FEM的混合建模进行了研究.Kilic等^[17]在FEM与PD区域之间定义了一个重合区域,在重合区域内由FEM理论计算得到节点位移和速度,再通过PD理论计算体力密度作为重叠区域FEM单元的外力,并分析了静态和准静态问题.Liu等^[18]在FEM和PD区域之间引入嵌有一定数量PD物质点的界面单元,通过插值函数和节点位移确定嵌入的PD物质点位移,并将嵌入的PD物质点所受非局部作用力分配到界面单元的节点上.Seleson等^[19]提出了一种基于力的混合模型来耦合PD理论和经典弹性理论,该模型FEM和PD区域之间过渡区域的混合函数具有一定的非局部权重.Bie等^[20-21]提出了通过对偶域近场动力学(dual-horizon peridynamics, DH-PD)耦合局部和非局部理论的方法,FEM节点被视为邻域范围趋近于零的特殊PD物质点,FEM节点受到的非局部作用力来自于对偶域的键.章青等^[22]提出了一种PD与FEM混合建模的隐式分析方法,交界面上的FEM节点与一定范围内PD物质点通过杆单元连接,该方法不需要设置重叠区域或过渡区域.目前PD与FEM混合建模方法大多应用于单物理场问题的研究,建立求解热力耦合多物理场耦合问题的PD与FEM混合模型(PD-FEM模型)具有重要的研究意义.

本文提出了PD与FEM混合建模求解热力耦合损伤问题的PD-FEM混合模型,采用该混合模型对陶瓷板受热冲击载荷作用时的损伤行为进行了模拟分析,研究了陶瓷板裂纹萌生和扩展过程,计算结果与实验结果吻合良好,验证了该PD-FEM混合模型的正确性.与传统的PD热力耦合模型相比,该混合模型继承了PD处理不连续问题的优势,极大地提高了计算效率,为材料热力耦合损伤行为的分析研究提供了新的途径.

1 PD热力耦合理论

PD理论将求解域离散成一系列的物质点,物质点 x_i 与其邻域范围内任意物质点 x_j 之间存在相互作用,物质点 x_i 与 x_j 的相对位置矢量为 $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{X}_j - \mathbf{X}_i$,相对位移矢量为 $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i$,物质点之间形成的键伸长率为 $s = (|\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}| - |\boldsymbol{\xi}|) / |\boldsymbol{\xi}|$,物质点 x_i 和 x_j 的温度分别为 θ_i 和 θ_j ,考虑热变形效应影响后, BBPD运动方程为^[11]

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}(x_i, t) = \int_H c(s - \alpha T_{\text{avg}}) \frac{\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}}{|\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\eta}|} \mu(x_i, x_j, t) dV_j + \mathbf{b}(x_i, t), \quad (1)$$

式中, ρ 为材料密度, H 为物质点 x_i 的邻域,平面应力问题中微弹性模量 $c = 9E / (\pi h \delta^3)$, E 为材料弹性模量, h 为物体厚度, δ 为物质点邻域半径, α 为材料热膨胀系数,物质点温度变化量的平均值 $T_{\text{avg}} = (\theta_i + \theta_j -$

$2\theta_0)/2$, θ_0 为初始参考温度, V_j 为物质点 x_j 的体积, $\mathbf{b}(x_i, t)$ 为作用于物质点 x_i 的体力密度矢量.

引入描述物质点对之间的键是否断裂的分段函数 $\mu(x_i, x_j, t)^{[15]}$:

$$\mu(x_i, x_j, t) = \begin{cases} 1, & s - \alpha T_{\text{avg}} \leq s_c, \\ 0, & s - \alpha T_{\text{avg}} > s_c, \end{cases} \quad (2)$$

式中, 对于平面应力问题临界伸长率 $s_c = \sqrt{4\pi G_c / (9E\delta)}$, G_c 为断裂能释放率. $\mu(x_i, x_j, t) = 0$ 表示物质点之间的键发生不可逆的断裂, 物质点之间将不再存在相互作用力和传递热量.

考虑物体变形对温度场的影响后, BBPD 热传导方程为^[11]

$$\rho c_v \dot{\theta}(x_i, t) = \int_H \left(\kappa_p \frac{\theta_j - \theta_i}{|\xi|} - \theta_i \frac{\alpha c}{2} \dot{e} \right) \mu(x_i, x_j, t) dV_j + h_s(x_i, t), \quad (3)$$

式中, c_v 为材料比热容, 微导热系数 $\kappa_p = 6k / (\pi h \delta^3)$, k 为材料导热系数, $h_s(x_i, t)$ 为作用于物质点 x_i 的热源密度, 物质点之间的伸长量 $e = |\xi + \eta| - |\xi|$, 其对时间的导数为

$$\dot{e} = \frac{\xi + \eta}{|\xi + \eta|} \cdot \dot{\eta}. \quad (4)$$

材料的损伤通过统计断裂的键与总键数的比例确定, 损伤函数为

$$\varphi(x_i, t) = 1 - \frac{\int_H \mu(x_i, x_j, t) dV_j}{\int_H dV_j}. \quad (5)$$

2 热力耦合问题的 FEM 分析方法

基于连续介质力学的热力耦合运动方程和瞬态热传导方程为^[23]

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}, \quad (6)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{D}_\theta \nabla \theta) + h_q + h_\varepsilon - \rho c_v \dot{\theta} = 0, \quad (7)$$

式中, ∇ 为梯度算子, $\boldsymbol{\sigma}$ 为 Cauchy 应力, \mathbf{b} 为体力密度矢量, \mathbf{u} 为位移矢量, \mathbf{D}_θ 为导热系数张量, h_q 为热源密度, θ 为温度, 考虑热变形影响后物理方程为^[24] $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_u (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_\theta)$, \mathbf{D}_u 为弹性矩阵, $\boldsymbol{\varepsilon}$ 为应变, $\boldsymbol{\varepsilon}_\theta$ 为温度变化引起的热应变, 变形引起的热流密度为 $h_\varepsilon = \theta \beta_{\text{cl}} \dot{e}$, 热模量为 $\beta_{\text{cl}} = \alpha E / (1 - \nu)$, ν 为 Poisson 比, \dot{e} 为变形对时间的导数.

在 Γ_u 边界上已知弹性体的位移称为位移边界条件, 在 Γ_p 边界上已知外力称为力的边界条件, 则有

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}, & \text{on } \Gamma_u, \\ \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{p}}, & \text{on } \Gamma_p, \end{cases} \quad (8)$$

式中, $\bar{\mathbf{u}}$ 为 Γ_u 边界上给定的位移矢量, $\bar{\mathbf{p}}$ 为边界 Γ_p 上单位面积受到的力矢量, \mathbf{n} 为边界的单位外法线向量.

在 Γ_1 边界上给定温度值称为第一类边界条件, 在 Γ_2 边界上给定热流密度称为第二类边界条件, 在 Γ_3 边界上给定对流换热条件称为第三类边界条件, 则有

$$\begin{cases} \theta = \bar{\theta}, & \text{on } \Gamma_1, \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_\theta \nabla \theta) = \bar{h}_{\Gamma_2}, & \text{on } \Gamma_2, \\ \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_\theta \nabla \theta) = h(\theta_\infty - \theta), & \text{on } \Gamma_3, \end{cases} \quad (9)$$

式中, $\bar{\theta}$ 为 Γ_1 边界上给定的温度值, \bar{h}_{Γ_2} 为 Γ_2 边界上给定的热流密度, h 为对流换热系数, θ_∞ 为环境温度.

将求解域离散成一系列平面四节点四边形单元后, 单元内位移和温度通过形函数插值得到

$$\begin{cases} \mathbf{u}^e = \mathbf{N}_u^e \mathbf{U}^e = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} [u_1^x & u_1^y & u_2^x & u_2^y & u_3^x & u_3^y & u_4^x & u_4^y], \\ \theta^e = \mathbf{N}_\theta^e \boldsymbol{\Theta}^e = [N_1 & N_2 & N_3 & N_4] [\theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4]^T, \end{cases} \quad (10)$$

式中, \mathbf{N}_u^e 为位移场插值函数矩阵, \mathbf{U}^e 为单元节点位移列阵, \mathbf{N}_θ^e 为温度场插值函数矩阵, $\boldsymbol{\Theta}^e$ 为单元节点温度

列阵, $u_1^x \sim u_4^x, u_1^y \sim u_4^y$ 和 $\theta_1 \sim \theta_4$ 分别表示单元第 1 到第 4 个节点的 x 方向位移、 y 方向位移和温度值。

