

时滞反馈对非线性黏弹性隔振系统的 竖向振动控制研究*

王道航¹, 孙博¹, 刘春霞², 周紫怡¹, 刘羽¹

(1. 昆明理工大学 公共安全与应急管理学院, 昆明 650000;
2. 云南财经大学 统计与数学学院 数学系, 昆明 650000)

摘要: 研究了时滞反馈对非线性黏弹性隔振系统的竖向振动控制情况。基于黏弹性非线性 Zener 模型, 引入时滞控制器, 建立了时滞反馈黏弹性隔振系统数学模型; 采用多尺度法得到了主共振条件下的近似解析解, 并根据 Routh-Hurwitz 理论获取了系统的稳定性条件; 最后, 分析了时滞参数与黏弹性隔振系统振动行为的相关性。研究结果表明, 时滞控制器能够有效地对黏弹性竖向振动系统的不稳定行为和振动幅值进行控制, 且时滞参数可作为独立变量调控系统振动特性。研究结果可为利用时滞控制提高黏弹性隔振系统竖向振动稳定性的应用提供理论指导。

关键词: 黏弹性隔振器; 非线性振动; 时滞反馈控制; Zener 模型; 多尺度法; 稳定性

中图分类号: O322 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.450037

Vertical Vibration Control of Nonlinear Viscoelastic Isolation Systems With Time Delay Feedback

WANG Daohang¹, SUN Bo¹, LIU Chunxia², ZHOU Ziyi¹, LIU Yu¹

(1. *Faculty of Public Security and Emergency Management, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650000, P.R.China;*

2. *Department of Mathematics, School of Statistics and Mathematics, Yunnan University of Finance and Economics, Kunming 650000, P.R.China*)

Abstract: The vertical vibration control of nonlinear viscoelastic vibration isolation systems with time delay feedback was studied. Based on the viscoelastic nonlinear Zener model, a time delay controller was introduced to establish the mathematical model for time delay feedback viscoelastic vibration isolation system. The approximate analytical solution under the condition of primary resonance was obtained with the multiscale method. The stability conditions of the system were obtained based on the Routh-Hurwitz theory. Finally, the correlation between the time delay parameters and the vibration behavior of the viscoelastic vibration isolation system was analyzed. The results show that, the time delay controller can effectively control the unstable behaviors and vibration amplitudes of the viscoelastic vertical vibration system, and the time delay parameters can be used as inde-

* 收稿日期: 2024-02-22; 修订日期: 2024-05-10

基金项目: 云南省基础研究计划(青年项目)(202201AU070227)

作者简介: 王道航(1983—),男,讲师,博士(E-mail: wang_daohang@163.com);

刘春霞(1989—),女,讲师,博士(通讯作者. E-mail: lcx13099971218@163.com).

引用格式: 王道航, 孙博, 刘春霞, 周紫怡, 刘羽. 时滞反馈对非线性黏弹性隔振系统的竖向振动控制研究[J]. 应用数学和力学, 2025, 46(2): 199-207.

pendent variables to regulate the vibration characteristics of the system. The work provides a theoretical guidance for the application of time delay control to improve the vertical vibration stability of viscoelastic vibration isolation systems.

Key words: viscoelastic isolator; nonlinear vibration; time delay feedback control; Zener model; multiscale method; stability

0 引言

目前,为了有效衰减结构的竖向振动,提高人员的安全性、舒适性,保证设备的正常运行,在建筑设计时,研究者大多利用隔振器进行工程领域的减振降噪.然而,现代的建筑结构普遍具有较大的柔性,易引发低频、大振幅的非线性振动.在此情况下,线性隔振器已不再适用.黏弹性阻尼材料因具有强非线性,能够同时提供刚度和阻尼,且具有较好的耗能性能、容易构造等优点,已被应用到新型非线性隔振器的设计中,同时在不同领域的隔振设计中被广泛地使用^[1].例如,黏弹性材料最早被应用在解决航天器由疲劳引发的振动问题方面^[2].Filho等^[3]将一种黏弹性吸振器应用于旋转系统,用于降低系统的振动和噪声水平.周颖等^[4-5]发现黏弹性材料在高速铁路桥共振、地震响应方面具有较优的控制效果.所以,利用黏弹性阻尼材料设计新型非线性隔振器具有良好的发展前景.

在分析隔振器的减振效果时,为了更好地反映黏弹性材料的特性,学者们在两种经典模型(Kelvin模型和Maxwell模型)的基础上提出了一种新的模型——Zener模型,该模型可以同时很好地体现出黏弹性材料的蠕变过程与应力松弛^[6].对于此种模型,Brennan等^[7]分别在自由振动和受迫振动的条件下分析了刚度和阻尼对黏弹性Zener系统性能的影响.随着研究的深入,学者们在Zener模型中引入非线性因素来进一步反映非线性黏弹性系统的振动特性,文献[8-9]在线性Zener模型中引入了非线性刚度,研究表明,具有非线性刚度的Zener模型能够更好地提高隔振阻尼器的抑振效率.

然而,非线性系统会产生多稳态、跳跃、分岔等非线性振动行为^[10].考虑到导数控制可以增强非线性系统的稳定性^[11],同时时滞控制因其概念简单且调谐过程明确,在系统的全局渐进稳定分析中得以广泛应用^[12-13].文献[14]中使用黏弹性阻尼材料设计隔振器时引入了时滞控制方法,提高了非线性隔振器的隔振性能.赵艳影等^[15]研究了时滞非线性动力吸振器的减振性能,结果表明通过调节反馈增益系数和时滞量,最高可将原主系统的振动减少90%左右.Sun等^[16]通过定性和定量分析,搭建时滞控制非线性隔振样机,验证了时滞对非线性系统的稳定性、频率等动力学特性的影响,并给出了不同频带时滞的最优取值,体现了时滞控制在非线性隔振领域的应用价值.

