

变系数分数阶扩散模型在多孔介质中的应用*

颜 琪, 鲁祯昊, 王虹静, 范文萍,
马铭伟, 牛雅楠, 王梁俊豪

(江南大学 理学院, 江苏 无锡 214122)

摘要: 针对多孔介质中的反常扩散行为, 提出了利用变系数的时间分数阶扩散模型模拟煤炭介质中甲烷的反常扩散现象. 将常系数时间分数阶形扩散模型推广至变系数情形, 并建立了变系数分数阶模型的非均匀网格数值求解格式; 在模型数值解的基础上, 基于实验测量数据, 提出了高效的布谷鸟搜索算法, 同时估计了模型中的多个重要参数. 最后通过数值实验, 验证了变系数分数阶扩散模型及布谷鸟算法在研究多孔介质中反常扩散现象正反问题中的有效性.

关键词: 变系数分数阶扩散模型; 数值格式; 多参数识别; 布谷鸟算法

中图分类号: O29 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.450010

Applications of a Fractional Diffusion Model With Variable Coefficients in Porous Medium

YAN Qi, LU Zhenhao, WANG Hongjing, FAN Wenping,
MA Mingwei, NIU Yanan, WANG Liangjunhao

(School of Science, Jiangnan University, Wuxi, Jiangsu 214122, P.R.China)

Abstract: Aimed at the anomalous diffusion behavior in porous medium, a time fractional diffusion model with variable coefficients was proposed to simulate the anomalous diffusion of methane in coal medium. The time fractional fractal diffusion model with constant coefficients was extended to the case with variable coefficients, the numerical scheme based on graded meshing of the fractional model with variable coefficients was established. Based on the numerical solution and experimental data, an efficient cuckoo search algorithm was proposed to estimate several important parameters in the model. Finally, the effectiveness of the fractional diffusion model with variable coefficients and the cuckoo search algorithm in studying the direct and inverse problems of anomalous diffusion in porous media, was verified with numerical experiments.

Key words: fractional diffusion model with variable coefficients; numerical scheme; multi-parameter identification; cuckoo search algorithm

* 收稿日期: 2024-01-12; 修订日期: 2024-07-24

基金项目: 国家自然科学基金(11801221); 江苏省自然科学基金(BK20180586)

作者简介: 颜琪(2003—), 男, 本科生(E-mail: 1131210324@stu.jiangnan.edu.cn);

范文萍(1990—), 女, 副教授, 博士(通讯作者. E-mail: wpfan@jiangnan.edu.cn).

引用格式: 颜琪, 鲁祯昊, 王虹静, 范文萍, 马铭伟, 牛雅楠, 王梁俊豪. 变系数分数阶扩散模型在多孔介质中的应用[J]. 应用数学和力学, 2025, 46(1): 84-91.

0 引 言

分数阶偏微分方程在工程技术及科学研究的诸多领域有着广泛应用,特别在刻画具有记忆和遗传效应的反常现象中凸显了优势^[1-3].在多孔介质领域,由于介质内部的空隙结构特性,气体在多孔介质中的传输行为是一种反常扩散行为.研究表明,相较于整数阶模型,分数阶模型能够更好地刻画气体在多孔介质中的反常扩散行为,研究分数阶模型在多孔介质中的应用已经受到了学者们的广泛关注^[4-5].

在已有的研究中,Jiang 等^[6]建立了基于分形结构的时间分数阶分形扩散模型,并成功应用于模拟煤炭介质中甲烷气体的扩散实验数据,证明了分数阶模型在刻画该反常扩散行为中的优势.Yang 等^[7]针对分数阶分形扩散模型,研究了相应的数值求解方法,建立了基于谱方法的数值格式,并研究了相应的参数识别反问题,提出了三种参数估计方法.Fan 等^[8]研究了基于有限差分算法的数值求解格式,并利用 Bayes 算法估计了模型中的多个参数.但是在上述研究中,所采用的时间分数阶分形扩散模型中的扩散系数等参数均被认为是常数,而对相应的变系数情形研究较少.Ren 等^[9]建立了时间依赖的变系数分数阶扩散模型,成功应用于拟合炭介质中甲烷气体的解吸扩散实验数据,并证明了分数阶模型相较于整数阶模型的显著优势.文献[9]虽然采用解析的方法分析了模型的解及其参数取值,但仍缺乏相应的数值分析研究.因此,本文针对时间依赖的变系数分数阶扩散模型,考虑分数阶导数算子在初始时刻的弱奇性,建立了基于非均匀网格剖分的数值求解格式,并在数值解的基础上,研究了高效的分数阶变系数识别问题,给出了可行的参数识别算法.最后,通过数值算例,验证了数值格式及分数阶参数识别算法的有效性.