由式(6)、(7)和边界条件(8)、(9),通过加权余量法可得在单元域内运动方程和热传导方程的等效积分弱形式分别为^[23]

$$\int_{V^e} \mathbf{w}^e \rho \ddot{\mathbf{u}}^e dV + \int_{V^e} \nabla \mathbf{w}^e \mathbf{D}_u \boldsymbol{\varepsilon}^e dV - \int_{V^e} \nabla \mathbf{w}^e \mathbf{D}_u \boldsymbol{\varepsilon}_\theta^e dV - \int_{V^e} \mathbf{w}^e \mathbf{b} dV - \int_{\Gamma_p^e} \mathbf{w}^e \bar{\mathbf{p}} d\Gamma = 0, \quad (11)$$

$$\int_{V^e} \mathbf{v}^e \rho c_v \dot{\theta}^e dV + \int_{V^e} \nabla \mathbf{v}^e \mathbf{D}_\theta \nabla \theta^e dV - \int_{V^e} \mathbf{v}^e h_\varepsilon^e dV - \int_{V^e} \mathbf{v}^e h_q dV - \int_{\Gamma_2^e} \mathbf{v}^e \bar{h}_{\Gamma_2} d\Gamma - \int_{\Gamma_3^e} \mathbf{v}^e \bar{h}_{\Gamma_3} d\Gamma = 0, \quad (12)$$

式中, V^e 为单元体积; \mathbf{w}^e 和 \mathbf{v}^e 分别为位移场和温度场权函数矩阵; $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ 为单元应变, 二维条件下单元的热应变 $\boldsymbol{\varepsilon}_\theta^e = \alpha(\bar{\theta}^e - \theta_0)[1 \ 1 \ 0]^T$; $\bar{\theta}^e$ 为单元四个节点的平均温度; Γ_p^e 为单元的力边界; 由变形引起的单元热流密度 $h_\varepsilon^e = \bar{\theta}^e \beta_\alpha(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_x^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_y^e)$; $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_x^e$ 和 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_y^e$ 为单元正应变对时间的导数; Γ_2^e 和 Γ_3^e 分别为单元域第二类边界和第三类边界, 由对流换热产生的热流密度 $\bar{h}_{\Gamma_3} = h(\theta_\infty - \theta^e)$ 。

几何矩阵 $\mathbf{B}_u^e = \nabla \mathbf{N}_u^e, \mathbf{B}_\theta^e = \nabla \mathbf{N}_\theta^e$, 单元应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{B}_u^e \mathbf{U}^e$, 取位移场权函数矩阵 $\mathbf{w}^e = (\mathbf{N}_u^e)^T$, 取温度场权函数矩阵 $\mathbf{v}^e = (\mathbf{N}_\theta^e)^T$, 式(11)和(12)可改写为

$$\int_{V^e} (\mathbf{N}_u^e)^T \rho \mathbf{N}_u^e \dot{\mathbf{U}}^e dV = \int_{V^e} (\mathbf{N}_u^e)^T \mathbf{b} dV + \int_{\Gamma_p^e} (\mathbf{N}_u^e)^T \mathbf{p} d\Gamma + \int_{V^e} (\mathbf{B}_u^e)^T \mathbf{D}_u \boldsymbol{\varepsilon}_\theta^e dV - \int_{V^e} (\mathbf{B}_u^e)^T \mathbf{D}_u \mathbf{B}_u^e \mathbf{U}^e dV, \quad (13)$$

$$\int_{V^e} (\mathbf{N}_\theta^e)^T \rho c_v \mathbf{N}_\theta^e \dot{\boldsymbol{\theta}}^e dV = \int_{V^e} (\mathbf{N}_\theta^e)^T h_q dV + \int_{\Gamma_2^e} (\mathbf{N}_\theta^e)^T h_{\Gamma_2} d\Gamma + \int_{\Gamma_3^e} (\mathbf{N}_\theta^e)^T h \theta_\infty d\Gamma + \int_{V^e} (\mathbf{N}_\theta^e)^T h_\varepsilon^e dV - \int_{V^e} (\mathbf{B}_\theta^e)^T \mathbf{D}_\theta \mathbf{B}_\theta^e \boldsymbol{\theta}^e dV - \int_{\Gamma_3^e} h (\mathbf{N}_\theta^e)^T (\mathbf{N}_\theta^e)^T \boldsymbol{\theta}^e d\Gamma. \quad (14)$$

由式(13)和(14)可得热力耦合问题的 FEM 运动方程和热传导方程为

$$\mathbf{M}^e \dot{\mathbf{U}}^e = \mathbf{F}_b^e + \mathbf{F}_p^e + \mathbf{F}_{\varepsilon_\theta}^e - \mathbf{K}_u^e \mathbf{U}^e, \quad (15)$$

$$\mathbf{C}^e \dot{\boldsymbol{\theta}}^e = \mathbf{Q}_{h_q}^e + \mathbf{Q}_{h_r}^e + \mathbf{Q}_\varepsilon^e - \mathbf{K}_\theta^e \boldsymbol{\theta}^e, \quad (16)$$

式中, \mathbf{M}^e 和 \mathbf{C}^e 分别为单元质量矩阵和热容矩阵, $\dot{\mathbf{U}}^e$ 为节点加速度列阵, \mathbf{F}_b^e 为体力引起的载荷列阵, \mathbf{F}_p^e 为力边界条件引起的载荷列阵, $\mathbf{F}_{\varepsilon_\theta}^e$ 为热应变引起的载荷列阵, \mathbf{K}_u^e 为单元刚度矩阵, $\dot{\boldsymbol{\theta}}^e$ 为节点温度对时间的导数列阵, $\mathbf{Q}_{h_q}^e$ 为热源引起的热载荷列阵, $\mathbf{Q}_{h_r}^e$ 为第二和第三类边界引起的热载荷列阵, \mathbf{Q}_ε^e 为物体变形引起的热载荷列阵, \mathbf{K}_θ^e 为单元热传导矩阵。

3 热力耦合问题的 PD-FEM 模型

求解域划分为 FEM 区域和 PD 区域, 先按 FEM 进行离散得到 FEM 单元和节点, 在 PD 区域各个 FEM 单元的形心处生成一个 PD 物质点, 之后将 FEM 区域的 FEM 节点和 PD 物质点重新编号, 如图 1 所示. 若两种区域交界面上 FEM 节点在某个 PD 物质点的邻域内, 交界面上的 FEM 节点将与 PD 物质点形成混合键, 交界面上 FEM 节点不仅受到其所在的 FEM 单元作用而且受到混合键的作用, 交界面附近的 PD 物质点同时受到邻域内其他 PD 物质点和混合键的作用, 通过混合键连接各个子区域。

以物质点 x_i 和 x_j 连线为 \hat{x} 轴, 建立局部坐标系 ($\hat{x}O\hat{y}$), 如图 2 所示. $\hat{\mathbf{u}}_i$ 和 $\hat{\mathbf{u}}_j$ 分别为在局部坐标系中物质点 x_i 和 x_j 的位移矢量, γ 为整体坐标系与局部坐标系的之间的角度。

整体坐标系与局部坐标系转化矩阵 \mathbf{T}_s 为

$$\mathbf{T}_s = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \end{bmatrix}. \quad (17)$$

根据式(1), 物质点 x_i 和 x_j 形成的键通过变形引起的 PD 物质点载荷列阵为

$$\mathbf{F}_u^{\text{PD}} = -\mathbf{K}_u^{\text{PD}} \mathbf{U}^{\text{PD}} = -\frac{cV_i V_j \mu(x_i, x_j, t)}{|\boldsymbol{\xi}|} (\mathbf{T}_s)^T \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{T}_s [u_i^x \ u_i^y \ u_j^x \ u_j^y]^T, \quad (18)$$

式中, \mathbf{U}^{PD} 为在整体坐标系 (xOy) 中 PD 物质点的位移列阵, V_i 和 V_j 为物质点 x_i 和 x_j 的体积. 将 \mathbf{T}_s 的表达式

代入后可得键的刚度矩阵 \mathbf{K}_u^{PD} 为

$$\mathbf{K}_u^{\text{PD}} = \frac{cV_iV_j\mu(i,j,t)}{|\xi|} \begin{bmatrix} \cos^2\gamma & \cos\gamma\sin\gamma & -\cos^2\gamma & -\cos\gamma\sin\gamma \\ \cos\gamma\sin\gamma & \sin^2\gamma & -\cos\gamma\sin\gamma & -\sin^2\gamma \\ -\cos^2\gamma & -\cos\gamma\sin\gamma & \cos^2\gamma & \cos\gamma\sin\gamma \\ -\cos\gamma\sin\gamma & -\sin^2\gamma & \cos\gamma\sin\gamma & \sin^2\gamma \end{bmatrix}. \quad (19)$$