在目前工程竖向隔振领域中,利用非线性理论进行新型隔振器设计的研究还有待进一步发展,同时还需考虑消减隔振系统产生的非线性振动特性.因此,本文基于黏弹性非线性Zener模型引入时滞控制器,利用多尺度方法考察了振幅与时滞参数之间的依赖性,同时根据Routh-Hurwitz法则,探究了系统的稳定性条件.

1 系统等效力学模型

将集成了时滞控制的黏弹性非线性隔振系统等效为如图1所示的非线性Zener模型.其中,主系统的质量为 m ,主结构中线性弹簧的刚度系数为 k_1 , $kx + f(x, \dot{x})$ 为该模型的非线性项,位移时滞控制器的时滞反馈增益系数和时滞量分别为 g_1 和 τ_1 ,速度时滞控制反馈增益系数分别为 g_2 和 τ_2 ,Maxwell黏弹性元件的阻尼系数和刚度系数分别为 c 和 k_1 , F_0 和 Ω 分别为外激励的幅值和频率.

以 x, y 为广义坐标得到系统的动力方程为

$$m\ddot{x} + kx + f(x, \dot{x}) + c(\dot{x} - \dot{y}) = F_0 \cos(\Omega t) + g_1 x(t - \tau_1) + g_2 \dot{x}(t - \tau_2), \quad (1)$$

$$k_1 y - c(\dot{x} - \dot{y}) = 0. \quad (2)$$

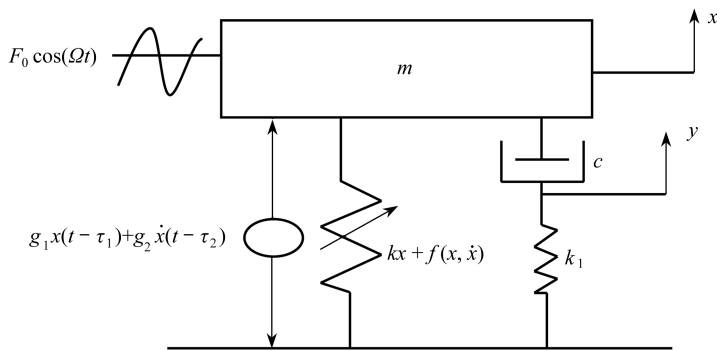


图 1 黏弹性隔振系统等效力学模型

Fig. 1 The equivalent mechanical model for the viscoelastic isolation system

2 系统摄动分析

2.1 多尺度法计算

多尺度法的基本思想是引入表示不同时间尺度的时间变量,将这些时间变量看作独立变量并将对时间的导数写成对各个不同时间尺度的多元复合函数的导数,然后基于久期项的条件来确定各阶的解^[17-18].首先进行如下变换:

$$\begin{cases} \frac{k}{m} = \omega_0^2, \frac{f(x, \dot{x})}{m} = \varepsilon f_1(x, \dot{x}), \frac{c}{m} = 2\varepsilon\zeta, \frac{F_0}{m} = \varepsilon F, \\ \varepsilon g_p = \frac{g_1}{m}, \varepsilon g_d = \frac{g_2}{m}, \frac{k_1}{k} = \varepsilon\chi, b = \frac{\chi}{2\zeta}, \Omega = \omega_0 + \varepsilon\sigma, \end{cases} \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

式(1)与式(2)可化为如下形式:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon (F \cos(\Omega t) - f_1(x, \dot{x}) - 2\zeta(\dot{x} - \dot{y}) + g_p x(t - \tau_1) + g_d \dot{x}(t - \tau_2)), \quad (3)$$

$$\dot{y} + b\omega_0^2 y = \dot{x}. \quad (4)$$

将图 1 非线性项中的 $f(x, \dot{x})$ 表示为 $\alpha_1 x^3$, 即 $f_1(x, \dot{x}) = \alpha x^3$. 经计算,基于消除久期项的条件,可得

$$\frac{F}{2} e^{i\sigma T_1} - 2i\zeta A \omega_0 + \frac{-2\zeta b A \omega_0^2 + 2i\zeta A \omega_0}{b^2 \omega_0^2 + 1} - 3\alpha A^2 \bar{A} - 2i\omega_0 D_1 A + i g_d \omega_0 A e^{-i\omega_0 \tau_2} + g_p A e^{-i\omega_0 \tau_1} = 0. \quad (5)$$

设 $A(T_0, T_1, \dots) = \frac{1}{2} a(T_0, T_1, \dots) e^{i\theta(T_0, T_1, \dots)}$, 其中 $a(T_0, T_1, \dots), \theta(T_0, T_1, \dots)$ 分别为慢变振幅和相位.

将上式代入,分离久期项系数方程中各项的实部和虚部,得

$$D_1 a = \frac{F \sin(\psi)}{2\omega_0} - \frac{\omega_0^2 a \zeta \chi^2}{\chi^2 \omega_0^2 + 4\zeta^2} - \frac{a g_p \sin(\omega_0 \tau_1)}{2\omega_0} + \frac{a g_d \cos(\omega_0 \tau_2)}{2}, \quad (6)$$

$$a D_1 \psi = a\sigma + \frac{F \cos(\psi)}{2\omega_0} - \frac{3\alpha^3 \alpha}{8\omega_0} - \frac{2\omega_0 a \chi \zeta^2}{\chi^2 \omega_0^2 + 4\zeta^2} + \frac{a g_p \cos(\omega_0 \tau_1)}{2\omega_0} + \frac{a g_d \sin(\omega_0 \tau_2)}{2}, \quad (7)$$

其中, $\psi = T_1 \sigma - \theta$.