1 变系数时间分数阶扩散模型

Euclid 空间中基于经典的 Fick 扩散定律的整数阶分形扩散模型表述为

$$\frac{\partial c(r,t)}{\partial t} = \frac{1}{r^{d-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(D r^{d-1} \frac{\partial c(r,t)}{\partial r} \right), \quad (1)$$

其中, $c(r,t)$ 是扩散成分的浓度, kg/m^3 ; D 为扩散系数, m^2/s ; r 是粒子半径, m ; t 是扩散时间, s ; d 为 Euclid 空间维度.分形介质中,扩散系数 d 与粒子半径 r 及分形结构参数 θ 有关,即 $D(r) = D_0 r^{-\theta}$.分形结构参数 θ 刻画了扩散分子在分形多孔介质中的随机扩散路径, D_0 为预指数因子.考虑到分形介质中气体分子的扩散行为往往表现出反常扩散现象,将式(1)中的一阶偏导 $\frac{\partial c(r,t)}{\partial t}$ 替换为 α 阶分数阶导数,并基于介质的分形特性,将 Euclid 维数 d 替换为分形维数 d_f ,可以得到如下常系数的时间分数阶分形扩散模型:

$$\frac{\partial^\alpha c(r,t)}{\partial t^\alpha} = \frac{D_0}{r^{d_f-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{d_f-1-\theta} \frac{\partial c(r,t)}{\partial r} \right), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (2)$$

其中, $\frac{\partial^\alpha c(r,t)}{\partial t^\alpha}$ 是 Riemann-Liouville 分数阶导数^[10], 定义为

$$\frac{\partial^\alpha c(r,t)}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{c(r,\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

研究表明,气体扩散系数受扩散介质、扩散相和介质所在外部条件(如温度、压力等)的影响,随时间呈动态衰减趋势.李志强等^[11]提出了动态扩散系数模型:

$$D(t) = D_0 e^{-\beta t}, \quad (3)$$

其中, $D(t)$ 为随时间动态衰减的扩散系数; D_0 为初始扩散系数, m^2/s ; β 为扩散系数的衰减指数, s^{-1} .从而,基于式(3)的变系数时间分数阶扩散模型可表述为

$$\frac{\partial^\alpha c(r,t)}{\partial t^\alpha} = \frac{D_0 e^{-\beta t}}{r^{d_f-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{d_f-1-\theta} \frac{\partial c(r,t)}{\partial r} \right), \quad 0 < \alpha < 1, \quad (4)$$

其初边值条件假设为

$$\begin{cases} c(r, t) |_{t=0} = c_0, & 0 \leq r < R, \\ \frac{\partial c(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, & t \geq 0, \\ c(r, t) |_{r=R} = c_1, & t \geq 0, \end{cases} \quad (5)$$

其中, c_0, c_1 为常数, c_0 为初始浓度, c_1 为表面浓度.

特别地, 在模型(4)、(5)中, 当 $\beta = 0$ 时, 模型即为常系数时间分数阶分形扩散模型^[6]. 进一步地, 若 $\alpha = 1, d_t = 3, \theta = 0, \beta = 0$, 则模型即退化为经典的整数阶 Fick 扩散模型.

2 变系数时间分数阶扩散模型的数值格式

令 $u(r, t) = c(r, t) - c_0$, 则有

$$\frac{\partial^\alpha u(r, t)}{\partial t^\alpha} = \frac{D_0 e^{-\beta t}}{r^{d_t-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{d_t-1-\theta} \frac{\partial u(r, t)}{\partial r} \right), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (6)$$

$$\begin{cases} u(r, t) |_{t=0} = 0, & 0 \leq r < R, \\ \frac{\partial u(r, t)}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, & t \geq 0, \\ u(r, t) |_{r=R} = c_1 - c_0, & t \geq 0. \end{cases} \quad (7)$$

基于分数阶 Riemann-Liouville 导数与 Caputo 导数之间的关系^[10]

$${}^C D_t^\alpha u(r, t) = \frac{\partial^\alpha u(r, t)}{\partial t^\alpha} - \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} u(r, 0), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (8)$$