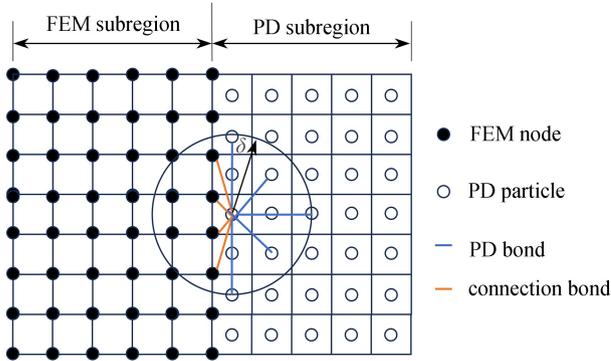


图 1 PD-FEM 混合模型示意图

Fig. 1 Schematic diagram of the PD-FEM hybrid model

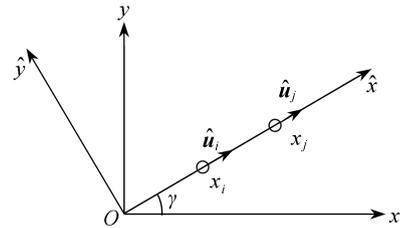


图 2 局部坐标系中物质点对之间的相互作用

Fig. 2 The interaction between material points in local coordinates

在局部坐标系 $(\hat{x}\hat{O}\hat{y})$ 中, 物质点 x_i 和 x_j 形成的键由温度变化引起的伸长率 $s_\theta = \alpha T_{\text{avg}}$, 在整体坐标系 (xOy) 中由温度变化引起的 PD 物质点载荷列阵为

$$\mathbf{F}_{\varepsilon_\theta}^{\text{PD}} = -c\alpha T_{\text{avg}}V_iV_j\mu(i,j,t)(\mathbf{T}_s)^T \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = c\alpha T_{\text{avg}}V_iV_j\mu(i,j,t) \begin{bmatrix} -\cos\gamma & -\sin\gamma & \cos\gamma & \sin\gamma \end{bmatrix}^T. \quad (20)$$

根据式(3), 由物质点 x_i 和 x_j 形成的键两端 PD 物质点温度变化引起的热载荷贡献为

$$\mathbf{Q}_\theta^{\text{PD}} = -\mathbf{K}_\theta^{\text{PD}}\boldsymbol{\Theta}^{\text{PD}} = -\frac{\kappa_pV_iV_j\mu(x_i,x_j,t)}{|\xi|} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \end{bmatrix}, \quad (21)$$

式中, $\mathbf{K}_\theta^{\text{PD}}$ 为键的热传导矩阵, $\boldsymbol{\Theta}^{\text{PD}}$ 为 x_i 和 x_j 形成的键两端物质点的温度列阵。

根据式(3)和(4), 物质点 x_i 和 x_j 形成的键通过变形引起的热载荷贡献为

$$\mathbf{Q}_\varepsilon^{\text{PD}} = -\frac{c\alpha V_iV_j\mu(i,j,t)}{2} \begin{bmatrix} \theta_i & 0 \\ 0 & \theta_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{T}_s [\dot{u}_i^x & \dot{u}_i^y & \dot{u}_j^x & \dot{u}_j^y]^T = \frac{c\alpha V_iV_j\mu(i,j,t)}{2} \begin{bmatrix} \theta_i\cos\gamma & \theta_i\sin\gamma & -\theta_i\cos\gamma & -\theta_i\sin\gamma \\ \theta_j\cos\gamma & \theta_j\sin\gamma & -\theta_j\cos\gamma & -\theta_j\sin\gamma \end{bmatrix} [\dot{u}_i^x & \dot{u}_i^y & \dot{u}_j^x & \dot{u}_j^y]^T. \quad (22)$$

两种区域交界面上的 FEM 节点和 PD 物质点构成的混合键的刚度矩阵记为 \mathbf{K}_u^{HY} , 混合键受温度影响引起的载荷列阵记为 $\mathbf{F}_{\varepsilon_\theta}^{\text{HY}}$, 混合键的热传导矩阵记为 $\mathbf{K}_\theta^{\text{HY}}$, 混合键变形引起的热载荷列阵记为 $\mathbf{Q}_\varepsilon^{\text{HY}}$, 其计算形式与两个 PD 物质点构成的键计算形式相同。

编号为 I 的 PD 物质点所受的外载荷为

$$\begin{cases} \mathbf{F}_I^{\text{ext}} = \int_{V_i} \mathbf{b}(I,t) dV + \int_{\Gamma_h} \mathbf{p}(I,t) d\Gamma, \\ \mathbf{Q}_I^{\text{ext}} = \int_{V_i} h_q(I,t) dV + \int_{\Gamma_h} h_r(I,t) d\Gamma, \end{cases} \quad (23)$$

式中, $\mathbf{p}(I,t)$ 为作用于力边界的面力矢量, $h_r(I,t)$ 为作用于传热边界的热流密度。

根据式(13)和(14), 可得编号为 J 的 FEM 节点所受的外载荷为

$$\begin{cases} \mathbf{F}_J^{\text{ext}} = \sum_1^{N_J^{\text{FEM}}} \mathbf{G}_J^{\text{FEM}} (\mathbf{F}_b^e + \mathbf{F}_p^e), \\ \mathbf{Q}_J^{\text{ext}} = \sum_1^{N_J^{\text{FEM}}} \mathbf{L}_J^{\text{FEM}} (\mathbf{Q}_{h_q}^e + \mathbf{Q}_{h_T}^e), \end{cases} \quad (24)$$

式中, N_J^{FEM} 表示编号为 J 的 FEM 节点参与构成的 FEM 单元数量, 选择矩阵 $\mathbf{G}_J^{\text{FEM}}$ 和 $\mathbf{L}_J^{\text{FEM}}$ 与点 J 位于单元的顺序有关, 当点 J 为单元第一个点时, $\mathbf{G}_J^{\text{FEM}} = [\mathbf{E}_{2 \times 2} \quad \mathbf{0}_{2 \times 2} \quad \mathbf{0}_{2 \times 2} \quad \mathbf{0}_{2 \times 2}]$, $\mathbf{E}_{2 \times 2}$ 和 $\mathbf{0}_{2 \times 2}$ 为 2×2 单位矩阵和零矩阵, $\mathbf{L}_J^{\text{FEM}} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$; 当点 J 为单元第二个点时, $\mathbf{G}_J^{\text{FEM}} = [\mathbf{0}_{2 \times 2} \quad \mathbf{E}_{2 \times 2} \quad \mathbf{0}_{2 \times 2} \quad \mathbf{0}_{2 \times 2}]$, $\mathbf{L}_J^{\text{FEM}} = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$, 以此类推。

编号为 I 的 PD 物质点受 PD 键或混合键作用引起的合内力载荷和热载荷为

$$\begin{cases} \mathbf{F}_I^{\text{int}} = \sum_1^{N_I^{\text{PD}}} \mathbf{G}_I^{\text{PD}} (\mathbf{K}_u^{\text{PD}} \mathbf{U}^{\text{PD}} - \mathbf{F}_{\varepsilon_\theta}^{\text{PD}}) + \sum_1^{N_I^{\text{HY}}} \mathbf{G}_I^{\text{HY}} (\mathbf{K}_u^{\text{HY}} \mathbf{U}^{\text{HY}} - \mathbf{F}_{\varepsilon_\theta}^{\text{HY}}), \\ \mathbf{Q}_I^{\text{int}} = \sum_1^{N_I^{\text{PD}}} \mathbf{L}_I^{\text{PD}} (\mathbf{K}_\theta^{\text{PD}} \boldsymbol{\Theta}^{\text{PD}} - \mathbf{Q}_\varepsilon^{\text{PD}}) + \sum_1^{N_I^{\text{HY}}} \mathbf{L}_I^{\text{HY}} (\mathbf{K}_\theta^{\text{HY}} \boldsymbol{\Theta}^{\text{HY}} - \mathbf{Q}_\varepsilon^{\text{HY}}), \end{cases} \quad (25)$$

式中, N_I^{PD} 为 PD 物质点 I 与其邻域内的 PD 物质点构成的键数量, N_I^{HY} 为 PD 物质点 I 与邻域内 FEM 节点构成的混合键数量, \mathbf{U}^{HY} 和 $\boldsymbol{\Theta}^{\text{HY}}$ 为构成混合键的 PD 物质点和 FEM 节点的位移列阵和温度列阵, 选择矩阵 \mathbf{G}_I^{PD} , \mathbf{G}_I^{HY} , \mathbf{L}_I^{PD} , \mathbf{L}_I^{HY} , 他们与 $\mathbf{G}_J^{\text{FEM}}$, $\mathbf{L}_J^{\text{FEM}}$ 区别在于键由两个点构成。