设 $D_1 a = a D_1 \psi = 0$, 得到频率响应方程如下:

$$\begin{aligned} \frac{F^2}{4\omega_0^2} &= \left(\frac{\omega_0^2 a \zeta \chi^2}{\chi^2 \omega_0^2 + 4\zeta^2} + \frac{a g_p \sin(\omega_0 \tau_1)}{2\omega_0} - \frac{a g_d \cos(\omega_0 \tau_2)}{2} \right)^2 + \\ &\left(a\sigma - \frac{3\alpha^3 \alpha}{8\omega_0} - \frac{2\omega_0 a \chi \zeta^2}{\chi^2 \omega_0^2 + 4\zeta^2} + \frac{a g_p \cos(\omega_0 \tau_1)}{2\omega_0} + \frac{a g_d \sin(\omega_0 \tau_2)}{2} \right)^2. \end{aligned} \quad (8)$$

本研究可使用衰减率进一步评估时滞反馈对隔振系统的竖向控制效果^[19].衰减率通过有无时滞反馈时振幅峰值的比值来确定^[20].根据式(8)可得有无时滞控制系统的振动峰值分别为

$$a_{\max} = \frac{|F|}{\frac{2\omega_0^3 \zeta \chi^2}{\chi^2 \omega_0^2 + 4\zeta^2} + g_p \sin(\omega_0 \tau_1) - \omega_0 g_d \cos(\omega_0 \tau_2)}, \quad (9)$$

$$\bar{a}_{\max} = \frac{|F|(\chi^2 \omega_0^2 + 4\zeta^2)}{2\omega_0^3 \zeta \chi^2}. \quad (10)$$

因此,可得衰减率 R 为

$$R = \frac{a_{\max}}{\bar{a}_{\max}} = \frac{1}{1 + \frac{[g_p \sin(\omega_0 \tau_1) - \omega_0 g_d \cos(\omega_0 \tau_2)](\chi^2 \omega_0^2 + 4\zeta^2)}{2\omega_0^3 \zeta \chi^2}}. \quad (11)$$

从上式可观察到,衰减率越小,系统的振动控制水平越高,且可以通过调整时滞参数来获得最小的衰减率.为了简便分析,设 $t_1 = \tau, t_2 = \xi + \tau$.从文献[21]可得,速度相位比位移早 $\pi/2$ 个单位,因此假设相位差为 $\pi/2$,式(11)可改写为

$$R = \frac{a_{\max}}{\bar{a}_{\max}} = \frac{1}{1 + \frac{(g_p + \omega_0 g_d) \sin(\omega_0 \tau) (\chi^2 \omega_0^2 + 4\zeta^2)}{2\omega_0^3 \zeta \chi^2}}. \quad (12)$$

2.2 平衡解与稳定性条件

方程有非零解,则方程(6)和(7)可改写为

$$\frac{F \sin(\psi)}{2\omega_0} - \frac{\omega_0^2 a \zeta \chi^2}{\chi^2 \omega_0^2 + 4\zeta^2} - \frac{a g_p \sin(\omega_0 \tau_1)}{2\omega_0} + \frac{a g_d \cos(\omega_0 \tau_2)}{2} = 0, \quad (13)$$

$$\sigma + \frac{F \cos(\psi)}{2\omega_0 a} - \frac{3a^2 \alpha}{8\omega_0} - \frac{2\omega_0 \chi \zeta^2}{\chi^2 \omega_0^2 + 4\zeta^2} + \frac{g_p \cos(\omega_0 \tau_1)}{2\omega_0} + \frac{g_d \sin(\omega_0 \tau_2)}{2} = 0. \quad (14)$$

为了研究方程解的稳定性,假设 a_{10} 和 ψ_{10} 是它们的解.为了检验受小扰动 a_{11} 和 ψ_{11} 影响的解的行为,这里令

$$\begin{cases} a = a_{10} + a_{11}, \psi = \psi_{10} + \psi_{11}, \\ \dot{a} = \dot{a}_{11}, \dot{\psi} = \dot{\psi}_{11}. \end{cases} \quad (15)$$

将式(15)代入式(13)、(14),仅保留线性项展开 a_{11} 和 ψ_{11} ,得到如下所示的动态系统:

$$\begin{pmatrix} \dot{a}_{11} \\ \dot{\psi}_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 & S_4 \\ S_3 & S_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ \psi_{11} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

$$\text{其中, } S_1 = -\frac{\omega_0^2 \zeta \chi^2}{\chi^2 \omega_0^2 + 4\zeta^2} - \frac{g_p \sin(\omega_0 \tau_1)}{2\omega_0} + \frac{g_d \cos(\omega_0 \tau_2)}{2}, S_2 = -\frac{F \sin(\psi_{10})}{2\omega_0(a_{10} + a_{11})}, S_3 = -\frac{3\alpha a_{10}}{4\omega_0}, S_4 = \frac{F \cos(\psi_{10})}{2\omega_0}.$$

根据上述 Jacobi 矩阵,可得到以下特征方程:

$$\lambda^2 - (S_1 + S_2)\lambda + (S_1 S_2 - S_3 S_4) = 0. \quad (17)$$

根据 Routh-Hurwitz 准则^[22],方程(13)和(14)解渐进稳定的充要条件为

$$S_1 + S_2 < 0, S_1 S_2 - S_3 S_4 > 0. \quad (18)$$

3 时滞反馈对非线性隔振系统的振动控制

为了验证上述计算结果的准确性,取系统参数 $m = 1, k = 4, k_1 = 1, \alpha_1 = 0.3, c = 0.02, F_0 = 0.2, \varepsilon = 0.1, g_p = g_d = \tau_1 = \tau_2 = 0$,将稳态响应阶段幅值的数值解和近似解进行对比.如图2所示,主系统稳态响应的数值解与解析解吻合得很好,证明了上述计算结果的准确性.

