

# 基于修正偶应力理论的应力最小化 双向渐进结构拓扑优化方法\*

张漫哲<sup>1</sup>, 顾水涛<sup>1</sup>, 冯志强<sup>2</sup>

(1. 重庆大学 土木工程学院, 重庆 400040;  
2. 西南交通大学 力学与航空航天学院, 成都 610031)

(本刊编委冯志强来稿)

**摘要:** 研究并探讨了基于应力的双向渐进结构拓扑优化(BESO)法在修正偶应力弹性理论中的应用.该方法允许对尺寸问题相关的微观结构均质连续体进行拓扑优化.其通过引入一种与尺寸相关的,基于修正偶应力理论的,非经典等效应力的新颖公式,对经典的 BESO 技术进行了扩展,并在体积约束的条件下进行应力最小化设计.设计变量的迭代更新依赖于灵敏度分析,其涉及对目标函数  $p$  范数全局应力的直接求导.理论中涉及高阶弹性,因此为了满足有限元实现时需要的  $C^1$  节点连续性,在插值中将传统的 Lagrange 插值与一个含待定系数的插值函数相结合.通过三个不同的数值算例,分析了尺寸效应对应力优化设计过程及结果的影响.同时探讨了其他参数包括范数  $p$  值和材料体积分数的作用.获得的研究结果证明了所提出的基于应力的 BESO 方法在涉及尺寸效应相关的拓扑优化设计方向的潜力.

**关键词:** 拓扑优化; BESO; 基于应力; 修正偶应力; 尺寸效应

**中图分类号:** O343.4 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.450038

## Bidirectional Evolutionary Topology Optimization for Stress Minimization Based on the Modified Couple Stress Elasticity

ZHANG Manzhe<sup>1</sup>, GU Shuitao<sup>1</sup>, FENG Zhiqiang<sup>2</sup>

(1. School of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400040, P.R.China;

2. School of Mechanics and Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, P.R.China)

(Contributed by FENG Zhiqiang, M.AMM Editorial Board)

**Abstract:** The application of stress-based bidirectional evolutionary structural optimization (BESO) in the context of the modified couple stress elasticity theory was investigated. This methodology allows for structure optimization of homogenized continuum with a microstructural composition of size effects. The classical BESO technique was extended through the introduction of a novel formulation of couple stress based non-classical equivalent stress, and the minimization design was conducted under the constraint of volume criterion. The iterative

\* 收稿日期: 2024-02-22; 修订日期: 2024-03-17

**作者简介:** 张漫哲(1999—),男,硕士生(E-mail: 2238428037@qq.com);

顾水涛(1979—),男,教授(E-mail: gust@cqu.edu.cn);

冯志强(1963—),男,教授,博士生导师(通讯作者. E-mail: zhiqiang.feng@univ-evry.fr).

**引用格式:** 张漫哲, 顾水涛, 冯志强. 基于修正偶应力理论的应力最小化双向渐进结构拓扑优化方法[J]. 应用数学和力学, 2025, 46(1): 12-28.

update of design variables relies on the sensitivity analysis involving direct derivation of the enriched  $p$ -norm global stress with couple stress contributions. Since the high-order elasticity is involved, the FEM implementation requires at least the  $C^1$  nodal continuity. Thus, a Lagrangian finite element complemented by additional integration functions was implemented. The method was validated with 3 distinct cases through investigation of the size effects on the stress optimization and the subsequent structure design. The impacts of other parameters including the norm  $p$  value and the material volume fraction, were explored. The results demonstrate the potential of the proposed stress-based BESO method in addressing structural optimization of problems involving size effects.

**Key words:** topology optimization; BESO; stress-based; modified couple stress; size effect

## 0 引 言

自 Bendsøe 和 Kikuchi<sup>[1-2]</sup> 的开创性工作以来,拓扑优化已经发展成为一个广泛的领域,其旨在实现多个领域的最优结构设计,包括力学<sup>[3-6]</sup>、传热<sup>[7-8]</sup>和声学<sup>[9-11]</sup>等。近年来,随着增材制造技术的进步,拓扑优化领域面临着新的挑战:具有工程化微结构的非常规材料,如复杂的曲面壳体和桁架系统,在功能结构的构建中日益占据重要地位。这一趋势揭示了对新型优化方法的需求,这些方法包括考虑微结构的材料行为,将先进的材料模型纳入连续介质模型中。面对等效材料行为的尺寸依赖性,这一挑战在拓扑优化领域尤为艰巨,有待学者们深入探索。

为了深入理解这一挑战,有必要提及材料行为中尺寸依赖效应的起源。实际上,结构尺寸可能会显著影响材料的性能,尤其是在与微结构相当的尺度上描述时。当对尺寸效应敏感的材料进行拓扑优化时,考虑问题的尺寸依赖性对结构建模至关重要。有两种主要方法应对此问题:第一种是采用经典弹性模型对全尺寸微观结构进行建模<sup>[12-13]</sup>。虽然这种策略能准确地捕获材料行为的尺寸效应,但庞大的迭代计算量限制了其在拓扑优化中的应用和发展。第二种解决方案是使用高阶弹性理论,该理论通过梯度相关的运动学描述,将尺寸依赖性融入本构关系中,从而避免了大量迭代计算,使其成为拓扑优化背景下的实用候选方案。本研究基于后者建立了拓扑优化的数值模拟框架,结合尺寸相关的材料本构,使用修正偶应力弹性模型,进行了应力优化设计。