模型(6)可等价于

$${}^C D_t^\alpha u(r, t) = \frac{D_0 e^{-\beta t}}{r^{d_t-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{d_t-1-\theta} \frac{\partial u(r, t)}{\partial r} \right), \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (9)$$

对空间采用均匀网格剖分, 时间采用非均匀网格剖分, 定义剖分网格 (r_j, t_n) , 其中 $r_j = j\Delta r (j = 0, 1, \dots, M)$, $t_n = T(n/N)^\gamma (n = 0, 1, \dots, N)$. 网格参数 $\gamma \geq 1$, 其中 $\Delta r = R/M$, $\tau_n = t_n - t_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots, N$ 分别是空间和时间步长, M 和 N 为整数, T 为最大研究时间, $\nabla_r u^k = u^k - u^{k-1}$, $t_{n+\sigma} = t_n + \sigma \tau_{n+1}$, $\sigma = 1 - \alpha/2$, $u^{n+\sigma} = u(\cdot, t_{n+\sigma})$, $u_j^{n,\sigma} = \sigma u_j^{n+1} + (1 - \sigma) u_j^n$. 令 $\Omega_h = \{r_j | 0 \leq j \leq M\}$, $\Omega_{t_n} = \{t_n | 0 \leq n \leq N\}$, 且 $\Omega_h^n = \Omega_h \times \Omega_{t_n}$, 其中 u_j^n 表示在网格 (r_j, t_n) 的数值解. 令 $\mathbf{u}^n = \{u_0^n, u_1^n, \dots, u_{M-1}^n\}^T$ 为数值解向量. 引入下列记号:

$$u_{j-1/2}^n = \frac{1}{2}(u_j^n + u_{j-1}^n), \quad \delta_r u_{j-1/2}^n = \frac{1}{\Delta r}(u_j^n - u_{j-1}^n), \quad \delta_r^2 u_j^n = \frac{1}{\Delta r}(\delta_r u_{j+1/2}^n - \delta_r u_{j-1/2}^n),$$

$$r_{j-1/2} = \frac{1}{2}(r_j + r_{j-1}), \quad A_r(r_j^{d_t-1} u_j^n) = \frac{r_{j+1/2}^{d_t-1} u_{j+1/2}^n + r_{j-1/2}^{d_t-1} u_{j-1/2}^n}{2},$$

$$\delta_r(r_j^{d_t-1-\theta} \delta_r u_j^n) = \frac{r_{j+1/2}^{d_t-1-\theta} \delta_r u_{j+1/2}^n - r_{j-1/2}^{d_t-1-\theta} \delta_r u_{j-1/2}^n}{\Delta r}.$$

对于时间的 Caputo 导数采用基于非均匀网格剖分的 L2- 1_σ 差分格式^[12],

$${}^C D_t^\alpha u^{n+\sigma} = \sum_{k=0}^n g_{n,k} (u^{k+1} - u^k), \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (10)$$

其中令

$$a_{n,n} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_n}^{t_{n+\sigma}} (t_{k+\sigma} - \eta)^{-\alpha} d\eta = \frac{\sigma^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \tau_{n+1}^{1-\alpha}, \quad n \geq 0. \quad (11)$$

当 $n \geq 1, 0 \leq k \leq n-1$ 时,

$$a_{n,k} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{n+\sigma} - \eta)^{-\alpha} d\eta, \quad (12)$$

$$b_{n,k} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{2}{t_{k+2} - t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{n+\sigma} - \eta)^{-\alpha} (\eta - t_{k+1/2}) d\eta. \quad (13)$$

系数 $g_{0,0} = \tau_1^{-1} a_{0,0}$, 且当 $k \geq 1$ 时,

$$g_{n,k} = \begin{cases} \tau_{k+1}^{-1} (a_{n,0} - b_{n,0}), & k = 0, \\ \tau_{k+1}^{-1} (a_{n,k} + b_{n,k-1} - b_{n,k}), & 1 \leq k \leq n-1, \\ \tau_{k+1}^{-1} (a_{n,n} + b_{n,n-1}), & k = n. \end{cases} \quad (14)$$