编号为 J 的 FEM 节点受 FEM 单元或混合键作用引起的合内力载荷和热载荷为

$$\begin{cases} \mathbf{F}_J^{\text{int}} = \sum_1^{N_J^{\text{FEM}}} \mathbf{G}_J^{\text{FEM}} (\mathbf{K}_u^e \mathbf{U}^e - \mathbf{F}_{\varepsilon_\theta}^e) + \sum_1^{N_J^{\text{HY}}} \mathbf{G}_J^{\text{HY}} (\mathbf{K}_u^{\text{HY}} \mathbf{U}^{\text{HY}} - \mathbf{F}_{\varepsilon_\theta}^{\text{HY}}), \\ \mathbf{Q}_J^{\text{int}} = \sum_1^{N_J^{\text{FEM}}} \mathbf{L}_J^{\text{FEM}} (\mathbf{K}_\theta^e \boldsymbol{\Theta}^e - \mathbf{Q}_\varepsilon^e) + \sum_1^{N_J^{\text{HY}}} \mathbf{L}_J^{\text{HY}} (\mathbf{K}_\theta^{\text{HY}} \boldsymbol{\Theta}^{\text{HY}} - \mathbf{Q}_\varepsilon^{\text{HY}}). \end{cases} \quad (26)$$

式(15)导出的单元质量矩阵称为一致质量矩阵, 为了方便矩阵求逆, 本文采用集中质量矩阵, 两者求解精度接近^[25], FEM 单元集中质量矩阵为 $\mathbf{M}^e = (\rho V^e/4) \mathbf{E}_{8 \times 8}$, 集中热容矩阵 $\mathbf{C}^e = (\rho c_v V^e/4) \mathbf{E}_{4 \times 4}$, $\mathbf{E}_{4 \times 4}$ 为 4×4 单位矩阵. PD 物质点 I 的质量矩阵为 $\mathbf{M}_I^{\text{PD}} = \rho V_I \mathbf{E}_{2 \times 2}$, $\mathbf{E}_{2 \times 2}$ 为 2×2 单位矩阵, 热容 $\mathbf{C}_I^{\text{PD}} = \rho c_v V_I$. 将 FEM 节点和 PD 物质点的质量矩阵和载荷列阵按编号进行组装后得到整个混合模型的运动方程和热传导方程为

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{2N \times 2N} \ddot{\mathbf{U}}_{2N \times 1} = (\mathbf{F}^{\text{ext}})_{2N \times 1} - (\mathbf{F}^{\text{int}})_{2N \times 1}, \\ \mathbf{C}_{N \times N} \dot{\boldsymbol{\Theta}}_{N \times 1} = (\mathbf{Q}^{\text{ext}})_{N \times 1} - (\mathbf{Q}^{\text{int}})_{N \times 1}, \end{cases} \quad (27)$$

式中, N 为混合模型 FEM 节点和 PD 物质点总数。

运动方程和热传导方程采用交错法, 通过显式时间积分方法进行求解, 时间增量步需满足稳定性条件, 本文热力耦合方程为双向耦合形式, 位移场和温度场采用相同的时间增量步, 并按照位移场稳定性条件确定时间步长. PD 区域^[25]和 FEM 区域^[26]位移场稳定时间增量步为 Δt^{PD} 和 Δt^{FEM} , PD-FEM 混合模型的时间步长取两者中的较小值。

4 实例计算与分析

4.1 陶瓷板瞬态热传导过程的动态响应

采用本文提出的 PD-FEM 混合模型对陶瓷板冷却过程进行了模拟分析, 陶瓷板的长度 $L = 2 \text{ m}$, 宽度 $H = 2 \text{ m}$, 其中 $1 \text{ m} \times 0.25 \text{ m}$ 的矩形区域划分为 PD 区域, 其余区域为 FEM 区域, 板的初始温度 $\theta_0 = 100 \text{ }^\circ\text{C}$, 左右边界温度保持为 $0 \text{ }^\circ\text{C}$, 上下边界为绝热边界且限制其在 y 方向的位移, 如图 3 所示. 材料热膨胀系数 $\alpha = 1 \times 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, 弹性模量 $E = 200 \text{ GPa}$, 密度 $\rho = 2000 \text{ kg/m}^3$, Poisson 比 $\nu = 1/3$, 导热系数 $k = 100 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$, 比热容 $c_v = 106 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$, FEM 单元尺寸和 PD 物质点间距均为 2.5 mm , 近场范围半径为 3.015 倍物质点间距, 时间步长 $\Delta t = 1 \times 10^{-7} \text{ s}$ 。

温度边界条件和位移边界条件均作用于 FEM 区域, 该问题的边界条件表示为

$$\begin{cases} \theta(x = \pm L/2, y, t) = 0, & t > 0, -H/2 \leq y \leq H/2, \\ u_y(x, y = \pm H/2, t) = 0, & t > 0, -L/2 \leq x \leq L/2. \end{cases} \quad (28)$$

该问题的析解为^[27]

$$\theta(x, t) = \frac{4\theta_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} e^{-\frac{k(2n+1)^2\pi^2 t}{\rho c L^2}} \cdot \sin\left(\frac{2n+1}{L} \pi x\right), \quad (29)$$

$$u_x(x, t) = \alpha x (\theta(x, t) - \theta_0). \quad (30)$$

PD-FEM 混合算法交界面附近可能存在“ghost force”,对本文提出的 PD-FEM 模型进行“ghost force”测试,定义位移相对误差 R_u 和温度相对误差 R_θ 为

$$R_u = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N (u_i^e - u_i^c)^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (u_i^e)^2}}, \quad R_\theta = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N (\theta_i^e - \theta_i^c)^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (\theta_i^e)^2}}, \quad (31)$$

式中, N 为参与测试的数据点个数, u_i^e 和 u_i^c 分别为物质点位移的解析解和数值解, θ_i^e 和 θ_i^c 分别为质点温度的解析解和数值解。

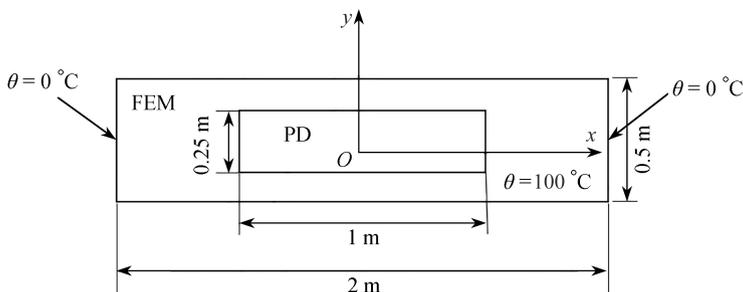


图 3 陶瓷板冷却 PD-FEM 混合模型模拟分析示意图

Fig. 3 Schematic diagram of the PD-FEM hybrid simulation model for ceramic plates cooling

采用该 PD-FEM 混合模型计算的陶瓷板水平中线上温度和位移响应,如图 4 所示.图中 x 为物质点的水平坐标, u_x 为物质点的水平位移, θ 为物质点的温度.从图 4 可以看出,本文提出的 PD-FEM 模型计算结果与解析解吻合良好,图中还给出了采用 PD 热力耦合模型对相同问题进行模拟分析的计算结果.由式 (31) 得到由该 PD-FEM 模型和 PD 热力耦合模型与解析解的位移相对误差 R_u 和温度相对误差 R_θ , 如图 5 所示.由图 5 可知,在各个时刻,PD-FEM 模型的位移相对误差 R_u 和温度相对误差 R_θ 比 PD 热力耦合模型的相对误差小,该 PD-FEM 模型结果更趋近于解析解,说明该 PD-FEM 模型可忽略“ghost force”影响,PD 热力耦合模型边界附近物质点近场范围不完整会导致表面效应,图 6 所示的 PD-FEM 模型的边界均为 FEM 区域,能够减缓表面效应影响。

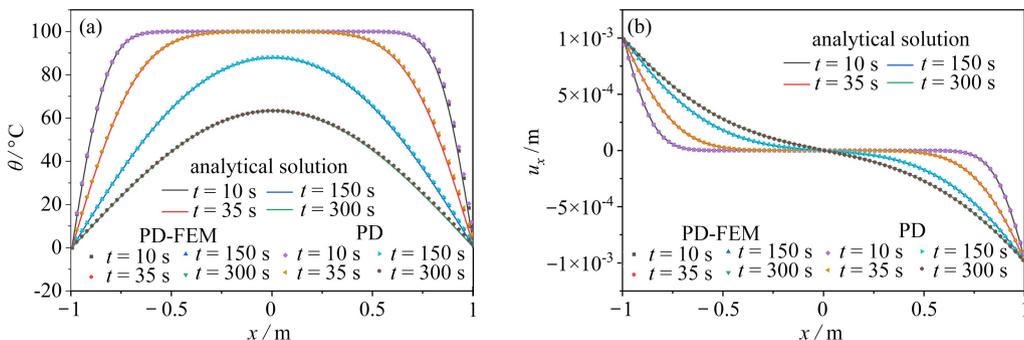


图 4 解析解与 PD-FEM 模型结果对比

Fig. 4 Comparison of the analytical solution and the PD-FEM model results

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同。

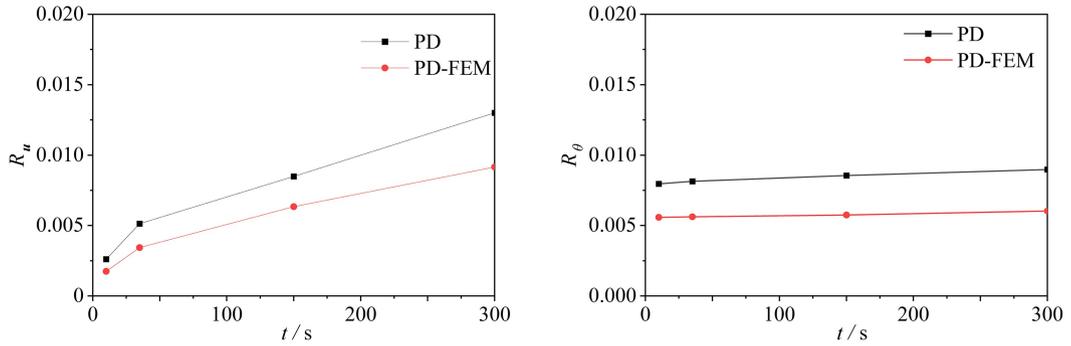


图5 PD-FEM模型的相对误差和PD热力耦合模型的相对误差对比

Fig. 5 Comparison of the PD-FEM model relative errors and the PD thermo-mechanical coupling model relative errors