利用式(12)绘制如图3所示的系统衰减率随时滞变化的图像,研究时滞对系统竖向振动的控制效果.从图3可观察到,时滞对系统竖向振动控制效果呈周期性变化,且部分区域的控制效果呈振动抑制作用,部分区域的控制效果呈振动加强作用, $\tau = \pi/2\omega_0$ 为最优时滞之一.在 $\tau \in (0, 1.5)$ 等区域,随着 g_p 与 g_d 的增大,

衰减率减小,控制效果越好,此结果与文献[13]结果一致.因此,下列研究中时滞量均在此区间内取值.

利用式(8)绘制如图4所示的图像,改变参数 $F_0 = 0.035$, 分别研究位移时滞和速度时滞对系统振幅的影响.图中现象进一步证实了上述分析的结论,位移时滞和速度时滞均对系统振幅呈现周期性的影响,在合理时滞值下通过改变二者数值大小可有效抑制振动幅值.

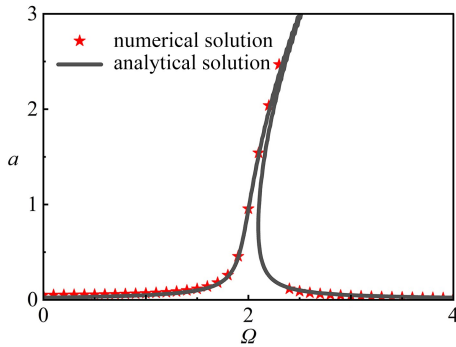


图2 数值解与解析解对比

Fig. 2 Comparison between numerical and analytical solutions

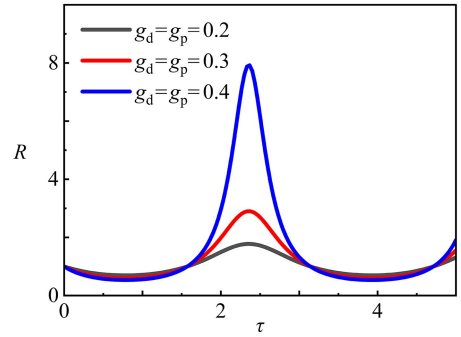
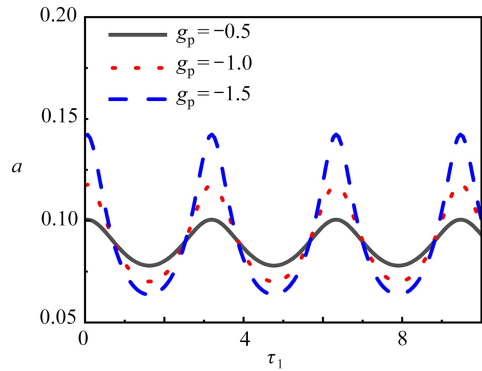
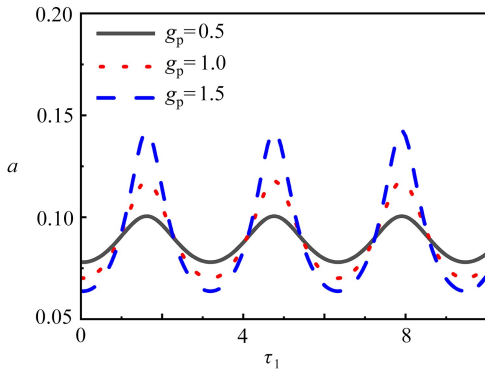
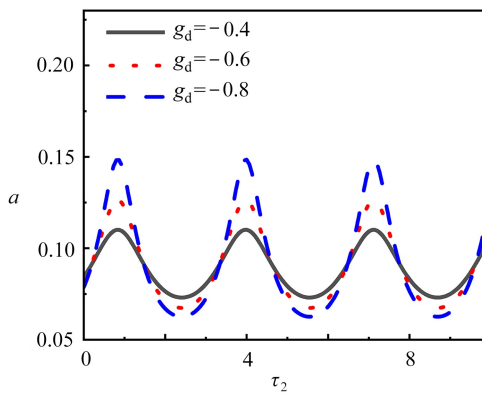
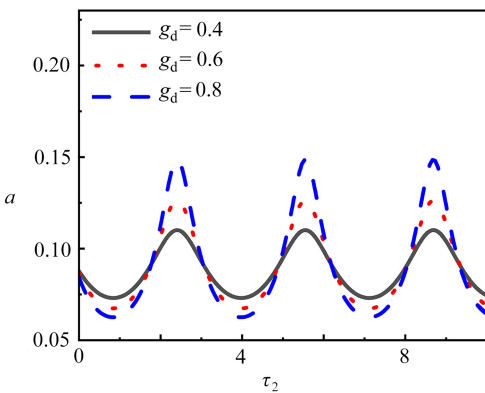


图3 系统衰减率随时滞的变化 ($c = 0.07$)

Fig. 3 The decay rates of the system varying with the time delay ($c = 0.07$)



(a) $g_d = \tau_2 = 0$



(b) $g_p = \tau_1 = 0$

图4 不同反馈增益系数下时滞-振幅曲线

Fig. 4 Delay-amplitude curves under different feedback gain coefficients

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同.