则模型(9)及初边值条件(7)可以转化为

$${}_0^C D_t^\alpha u_{1/2}^{n+\sigma} = D_0 e^{-\beta t_{n+\sigma}} \frac{2}{\Delta r} r_{1/2}^{-\theta} \delta_r u_{1/2}^{n,\sigma}, \quad 1 \leq n \leq N, \quad (15)$$

$$A_r (r_j^{d_t-1} {}_0^C D_t^\alpha u_j^{n+\sigma}) = D_0 e^{-\beta t_{n+\sigma}} \delta_r (r_j^{d_t-1-\theta} \delta_r u_j^{n,\sigma}), \quad 1 \leq j \leq M-1, \quad (16)$$

$$u_j^0 = 0, \quad 0 \leq j \leq M, \quad (17)$$

$$u_M^n = c_1 - c_0, \quad 1 \leq n \leq N. \quad (18)$$

为了提高计算效率,本文采用基于指数和近似(exponential sum approximation)格式的快速算法^[13-14]处理相应的时间分数阶导数项.将 Caputo 导数分裂为区间 $[0, t_{n-1}]$ 的历史部分和 $[t_{n-1}, t_n]$ 的局部部分,并用线性插值近似局部部分,用指数和技术近似历史部分,即

$${}_0^C D_t^\alpha u^{n+\sigma} \approx a_0^{(n+1)} \nabla_\tau u^{n+1} + \sum_{e=1}^{N_q} \varpi^e \mathcal{H}^e(u, t_n), \quad n \geq 0, \quad (19)$$

其中, $\mathcal{H}^e(u, t_0) := 0$, $\mathcal{H}^e(u, t_k) := \int_0^{t_k} e^{-s^e(t_{k+1}-\alpha/2-s)} u'(s) ds$, N_q 及其他参数详见文献[13].

3 变系数参数拟合算法

布谷鸟搜索算法(cuckoo search, CS 算法)^[15]是一种元启发式优化算法,具有参数少、操作简单、容易实现、随机搜索路径和寻优能力强等特点.该算法将布谷鸟的蛋(或巢穴)视为问题的解,通过模拟布谷鸟种群的寄生繁殖行为,采用 Lévy 飞行机制搜索最佳巢穴,从而获得问题的全局最优解.在搜索过程中,存在三个理想化规则:布谷鸟每次只会产一枚蛋,并随机选择一个巢穴进行孵化;质量较高的巢穴将被保留到下一代;有一定数量的可用宿主巢穴,宿主以概率 $p \in [0, 1]$ 探测到布谷鸟的蛋,在这种情况下,宿主可以摧毁蛋或放弃旧巢并建立新巢.布谷鸟搜索算法可概括如下.

算法 1 布谷鸟搜索算法

初始化 m 个宿主巢穴;评估每个巢穴的适应度并找到最佳巢穴;

while ($k <$ 最大迭代次数) do

 通过 Lévy 飞行随机选择一个布谷鸟(记为 i)并评估其适应度 F_i ; 随机选择 m 个巢穴中的一个(记为 j)并评估其适应度 F_j ;

 if $F_j > F_i$, then

 用新巢穴 i 替换 j ;

 end if

 放弃一部分比例为 $p \in [0, 1]$ 的较差巢穴,并通过 Lévy 飞行在新位置建立新巢穴;保留最佳巢穴;对解进行排序并找到当前最佳解;

end while.

本节采用布谷鸟搜索算法确定变系数分数阶扩散模型中的重要参数.考虑到模型中变系数 $D(t) =$

$D_0 e^{-\beta t}$, 未知参数向量假设为 $\mathbf{p}_a = (\alpha, d_f, \theta, \beta)$. 在布谷鸟搜索算法中, 其适应度函数 $F(\mathbf{p}_a)$ 定义为

$$F(\mathbf{p}_a) = \sqrt{\frac{\|\mathbf{Q}_u(\mathbf{p}_a) - \mathbf{Y}\|^2}{N_m}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_m} (q_i - y_i)^2}{N_m}}, \quad (20)$$

其中, $\mathbf{Q}_u(\mathbf{p}_a) = (q_1, q_2, \dots, q_{N_m})$ 为根据模型所得的数值解, $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_{N_m})$ 为相应的实验测量数据, N_m 为测量数据点的个数. 第 $k+1$ 代中的第 i 个解 x_i^{k+1} 是通过 Lévy 飞行从第 k 代中的第 i 个解 x_i^k 生成的^[15]:

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \beta_1 \cdot s_1 \cdot (x_i^k - x_{\text{best}}^k) \cdot \xi, \quad (21)$$

其中 β_1 是步长缩放因子, ξ 是服从标准正态分布的随机数, x_{best}^k 是当前最优解, s_1 是符合 Lévy 分布的步长.