4.2 陶瓷板在拉伸载荷作用下的动态响应

采用本文提出的混合模型对陶瓷板在拉伸载荷作用下的动态响应进行了模拟分析.陶瓷板的长度和宽度为 100 mm,左侧施加随时间变化的均布拉伸载荷 $P(t)$,右侧为固定边界条件,陶瓷板被划分一个 PD 区域和两个 FEM 区域,如图 6 所示.FEM 单元尺寸和 PD 物质点间距均为 0.2 mm,近场范围半径为 3.015 倍物质点间距,时间步长 $\Delta t = 1 \times 10^{-9}$ s,陶瓷板初始参考温度 θ_0 为 20 °C,材料参数如表 1 所示.分别计算以下两种载荷作用下板陶瓷板的热力学响应:

$$\begin{cases} P_1(t) = (10^{15} \times t) \text{ Pa}, & \text{load 1,} \\ P_2(t) = -\left(10^9 \times \sin\left(\frac{\pi}{2} t \times 10^6\right)\right) \text{ Pa}, & \text{load 2.} \end{cases} \quad (32)$$

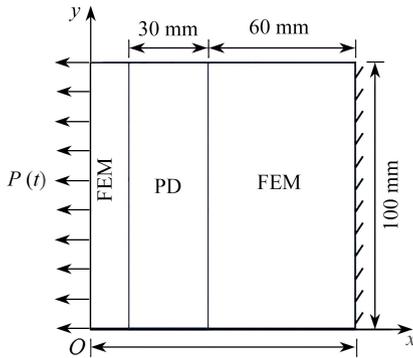


图6 PD-FEM 计算模型示意图

Fig. 6 Schematic diagram of the PD-FEM calculation model

表1 Al₂O₃陶瓷板材料参数^[28]Table 1 Material parameters of the Al₂O₃ ceramic plate^[28]

material parameter	value
elastic modulus E /GPa	370
Poisson's ratio ν	1/3
density ρ / (kg/m ³)	3 960
fracture energy release rate G_0 / (J/m ²)	24.3
thermal expansion α /K ⁻¹	6.8×10^{-6}
heat capacity c_v / (J/(kg·K))	880
thermal conductivity k / (W/(m·K))	20

采用该混合模型计算的陶瓷板水平中线上位移和温度响应,如图 7 所示.图中 x 为物质点水平坐标, u_x 为水平位移, $\Delta\theta$ 为温度变化值,图 7 还给出了采用 ANSYS Plane223 单元对相同问题进行模拟分析的计算结果,ANSYS 模型网格尺寸和时间增量步与该 PD-FEM 模型一致.由图 7(b)可知,受到随时间线性增大的载荷 1 作用,当外力作用时间 $t = 8 \mu\text{s}$ 时,陶瓷板内温度下降最大值约为 6.5 °C,温度变化明显,因此,结构受到冲击载荷产生较大的应变率时,应当考虑变形对温度场的影响.当受到载荷 2 作用时,陶瓷板位移和温度变化响应呈现正弦形式,本文提出的 PD-FEM 混合模型与 ANSYS 模型计算结果吻合良好,从一个侧面反映了该混合模型的有效性.

4.3 陶瓷板淬火过程损伤分析

采用本文提出的 PD-FEM 混合模型对陶瓷板淬火过程进行了模拟分析,陶瓷板初始温度 θ_0 为 400 °C,上侧与冷水接触发生对流换热,冷水温度 θ_∞ 为 0 °C,对流换热系数 h 取值为^[28] 40 kW/(m²·K),其余各边为绝热边界,陶瓷板宽度 H 为 5 mm,取 PD 区域宽度 H_{PD} 为 2.5 mm,其余区域为 FEM 区域,陶瓷板长度 L 为 50 mm,取陶瓷板结构对称一半进行分析,设置对称边界条件,建立计算模型,如图 8 所示.FEM 单元尺寸和 PD

物质点间距均为 0.05 mm, 近场范围半径为 3.015 倍物质点间距, 材料参数见表 1, 时间步长 $\Delta t = 4 \times 10^{-9}$ s.

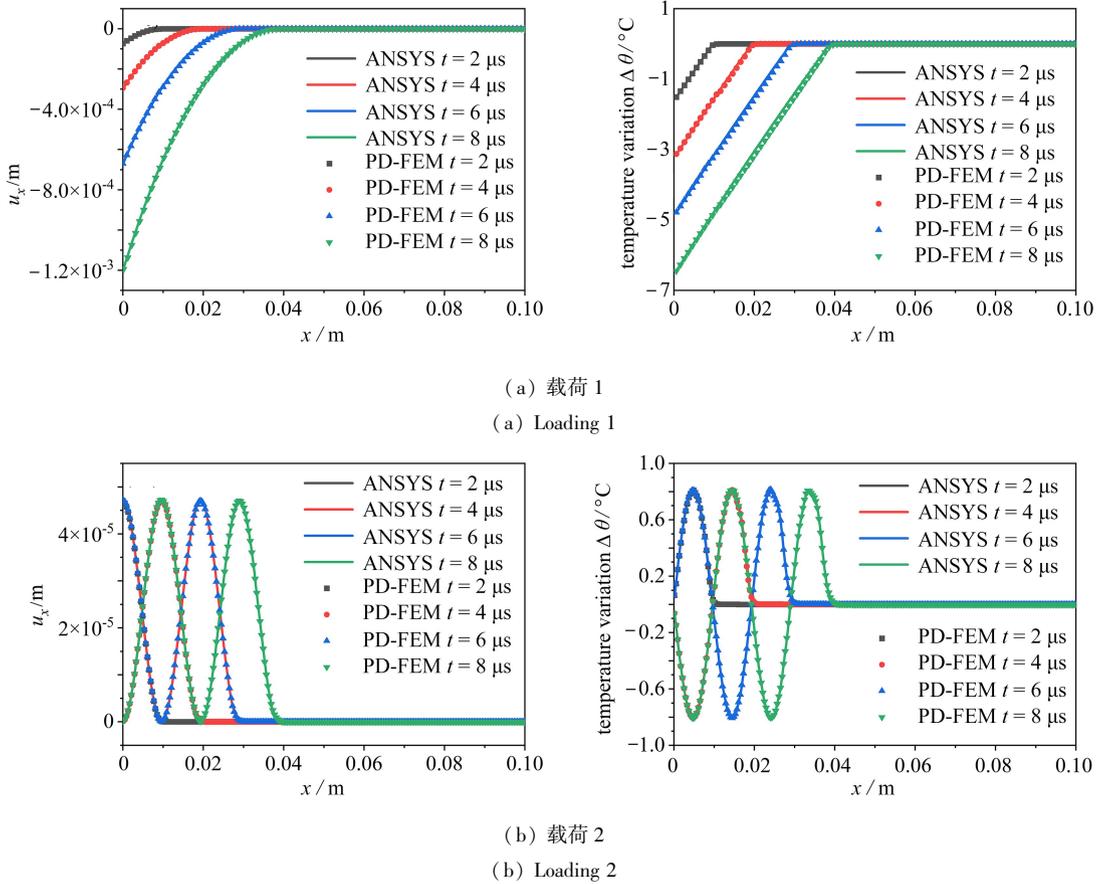


图 7 陶瓷板水平中线位移和温度响应

Fig. 7 Displacement and temperature responses along the horizontal axis of ceramic plates

该问题初始条件为

$$\theta(x, y, 0) = \theta_0, \quad 0 \leq x \leq L/2, \quad 0 \leq y \leq H. \quad (33)$$

热对流边界位于 PD 区域, 可通过热源密度 h_s 的形式施加于边界层, 边界条件为

$$\begin{cases} u_x(x=0, y, t) = 0, & t > 0, \quad 0 \leq y \leq H - H_{PD}, \\ u_x(x, y, t) = 0, & t > 0, \quad 0 \leq x \leq \Delta, \quad H_{PD} < y \leq H, \\ h_s(x, y = H, t) = h/\Delta(\theta_0 - \theta(x, y, t)), & t > 0, \quad 0 \leq x \leq L/2, \quad H - \Delta \leq y \leq H, \end{cases} \quad (34)$$

式中, u_x 为 PD 物质点或 FEM 节点水平位移, Δ 为 PD 物质点间距, L 为陶瓷板长度, H 为陶瓷板宽度, H_{PD} 为 PD 区域宽度.