绘制如图5和图6所示的两组图像分析不同时滞反馈增益系数以及时滞量对系统振动的影响.图中实线表示稳定解,虚线表示不稳定解.图5反映了不同时滞反馈增益系数对系统幅频曲线的影响.在仅存在位移时滞且时滞量为零的情况下,位移时滞反馈增益系数对共振幅值大小没有影响,只是相位发生了改变.随

着速度时滞反馈增益系数绝对值的增大,多值区域逐渐减小至消失,共振幅值逐渐减小,且同等条件下速度时滞反馈增益系数取负值时幅值下降更大,如图5(b)所示共振峰值最大降低了70%左右。

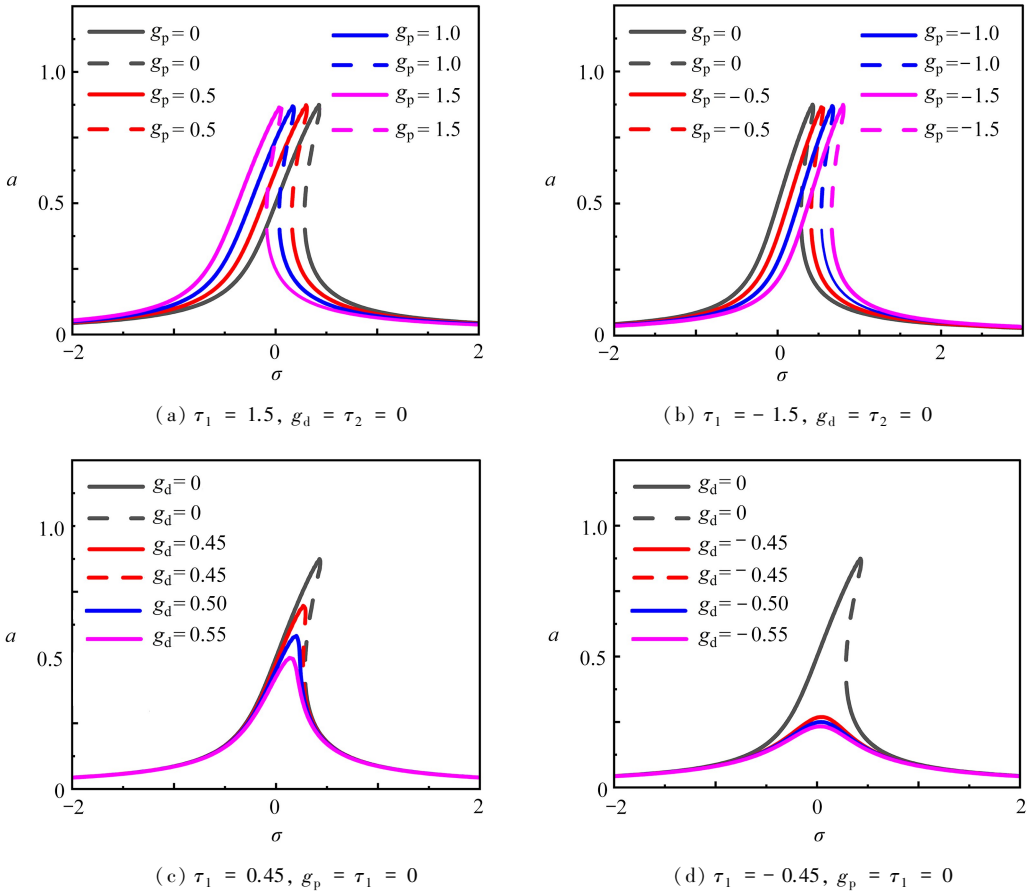
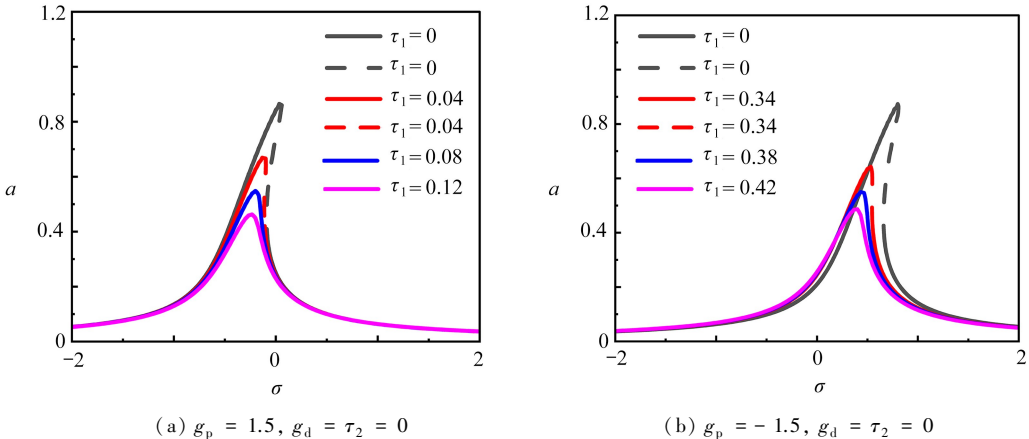