4 数值应用与分析

在多孔介质中甲烷的解吸扩散行为中, t 时刻甲烷解吸相对累积扩散量 $Q(t)$ 可以由解吸仪器直接测量得到, $Q(t)$ 为

$$Q(t) = \frac{c_0 - \overline{c(r,t)}}{c_0 - c_1}, \quad \overline{c(r,t)} = \frac{d_f}{R^{d_f}} \int_0^R c(r,t) r^{d_f-1} dr, \quad (22)$$

$$\overline{c(r,t)} = \frac{d_f}{R^{d_f}} \int_0^R c(r,t) r^{d_f-1} dr \approx \frac{d_f}{R^{d_f}} \sum_{j=0}^{M-1} \frac{c_{j+1} + c_j}{2d_f} (r_{j+1}^{d_f} - r_j^{d_f}). \quad (23)$$

从而可得甲烷相对累积扩散量 $Q(t)$ 的离散形式

$$Q(t) = \frac{c_0}{c_0 - c_1} - \frac{1}{c_0 - c_1} \frac{1}{2R^{d_f}} \sum_{j=0}^{M-1} (c_{j+1} + c_j) (r_{j+1}^{d_f} - r_j^{d_f}). \quad (24)$$

基于模型的数值解, 由 $c(r_j, t_n) = u(r_j, t_n) + c_0$ 可得 $Q(t)$ 的模型计算值.

4.1 数值应用 1

Liu 等^[16] 考虑了甲烷在多孔介质中的解吸扩散行为, 并利用经典的整数阶 Fick 扩散模型模拟了甲烷的解吸扩散实验数据, 但是其结果显示: 经典的整数阶 Fick 扩散模型与实验数据之间存在明显偏差. 考虑到分数阶导数算子在刻画反常现象中的显著优势, 本小节针对文献[16]中的实验数据, 采用变系数时间分数阶扩散模型进行数值模拟, 并利用布谷鸟搜索算法确定模型中的重要参数. 在变系数时间分数阶扩散模型中, 未知参数向量假设为 $\mathbf{p}_a = (\alpha, d_f, \theta, \beta)$. 设参数的迭代区间满足 $\alpha \in [0, 1]$, $d_f \in [1, 3]$, $\theta \in [0, 1]$, $\beta \in [0, 1]$ ^[9]. 考虑到实验数据测量点的随机性, 为了保证测量时间点 t 均在网格剖分时间层上, 取网格参数 $\gamma = 1$.

图 1 为利用布谷鸟搜索算法所得 4 参数 $\alpha, d_f, \theta, \beta$ 的迭代结果. 由图 1 可见, 迭代一定次数后, 所得的参数均趋于稳定值, 说明布谷鸟搜索算法在分数阶模型参数估计问题中是收敛的; 并且可得参数估计结果为 $\alpha = 0.855$, $d_f = 3$, $\theta = 0.0565$, $\beta = 0$, 实验数据与分数阶模型之间的拟合误差 $E_{rr} = 0.004613$.

$$E_{rr} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_m} (\mathbf{Q}_{\text{model}}(\alpha, \beta, \theta, d_f, t_i) - \mathbf{Q}_{\text{mea}}(t_i))^2}{N_m}}, \quad (25)$$

其中 $\mathbf{Q}_{\text{mea}}(t_i)$ 为可测量实验数据向量, $\mathbf{Q}_{\text{model}}(\alpha, \beta, \theta, d_f, t_i)$ 为变系数分数阶扩散模型所得的数值计算结果. 参数估计结果中 β 的值趋于 0, 此时作为变系数时间分数阶扩散模型的一种特例, 模型退化为常系数时间分数阶扩散模型.