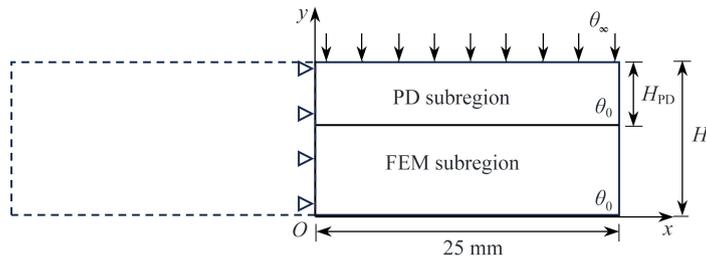


图 8 陶瓷板淬火 PD-FEM 混合模型模拟分析示意图

Fig. 8 Schematic diagram of the PD-FEM hybrid simulation model for ceramic plates quenching

当淬火时间 $t = 100$ ms 时, 采用该 PD-FEM 混合模型和传统 PD 热力耦合模型计算得到的陶瓷板裂纹扩展结果对比, 如图 9 所示. 图 9(a) 和 9(b) 所示计算结果表明, 采用该 PD-FEM 模型与传统的 PD 热力耦合模

型计算的裂纹扩展形态、扩展深度和裂纹间距无明显差别。在相同计算条件下,该 PD-FEM 模型和传统的 PD 热力耦合模型完成 20 000 个时间增量步耗时分别为 92 s 和 159 s。由于 FEM 区域的引入,在对材料热力耦合损伤分析时,本文提出的 PD-FEM 模型计算效率有明显提升。

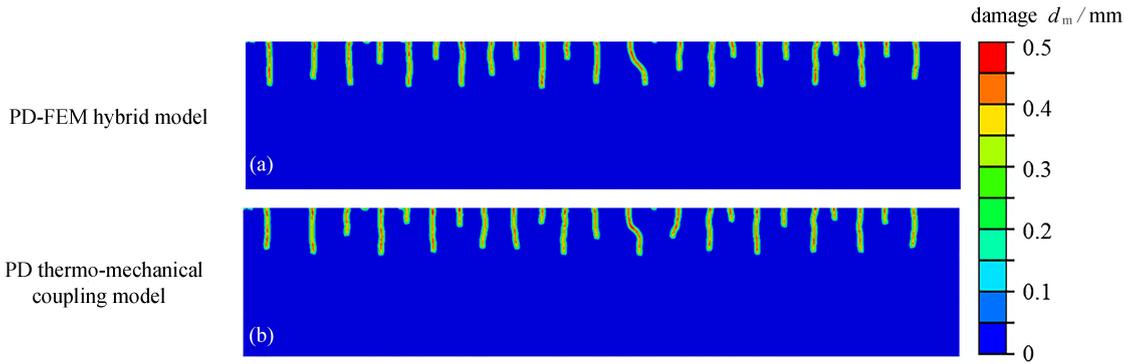


图9 PD-FEM 混合模型与 PD 热力模型裂纹扩展结果对比

Fig. 9 Comparison of crack propagation results between the PD-FEM hybrid model and the PD thermo-mechanical coupling model

分别对宽度 H 为 5 mm, 10 mm, 20 mm, 初始温度 θ_0 为 400 °C, 300 °C, 220 °C 的陶瓷板淬火过程进行模拟分析, 对不同宽度的陶瓷板, PD 区域的宽度 H_{PD} 取值均为 2.5 mm, 环境温度 θ_∞ 为 0 °C。图 10 为 Shao 等^[28] 的实验结果, 图 11 为采用本文提出的 PD-FEM 混合模型的计算结果。

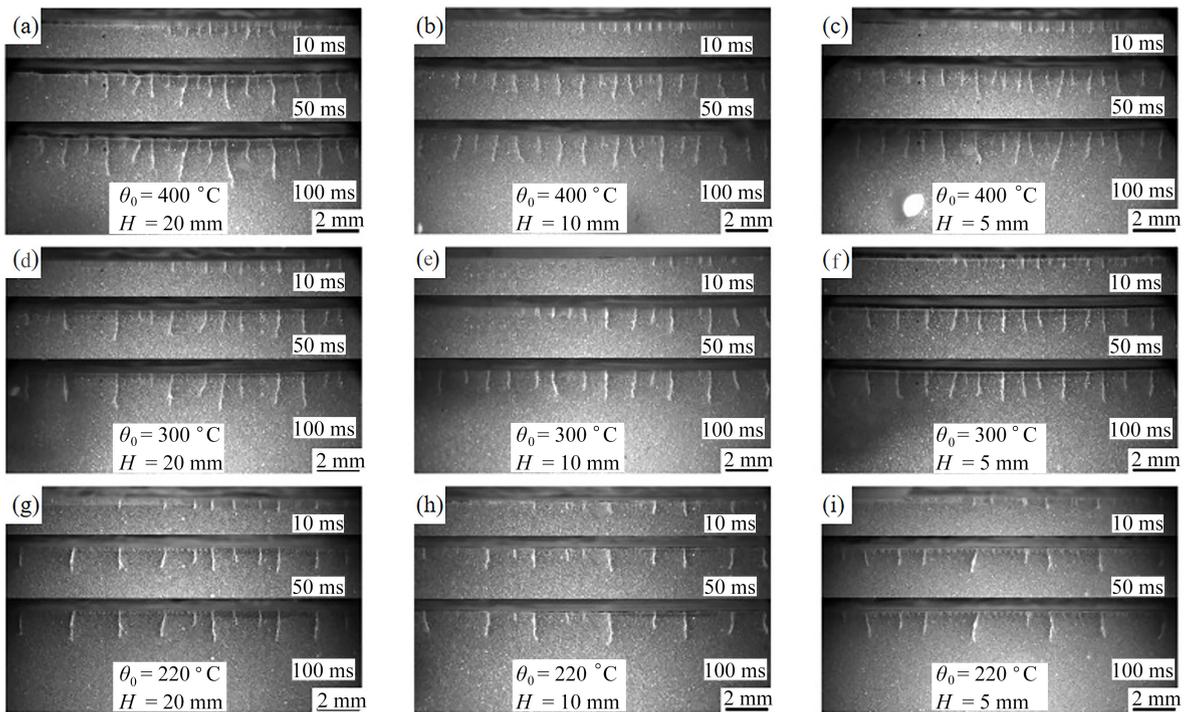


图10 不同初始温度和宽度的陶瓷板淬火实验结果^[28]

Fig. 10 Quenching experiment results of ceramic plates with different initial temperatures and widths^[28]

结果显示,陶瓷板在热冲击载荷作用下,首先在热冲击边界处萌生出一定数量的初始裂纹,裂纹扩展并发生分化,部分裂纹扩展到一定长度后停止扩展形成 I 级裂纹(扩展深度小于 0.375 mm),其余裂纹继续扩展,最终形成 II 级(扩展深度在 0.375~1.5 mm 之间)和 III 级裂纹(扩展深度大于 1.5 mm),陶瓷板初始温度为 400 °C 时,裂纹分化现象最为明显。该 PD-FEM 模型计算的裂纹间距和扩展速度结果与实验结果对比,如图 12 所示,其中 d_c 为裂纹间距的平均值, v_c 为裂纹扩展速度的平均值。

从图 12 可知,本文提出的 PD-FEM 模型计算结果与实验结果误差不超过 10%。陶瓷板宽度相同时,在热冲击载荷作用下,初始温度越高,陶瓷板中产生的裂纹越密集,裂纹间距越小,相同尺寸范围内裂纹数量越

多,裂纹扩展速度越快.陶瓷板初始温度相同时,随着陶瓷板宽度增大,裂纹扩展速度加快,陶瓷板宽度对裂纹间距和裂纹数量的影响不明显.综上可知,本文提出的 PD-FEM 混合模型很好地模拟了陶瓷板受热冲击载荷作用时的裂纹萌生和扩展过程.