图5 不同反馈增益系数下的幅频曲线

Fig. 5 Amplitude frequency curves under different feedback gain coefficients

图6反映了不同时滞量对系统幅频曲线的影响。从图6(a)可以观察到,在所选取的周期内,共振幅值不受位移(线性)时滞反馈增益系数的正负影响,均随着时滞量的增大而减小,且多值区域也逐渐减小至消失。从图6(b)可以观察到,当速度时滞反馈增益系数为正时,在所选取的周期内,共振幅值随着时滞量的增大而逐渐减小,且多值区域也会逐渐减小直至消失。而当速度时滞反馈增益系数为负时,在所选取的周期内,共振幅值随着时滞量的增大而增大,同时逐渐出现多值区域。因此,在进行减振设计时,可以通过选择合理的位移时滞和速度时滞参数抑制主系统的振动特性。



(a) $g_p = 1.5, g_d = \tau_2 = 0$

(b) $g_p = -1.5, g_d = \tau_2 = 0$

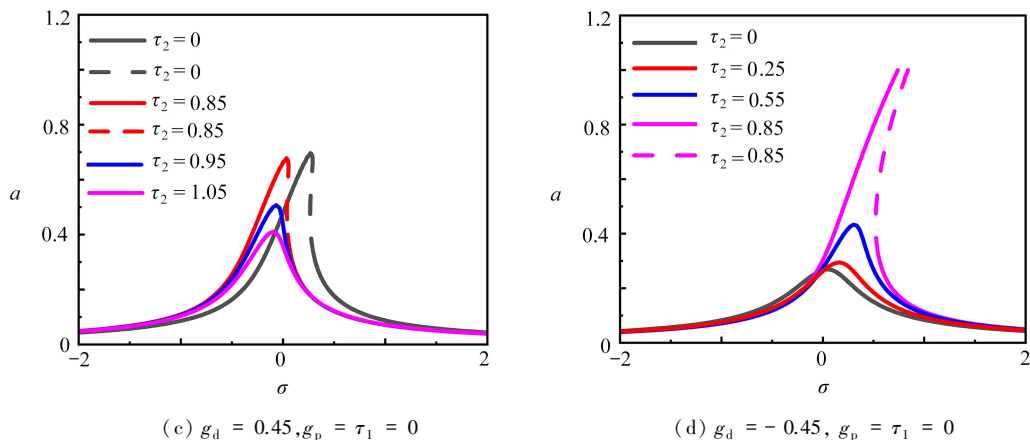


图 6 不同时滞量下的幅频曲线

Fig. 6 Amplitude frequency curves under different time delays

为了研究位移时滞量和速度时滞量对解的稳定性的影响,选取参数 $\sigma = 0$, 绘制如图 7 所示的图像.在 τ_1 和 τ_2 的影响下,部分区域仅存在单值解即稳定状态,而部分区域存在多个振幅即多值不稳定现象,对应的区域为不稳定区域.如图 7 中注释所示,红色双箭头区域内的颜色在 τ_1 - τ_2 平面内所映射的部分为不稳定区域,可明显观察到,在 τ_1 和 τ_2 的影响下,稳定区域和不稳定区域呈周期性变化,且区域的稳定性还会受反馈增益系数的影响而发生改变.

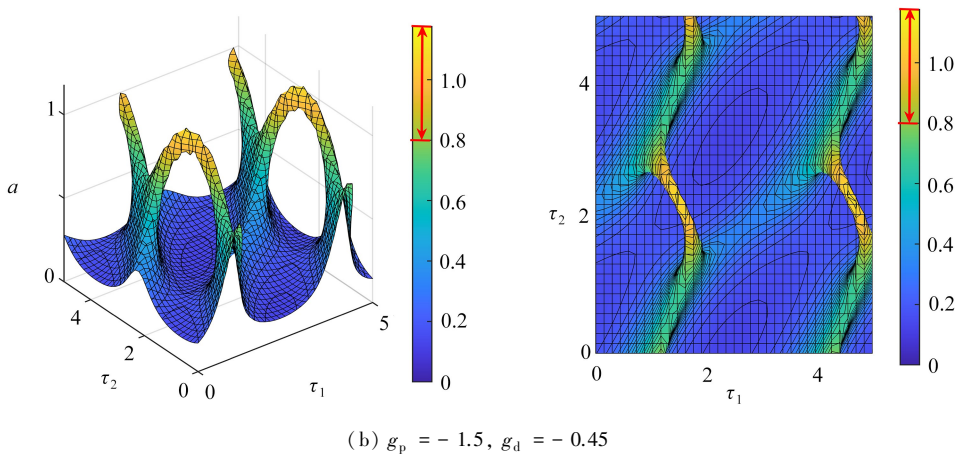
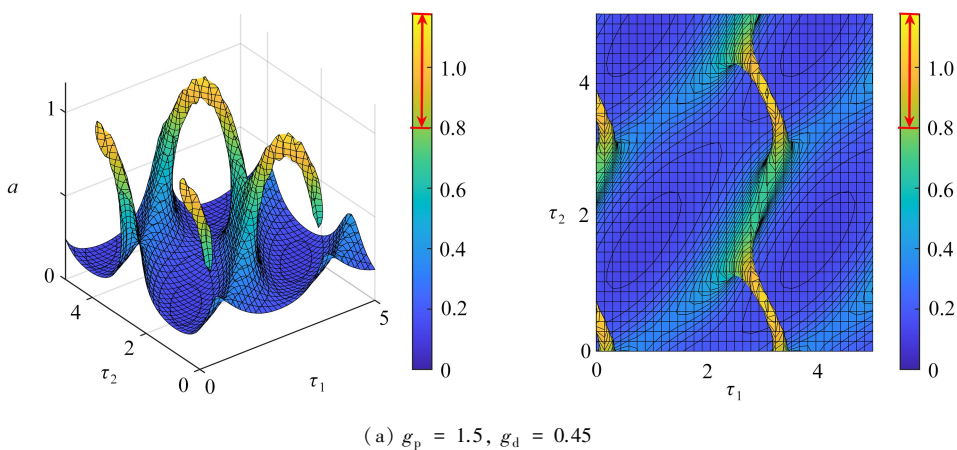