由图 2(a) 可见, 分数阶扩散模型与实验测量数据完美地拟合在一起, 证明了数值格式及基于布谷鸟搜索算法所得的多参数识别结果是正确的, 验证了布谷鸟搜索算法在分数阶参数识别反问题中的可行性. 且分数阶扩散模型拟合效果明显优于经典的整数阶扩散模型, 进一步凸显了分数阶微积分在刻画反常现象中的优势. 图 2(b) 给出了当网格参数 γ 取不同值时所得的数值解, 可以看出 γ 的不同取值不影响数值解的正确

性,证明了本文所建立的基于非均匀网格剖分的数值格式是正确的。

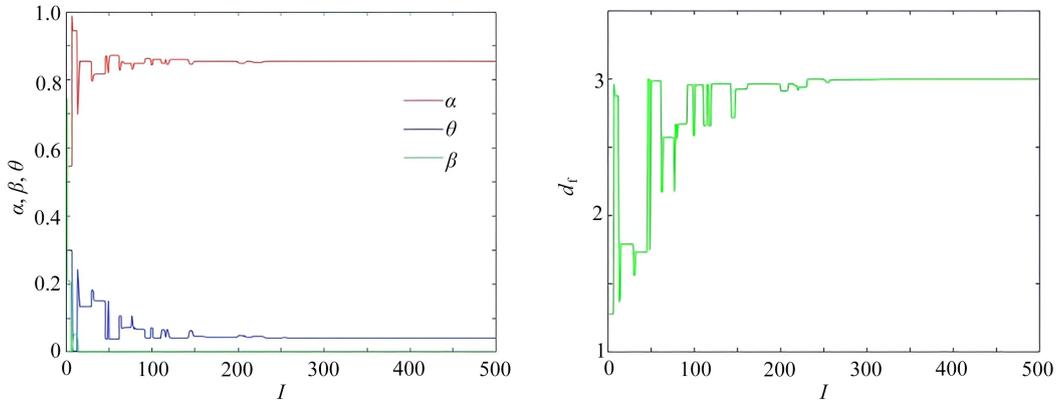


图 1 变系数时间分数阶扩散模型的 $(\alpha, d_t, \theta, \beta)$ 参数迭代结果

Fig. 1 Parameter $(\alpha, d_t, \theta, \beta)$ iteration results of the time fractional diffusion model with variable coefficients

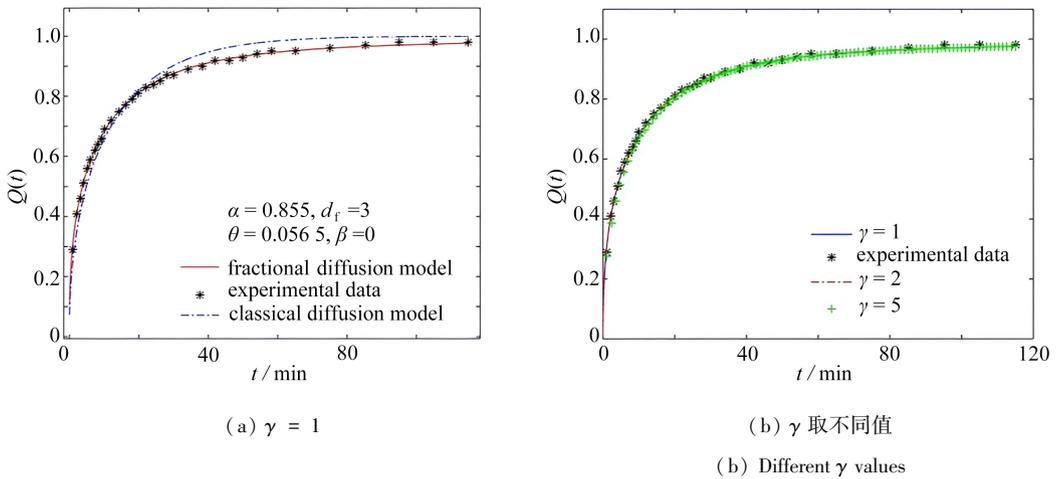


图 2 变系数时间分数阶扩散模型的数据拟合图

Fig. 2 Data fittings of the time fractional diffusion model with variable coefficients