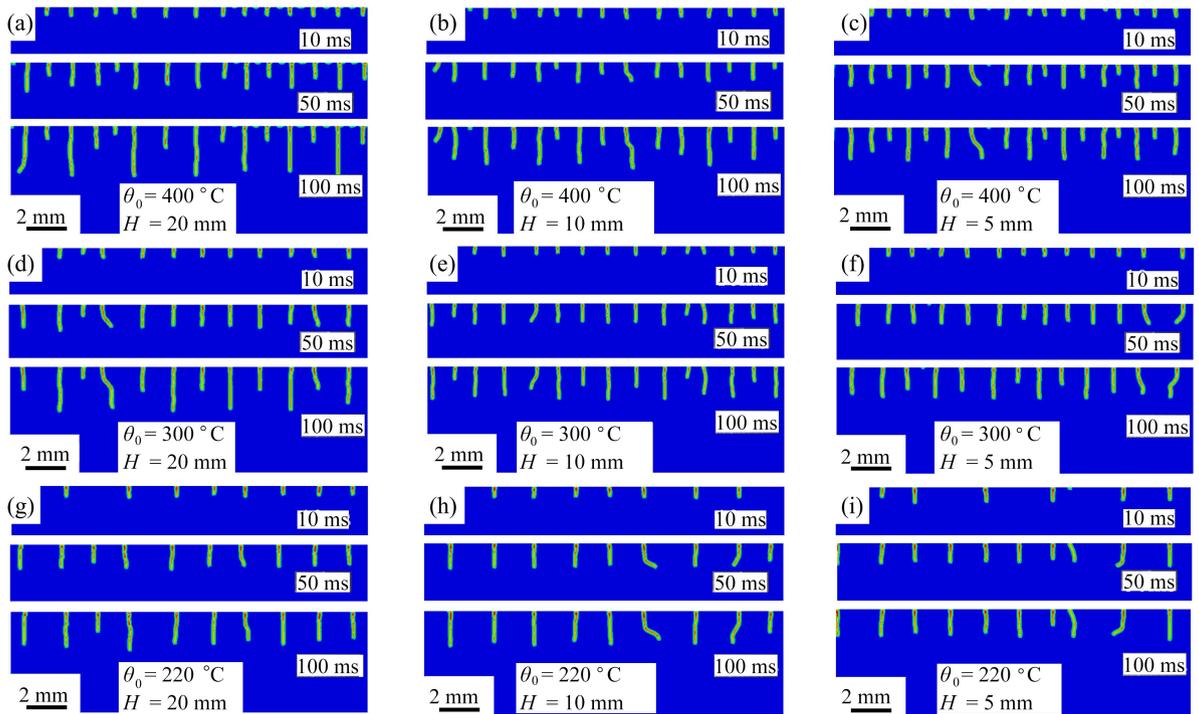
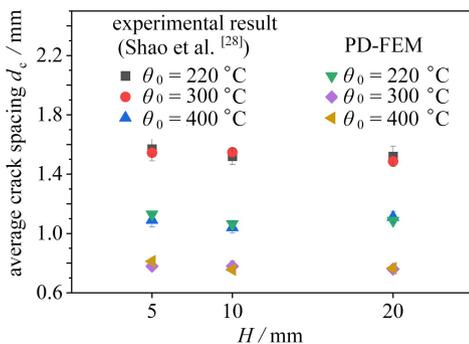


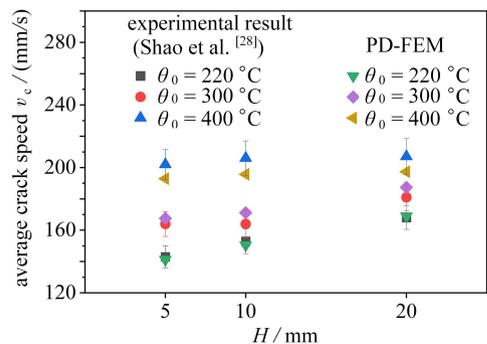
图 11 不同初始温度和宽度的 PD-FEM 模型裂纹扩展结果

Fig. 11 Crack propagation results of PD-FEM models with different initial temperatures and widths

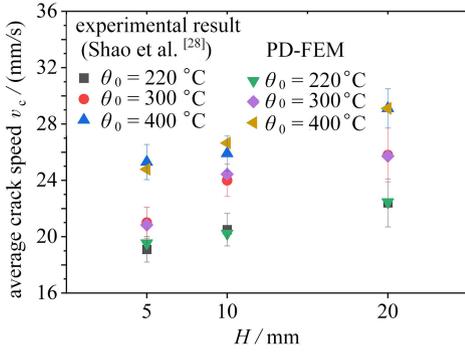
图 13 为陶瓷板竖直中线上应变能密度 w 分布曲线,图中 d 为物质点与上表面的距离.在图 13(a)中,淬火时间为 5 ms 时,陶瓷板处于裂纹萌生阶段,宽度相同的陶瓷板初始温度越高,上表面处应变能密度越大,不同初始温度的陶瓷板应变能密度差距明显,使得初始温度高的陶瓷板萌生更多裂纹.在图 13(b)中,淬火时间为 50 ms 时,此时陶瓷板处于裂纹扩展阶段,陶瓷板初始温度越高,与上表面距离相同处应变能密度越高,使得裂纹扩展越快.图 13(c)中,淬火时间为 5 ms 时,陶瓷板初始温度相同,不同宽度陶瓷板上表面应变能密度接近,导致陶瓷板宽度对于萌生的裂纹数量和间距影响不明显.图 13(d)中,淬火时间为 50 ms 时,初始温度相同的陶瓷板宽度越大,与上表面距离相同处应变能密度越大,使得裂纹扩展速度越快,与 Shao 等^[28]的实验研究结果吻合.本文提出的 PD-FEM 混合模型能有效模拟材料热力耦合损伤行为,该混合模型继承了 PD 处理不连续问题的优势,与传统的 PD 热力耦合模型相比,其计算效率得到了较大的提高.



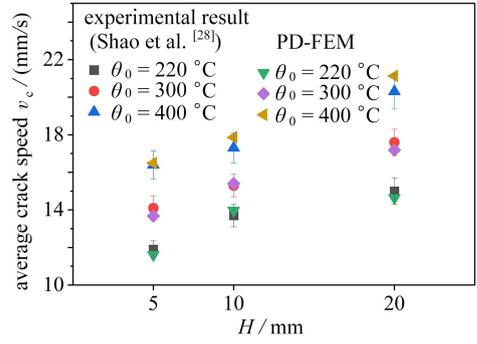
(a) 平均裂纹间距
(a) Average crack spacings



(b) 不同淬火时间 $t = 10$ ms 时的平均裂纹扩展速度
(b) Average crack propagation speeds at quenching time $t = 10$ ms



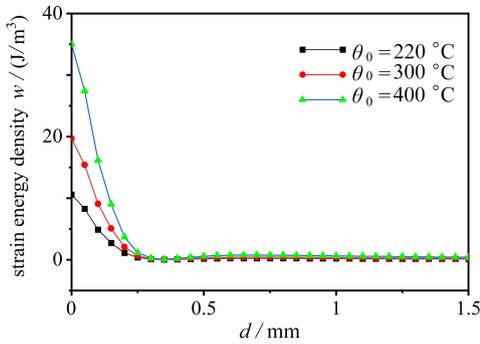
(c) 不同淬火时间 $t = 50$ ms 时的平均裂纹扩展速度
(c) Average crack propagation speeds at quenching time $t = 50$ ms



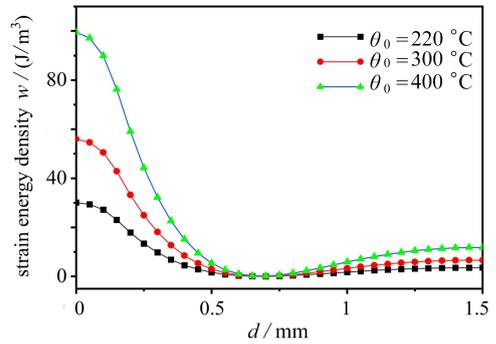
(d) 不同淬火时间 $t = 100$ ms 时的平均裂纹扩展速度
(d) Average crack propagation speeds at quenching time $t = 100$ ms

图 12 PD-FEM 模型结果与实验结果^[28]对比

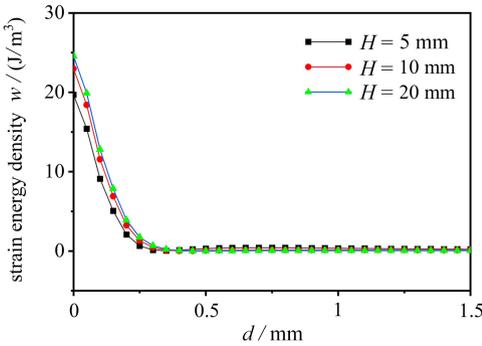
Fig. 12 Comparison of PD-FEM models results and experimental results^[28]