图 7 与 τ_1 和 τ_2 有关的稳定区域和不稳定区域

Fig. 7 Stable and unstable regions related to τ_1 and τ_2

图 8 展示了 $\sigma = 0$ 时,不同时滞量下振幅响应随激励振幅的变化,可明显观察到,曲线的多值性会随着激励振幅的改变而变化,即发生跳跃现象.且在 $F_0 = 0.035$ 时,不同时滞量下解的数量即系统稳定性是不相同

的,结论可与图7所得结论相互验证。

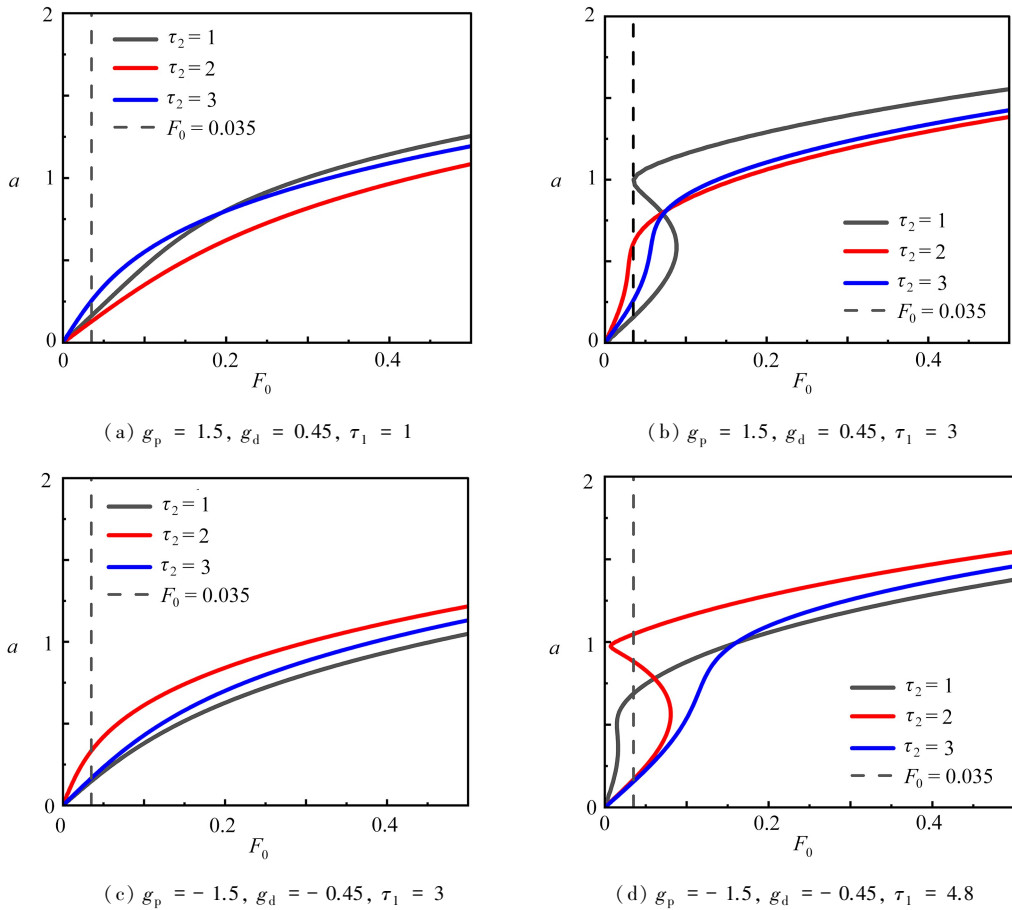


图8 不同时滞参数下外激励-振幅曲线

Fig. 8 External excitation-amplitude curves under different time delay parameters

4 结 论

本文在黏弹性非线性隔振系统中加入了位移和速度时滞反馈进行竖向振动控制分析,利用多尺度法计算得出系统主共振的幅频响应方程,根据 Routh-Hurwitz 准则获得了系统的稳定性条件.然后考察了时滞参数对系统竖向振动控制的影响.主要得出了以下结论:

- 1) 隔振系统的稳定性与时滞参数取值有关,反馈增益系数和时滞量可作为独立控制参数调节系统,使其达到稳定状态;
- 2) 位移反馈增益系数可改变隔振系统的共振频带宽度,速度反馈增益系数可有效减小甚至消除多值区域,同时抑制隔振系统竖向振动的幅值;
- 3) 时滞量对系统竖向振动幅值的影响呈现周期性的变化,相较于位移时滞,速度时滞在反馈增益系数为负时,时滞量越趋近于零,系统振幅越小,振动控制效果越好.

研究结果对抑制黏弹性非线性隔振系统的共振响应具有重要的理论意义,为进一步分析黏弹性 Zener 模型的振动特性及稳定性控制问题奠定了基础,可以促进黏弹性 Zener 模型在实际工程中的应用.未来,我们将以上述理论分析为指导,加以实验验证,进一步完善有关黏弹性非线性隔振系统的研究结果.