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同。

4.2 数值应用 2

为了验证基于非均匀网格数值格式的布谷鸟搜索算法的有效性,在本小节中,我们采用模拟实验数据进行数值应用分析.取模型参数为 $T = 2, R = 1 \times 10^{-3}, D_0 = 1 \times 10^{-8}, C_0 = 2, C_1 = 1$, 网格参数 $N = 50, M = 100, \gamma = 2$. 未知参数的真实值取为 $\mathbf{p}_{a^*} = (\alpha^*, d_t^*, \theta^*, \beta^*) = (0.6, 2.7, 0.5, 0.2)^{[6,8-9,13]}$, 模拟实验数据由正问题的数值解和随机误差合成,即

$$Y = Q(\mathbf{p}_a) + \omega\sigma,$$

其中 ω 是满足 Gauss 分布的随机变量, σ 是测量误差的标准差。

由图 3 可见,参数估计结果为 $\alpha = 0.5995, d_t = 2.6727, \theta = 0.5022, \beta = 0.1995$ 且四参数 $\alpha, d_t, \theta, \beta$ 的迭代过程均是收敛的,所得参数估计结果与参数真实值非常相近,证明了布谷鸟搜索算法的高效性。

此外,图 4 显示了布谷鸟搜索算法所得适应度函数图,由图 4 可见,适应度函数逐渐降低并趋于 0,说明了布谷鸟搜索算法在处理变系数分数阶多参数识别问题中是稳定的.由图 5 可见,基于 SOE 格式的快速算法是有效的。

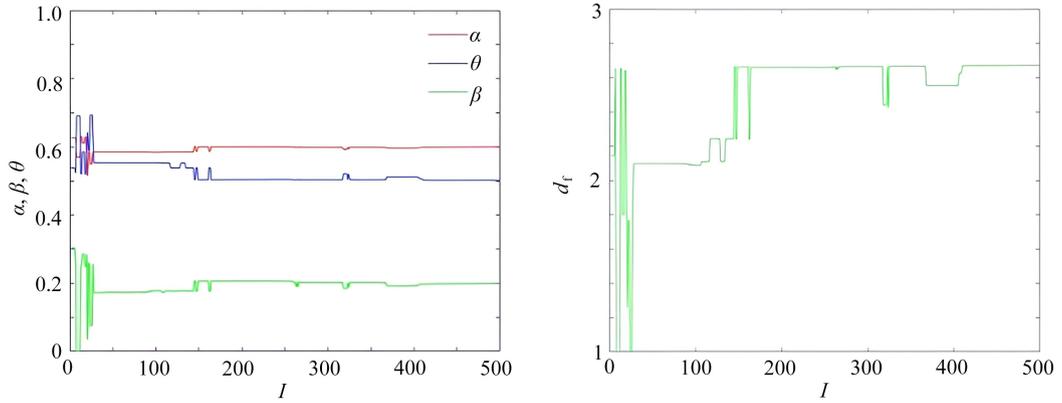


图3 变系数时间分数阶扩散模型的 $(\alpha, d_r, \theta, \beta)$ 参数迭代结果

Fig. 3 Parameter $(\alpha, d_r, \theta, \beta)$ iteration results of the time fractional diffusion model with variable coefficients