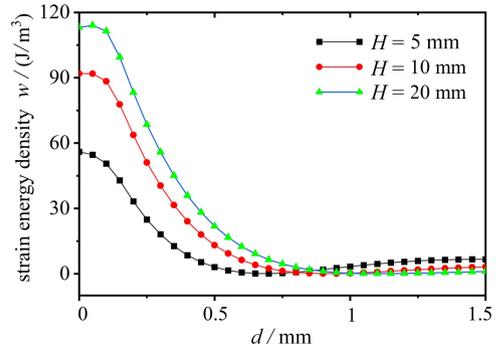
(a) $H = 5$ mm, $t = 5$ ms



(b) $H = 5$ mm, $t = 50$ ms



(c) $\theta_0 = 300^\circ\text{C}$, $t = 5$ ms



(d) $\theta_0 = 300^\circ\text{C}$, $t = 50$ ms

图 13 陶瓷板竖直中线应变能密度分布

Fig. 13 Strain energy density distributions along the vertical axis of ceramic plates

5 结 论

本文提出了材料热力耦合损伤分析的 PD-FEM 混合模型,该模型将求解域划分为 FEM 区域和 PD 区域,通过 FEM 区域和 PD 区域交界面上的 FEM 节点与 PD 物质点构成混合键连接各个子区域.采用该 PD-FEM 混合模型对拉伸载荷作用下陶瓷板的位移和温度动态响应进行了分析计算,所得结果与采用 ANSYS 获得的结果吻合良好,从一个侧面验证了该模型的有效性.基于该 PD-FEM 混合模型对氧化铝陶瓷板淬火过程进行模拟分析,分析计算了陶瓷板受热冲击载荷作用时的裂纹萌生及扩展过程,通过对淬火过程中陶瓷板应变能密度分布情况进行计算分析,研究了陶瓷板初始温度和宽度对裂纹萌生及扩展的影响.计算结果表

明,该混合模型研究结果与实验结果吻合良好,反映了本文提出的 PD-FEM 混合模型的正确性.该 PD-FEM 混合模型继承了 PD 处理不连续问题的优势,与传统的 PD 热力耦合模型相比,其计算效率得到较大的提高,为研究热力耦合条件下材料失效机理提供了新的研究方法.

致谢 本文作者衷心感谢武汉科技大学省部共建耐火材料与冶金国家重点实验室基金(G201407)对本文的资助.

参考文献(References):

- [1] 赵婷婷, 范立坤, 黎阳. 陶瓷材料抗热震性的研究进展[J]. 机械工程材料, 2022, **46**(12): 1-8. (ZHAO Tingting, FAN Likun, LI Yang. Research progress on thermal shock resistance of ceramic materials[J]. *Materials for Mechanical Engineering*, 2022, **46**(12): 1-8. (in Chinese))
- [2] 李鸿鹏, 凌松, 戚振彪, 等. 热力耦合问题数学均匀化方法的计算精度[J]. 应用数学和力学, 2020, **41**(1): 54-69. (LI Hongpeng, LING Song, QI Zhenbiao, et al. Accuracy of the mathematical homogenization method for thermomechanical problems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, **41**(1): 54-69. (in Chinese))
- [3] 李若愚, 王天宏. 薄板热力耦合的屈曲分析[J]. 应用数学和力学, 2020, **41**(8): 877-886. (LI Ruoyu, WANG Tianhong. Thermo-mechanical buckling analysis of thin plates[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, **41**(8): 877-886. (in Chinese))
- [4] 杨国欣, 郑世风, 李定玉, 等. 考虑损伤判据温度相关性的相场法模拟氧化铝热冲击裂纹扩展[J]. 应用数学和力学, 2022, **43**(11): 1259-1267. (YANG Guoxin, ZHENG Shifeng, LI Dingyu, et al. Thermal shock crack propagation of alumina simulated with the phase-field method under temperature-dependent damage criteria[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(11): 1259-1267. (in Chinese))
- [5] 马玉娥, 陈鹏程, 郭雯, 等. 基于光滑有限元法的热-弹相场断裂研究[J]. 固体力学学报, 2023, **44**(3): 346-354. (MA Yu'e, CHEN Pengcheng, GUO Wen, et al. Study on thermo-elastic phase fracture modeling based on the cell-based smoothed finite element method[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2023, **44**(3): 346-354. (in Chinese))
- [6] SILLING S A. Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces[J]. *Journal of Mechanics Physics of Solids*, 2000, **48**(1): 175-209.
- [7] SILLING S A. Linearized theory of peridynamic states[J]. *Journal of Elasticity*, 2010, **99**(1): 85-111.
- [8] SILLING S A, EPTON M, WECKNER O. Peridynamic states and constitutive modeling[J]. *Journal of Elasticity*, 2007, **88**(2): 151-184.
- [9] BOBARU F, DUANGPANYA M. A peridynamic formulation for transient heat conduction in bodies with evolving discontinuities[J]. *Journal of Computational Physics*, 2012, **231**(7): 2764-2785.
- [10] BOBARU F, DUANGPANYA M. The peridynamic formulation for transient heat conduction[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2010, **53**(19/20): 4047-4059.
- [11] OTERKUS S, MADENCI E, AGWAI A. Fully coupled peridynamic thermomechanics[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2014, **64**: 1-23.
- [12] D'ANTUONO P, MORANDINI M. Thermal shock response via weakly coupled peridynamic thermo-mechanics[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2017, **129**: 74-89.
- [13] WANG Y T, ZHOU X P, ZHANG T. Size effect of thermal shock crack patterns in ceramics: insights from a nonlocal numerical approach[J]. *Mechanics of Materials*, 2019, **137**: 103133.
- [14] GAO Y, OTERKUS S. Ordinary state-based peridynamic modelling for fully coupled thermoelastic problems[J]. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 2019, **31**: 907-973.
- [15] WANG Y T, ZHOU X P, ZHANG T. An improved coupled thermo-mechanic bond-based peridynamic model for cracking behaviors in brittle solids subjected to thermal shocks[J]. *European Journal of Mechanics A: Solids*, 2019, **73**: 282-305.
- [16] 李星, 顾鑫, 夏晓舟, 等. 考虑相变的近场动力学热-力耦合模型及多孔介质冻结破坏模拟[J]. 力学学报, 2022, **54**(12): 3310-3318. (LI Xing, GU Xin, XIA Xiaozhou, et al. Peridynamic thermomechanical coupling model with phase change and simulation of freezing failure of porous media[J]. *Chinese Journal of Theoretical and*

- Applied Mechanics*, 2022, **54**(12): 3310-3318. (in Chinese))
- [17] KILIC B, MADENCI E. Coupling of peridynamic theory and the finite element method[J]. *Journal of Mechanics and Structures*, 2010, **5**(5): 707-733.
- [18] LIU W Y, HONG J W. A coupling approach of discretized peridynamics with finite element method[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2012, **245**: 163-175.
- [19] SELESON P, BENDDINE S, PRUDHOMME S. A force-based coupling scheme for peridynamics and classical elasticity[J]. *Computational Materials Science*, 2013, **66**: 34-49.
- [20] BIE Y H, CUI X Y, LI Z C. A coupling approach of state-based peridynamics with node-based smoothed finite element method[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2018, **331**: 675-700.
- [21] BIE Y H, LIU Z M, YANG H, et al. Abaqus implementation of dual peridynamics for brittle fracture[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2020, **372**: 113398.
- [22] 章青, 郁杨天, 顾鑫. 近场动力学与有限元的混合建模方法[J]. 计算力学学报, 2016, **33**(4): 441-448. (ZHANG Qing, YU Yangtian, GU Xin. Hybrid modeling methods of peridynamics and finite element method[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2016, **33**(4): 441-448. (in Chinese))
- [23] 史鑫, 赵剑宁, 杨苗苗, 等. 含高温梯度及接触热阻非线性热力耦合问题的谱元法[J]. 力学学报, 2022, **54**(7): 1960-1969. (SHI Xin, ZHAO Jianning, YANG Miaomiao, et al. Spectral element method for nonlinear thermomechanical coupling problems with high temperature gradient and thermal contact resistance[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2022, **54**(7): 1960-1969. (in Chinese))
- [24] 孔祥谦. 热应力有限单元法分析[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 1999. (KONG Xiangqian. *Thermal Stress Analysis by Finite Element Method*[M]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University Press, 1999. (in Chinese))
- [25] 王勖成. 有限单元法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003. (WANG Maocheng. *Finite Element Method*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2003. (in Chinese))
- [26] MADENCI E, OTERKUS E. *Peridynamic Theory and Its Applications*[M]. New York: Springer, 2014.
- [27] WANG Y T, ZHOU X P, KOU M M. A coupled thermo-mechanical bond-based peridynamics for simulating thermal cracking in rocks[J]. *International Journal of Fracture*, 2018, **211**: 13-42.
- [28] SHAO Y F, LIU B Y, WANG X H, et al. Crack propagation speed in ceramic during quenching[J]. *Journal of the European Ceramic Society*, 2018, **38**: 2879-2885.