致谢 本文作者衷心感谢云南财经大学引进人才项目(2023D41)和昆明理工大学自然科学基金(人培项目)(241120230015)对本文的资助。

参考文献(References):

- [1] FAN R, MENG G, YANG J, et al. Experimental study of the effect of viscoelastic damping materials on noise

- and vibration reduction within railway vehicles[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2009, **319**(1/2): 58-76.
- [2] SOONG T T, DARGUSH G F. *Passive Energy Dissipation Systems in Structural Engineering*[M]. New Jersey: John Wiley and Ltd, 1997: 128-143.
- [3] FILHO F J, LUERSEN M A, BAVASTRI C A. Optimal design of viscoelastic vibration absorbers for rotating systems[J]. *Journal of Vibration and Control*, 2011, **17**(5): 699-710.
- [4] 周颖, 李锐, 吕西林. 粘弹性阻尼器性能试验研究及参数识别[J]. 结构工程师, 2013, **29**(1): 83-91. (ZHOU Ying, LI Rui, LÜ Xilin. Experimental study and parameter identification of viscoelastic dampers[J]. *Structural Engineers*, 2013, **29**(1): 83-91.(in Chinese))
- [5] MURESAN C I, DULF E H, PRODAN O. A fractional order controller for seismic mitigation of structures equipped with viscoelastic mass dampers[J]. *Journal of Vibration and Control*, 2016, **22**(8): 1980-1992.
- [6] 范舒铜, 申永军. 多尺度法的推广及在非线性黏弹性系统的应用[J]. 力学学报, 2022, **54**(2): 495-502. (FAN Shutong, SHEN Yongjun. Extension of multi-scale method and its application to nonlinear viscoelastic system [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2022, **54**(2): 495-502.(in Chinese))
- [7] BRENNAN M J, CARRELLA A, WATERS T P, et al. On the dynamic behaviour of a mass supported by a parallel combination of a spring and an elastically connected damper[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, **309**(3/4/5): 823-837.
- [8] WANG X, YAO H X, ZHENG G T. Enhancing the isolation performance by a nonlinear secondary spring in the Zener model[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2017, **87**(4): 2483-2495.
- [9] SILVA L D H, GONALVES P J P, WAGG D. On the dynamic behavior of the Zener model with nonlinear stiffness for harmonic vibration isolation[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2018, **112**: 343-358.
- [10] SHAHRAEENI M, SOROKIN V, MACE B, et al. Effect of damping nonlinearity on the dynamics and performance of a quasi-zero-stiffness vibration isolator[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2022, **526**: 116822.
- [11] LIU Y J, LEE S M. Synchronization criteria of chaotic Lur'e systems with delayed feedback PD control[J]. *Neurocomputing*, 2016, **189**: 66-71.
- [12] TSOTRAS P. Further passivity results for the attitude control problem[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, **43**(11): 1597-1600.
- [13] LIU C X, YAN Y, WANG W Q, et al. Optimal time delayed control of the combination resonances of viscoelastic graphene sheets under dual-frequency excitation[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2022, **165**: 112856.
- [14] 孙秀婷, 钱佳伟, 齐志凤, 等. 非线性隔振及时滞消振方法研究进展[J]. 力学进展, 2023, **53**(2): 308-356. (SUN Xiuting, QIAN Jiawei, QI Zhifeng, et al. Review on research progress of nonlinear vibration isolation and time-delayed suppression method[J]. *Advances in Mechanics*, 2023, **53**(2): 308-356.(in Chinese))
- [15] 赵艳影, 徐鉴. 时滞非线性动力吸振器的减振机理[J]. 力学学报, 2008, **40**(1): 98-106. (ZHAO Yanying, XU Jian. Mechanism analysis of delayed nonlinear vibration absorber[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2008, **40**(1): 98-106.(in Chinese))
- [16] SUN X T, WANG F, XU J. Dynamics and realization of a feedback-controlled nonlinear isolator with variable time delay[J]. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2019, **141**(2): 021005.
- [17] 胡宇达, 刘超. 线载和弹性支承作用面内运动薄板磁固耦合双重共振[J]. 应用数学和力学, 2021, **42**(7): 713-722. (HU Yuda, LIU Chao. Double resonance of magnetism-solid coupling of in-plane moving thin plates with linear loads and elastic supports[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, **42**(7): 713-722.(in Chinese))
- [18] 尚慧琳, 张涛, 永蓬. 参数激励驱动微陀螺系统的非线性振动特性研究[J]. 振动与冲击, 2017, **36**(1): 102-107. (SHANG Huilin, ZHANG Tao, YONG Peng. Nonlinear vibration behaviors of a micro-gyroscope system actuated by a parametric excitation[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2017, **36**(1): 102-107.(in Chinese))
- [19] LIU C X, YAN Y, WANG W Q. Primary resonance analysis of a nano beam with axial load by nonlocal continuum theory under time delay control[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2020, **85**(2): 124-140.
- [20] JI J C, ZHANG N. Suppression of the primary resonance vibrations of a forced nonlinear system using a dynamic vibration absorber[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2010, **329**(11): 2044-2056.
- [21] JI J C, LEUNG A Y T. Resonances of a non-linear s.d.o.f. system with two time-delays in linear feedback control[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2002, **253**(5): 985-1000.
- [22] LI X Y, JI J C, HANSEN C H, et al. The response of a Duffing-Van der Pol oscillator under delayed feedback control[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, **291**(3/4/5): 644-655.