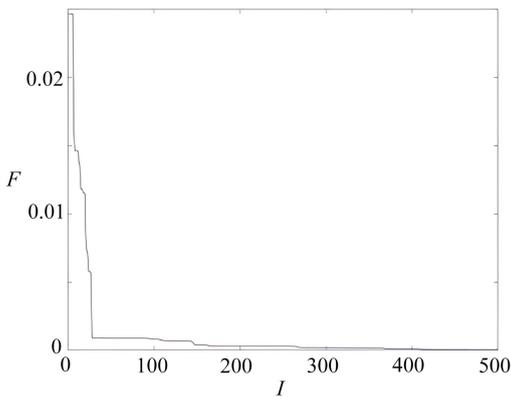


图4 布谷鸟搜索算法的适应度函数图

Fig. 4 The fitness function of the cuckoo search algorithm

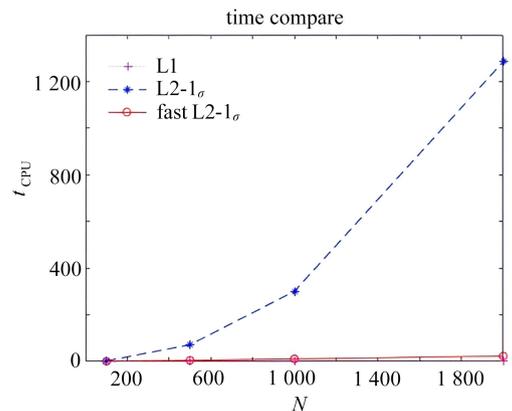


图5 快速格式的计算时间

Fig. 5 The calculation time of the fast scheme

5 结 论

本文研究了变系数时间分数阶扩散模型在多孔介质反常扩散现象中的应用.在模型方面,提出了基于变系数的分数阶分形扩散模型,并建立了相应的非均匀网格数值求解格式;在多参数识别方面,采用了布谷鸟搜索算法使其估计模型中的多个参数.最后通过数值应用分析,验证了变系数时间分数阶模型在研究多孔介质的反常扩散现象中是有效的,所采用的布谷鸟搜索算法在分数阶多参数识别问题中是高效的,并且本文所提出的分数阶模型及分数阶多参数识别算法可推广应用于其他分数阶相关问题研究中.

参考文献 (References):

- [1] 卢恋, 任伟新, 王世东. 基于分数阶 Fourier 变换的结构瞬时频率识别[J]. 应用数学和力学, 2022, **43**(8): 825-834. (LU Lian, REN Weixin, WANG Shidong. Structural instantaneous frequency identification based on the fractional Fourier transform[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(8): 825-834. (in Chinese))
- [2] BAZHLEKOVA E, BAZHLEKOV I. Viscoelastic flows with fractional derivative models: computational approach by convolutional calculus of dimovski[J]. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2014, **17**(4): 954-976.
- [3] JIANG X, XU M, QI H. The fractional diffusion model with an absorption term and modified Fick's law for non-local transport processes[J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2010, **11**(1): 262-269.
- [4] CHEN S, LIU F, BURRAGE K. Numerical simulation of a new two-dimensional variable-order fractional percolation equation in non-homogeneous porous media[J]. *Computers & Mathematics With Applications*,

- 2014, **67**(9): 1673-1681.
- [5] PAN M, ZHENG L, LIU F, et al. A spatial-fractional thermal transport model for nanofluid in porous media [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2018, **53**: 622-634.
- [6] JIANG H, CHENG Y, YUAN L, et al. A fractal theory based fractional diffusion model used for the fast desorption process of methane in coal[J]. *Chaos*, 2013, **23**(3): 033111.
- [7] YANG X, JIANG X, KANG J. Parameter identification for fractional fractal diffusion model based on experimental data[J]. *Chaos*, 2019, **29**(8): 083134.
- [8] FAN W, JIANG X, CHEN S. Parameter estimation for the fractional fractal diffusion model based on its numerical solution[J]. *Computers & Mathematics With Applications*, 2016, **71**(2): 642-651.
- [9] REN J, WANG Z, LI B, et al. Fractal-time-dependent fick diffusion model of coal particles based on desorption-diffusion experiments[J]. *Energy & Fuels*, 2022, **36**(12): 6198-6215.
- [10] PODLUBNY I. *Fractional Differential Equations*[M]. San Diego: Academic Press, 1999.
- [11] 李志强, 刘勇, 许彦鹏, 等. 煤粒多尺度孔隙中瓦斯扩散机理及动扩散系数新模型[J]. 煤炭学报, 2016, **41**(3): 633-643.(LI Zhiqiang, LIU Yong, XU Yanpeng, et al. Gas diffusion mechanism in multi-scale pores of coal particles and new diffusion model of dynamic diffusion coefficient[J]. *Journal of China Coal Society*, 2016, **41**(3): 633-643.(in Chinese))
- [12] CHEN H, STYNES M. A high order method on graded meshes for a time-fractional diffusion problem[M]// *Lecture Notes in Computer Science*. Cham: Springer, 2019: 15-27.
- [13] LIAO H L, TANG T, ZHOU T. A second-order and nonuniform time-stepping maximum-principle preserving scheme for time-fractional Allen-Cahn equations[J]. *Journal of Computational Physics*, 2020, **414**: 109473.
- [14] LU Z, FAN W. A fast algorithm for multi-term time-space fractional diffusion equation with fractional boundary condition[J/OL]. *Numerical Algorithms*, 2024[2024-07-24]. <https://doi.org/10.1007/s11075-024-01830-y>.
- [15] CHI X Q, YU B, JIANG X Y. Parameter estimation for the time fractional heat conduction model based on experimental heat flux data[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2020, **102**: 106094.
- [16] LIU Q, WANG J, LIU J, et al. Determining diffusion coefficients of coal particles by solving the inverse problem based on the data of methane desorption measurements[J]. *Fuel*, 2022, **308**: 122045.