高阶弹性理论通过引入额外的材料尺寸参数来整合尺寸相关的材料行为。微形态理论<sup>[14]</sup>源于基本的 Cosserat 模型<sup>[15-16]</sup>,为高阶弹性提供了最通用的框架,进而衍生出微极模型<sup>[17]</sup>和偶应力模型<sup>[18-20]</sup>等简化版本。尽管这些模型能有效解决尺寸效应,但它们通常需要大量的附加参数,增加了在优化计算中的实现复杂度。随后, Yang 等<sup>[21]</sup>证明,通过考虑变形能中旋转梯度的对称部分,可以有效地处理尺寸效应,并提出了一种只需要一个材料尺寸参数的修正的偶应力理论。尽管高阶弹性理论已经应用于许多微观结构设计中,但其在拓扑优化领域的应用在很大程度上仍未得到开发。此外,现有的研究主要集中于使用柔度作为目标函数。Rovati 和 Veber<sup>[22]</sup>开创了这一领域的研究先河,采用微极模型和固体各向同性材料惩罚(SIMP)方法来最小化结构柔度,与经典弹性模型比较证实了所考虑的桁架结构存在尺寸效应。Liu 等<sup>[23]</sup>沿此方向进一步发展,采用偶应力弹性模型来解决相同的柔度最小化问题。基于此模型,后续的研究<sup>[24]</sup>考虑了以基频最大化为目标的拓扑优化模型,发现最优结构与尺寸比相关,且弯曲模量对偶应力连续体频率的影响大于微转动惯量。Ganghoffer 等<sup>[25]</sup>将均质化与拓扑优化相结合,设计了具有负 Poisson 比行为的最优超材料,这一方法也应用于三维手性材料的研究<sup>[26]</sup>。近期,偶应力弹性模型与 BESO 方法的结合,再次实现了结构柔度最小化。

尽管经典弹性理论已经解决了应力优化中的许多固有难题,如网格和应力匹配不兼容导致的应力奇异性<sup>[27-28]</sup>,但现有文献对基于高阶弹性理论的应力拓扑优化领域的探索仍显不足。为了处理应力局部化问题,通过  $\varepsilon$  松弛方法导出的  $q$ - $p$  方法<sup>[29-30]</sup>以及统计工具(如幂平均值)已被应用于评估单元应力,改进的 Kresselmeier-Steinhauser 函数则提升了峰值应力评估的准确度<sup>[31]</sup>。Picelli 等<sup>[32]</sup>成功应用水平集成方法和  $p$  范数进行了基于应力的拓扑优化研究,为包括应力优化、应力约束、多载荷和应力准则在内的一系列问题提供了有效解决方案。近年来, BESO 方法由于其高效性,在应力优化领域获得了广泛关注,通过使用  $p$  范数精确优

化全局应力水平<sup>[33-34]</sup>,并利用 Lagrange 乘法法解决应力约束问题<sup>[35]</sup>.虽然经典弹性理论下的应力优化已取得重要进展,但利用高阶弹性理论进行应力优化的研究仍有待深入.

在此背景下,本文在修正偶应力理论下进行拓扑优化,以实现应力最小化.在优化模型中引入了一种尺寸相关的考虑偶应力贡献的非经典等效应力公式.相应地,针对  $p$  范数全局应力进行灵敏度分析.因此,此项工作可视为是根据偶应力弹性模型对经典 BESO 方法的扩展.在有限元方法的实施方面,基于偶应力理论的运动学方程包含了高阶梯度项,要求节点间至少保持  $C^1$  连续性.因此,本研究采用了一个四节点四边形 12 自由度的有限元模型,其将传统的 Lagrange 插值方法与一个额外的插值函数<sup>[36]</sup>相结合.该技术满足了  $C^1$  连续性的要求,同时也保证了迭代优化的计算效率.

本文框架如下:第 1 节探讨了基于偶应力弹性模型的有限元实现.第 2 节详细介绍了考虑偶应力贡献的非经典等效应力公式以及基于偶应力的 BESO 模型.第 3 节通过三个数值算例,分析了问题的尺寸依赖性以及应力范数  $p$  值和材料体积分数对应力优化设计的影响.第 4 节总结了本文的研究结论.

## 1 基于修正偶应力理论的有限元数值实现

结构尺寸对其力学特性有显著影响.在微米和纳米结构或宏观尺度的均质建筑材料中,材料性质通常在其微观结构相当的尺度上进行描述,材料性能变得依赖于结构尺寸,因而尺寸效应显著体现.在对易受尺寸效应影响的结构进行拓扑优化时,考虑尺寸依赖性变得至关重要.本研究采用修正偶应力弹性理论满足此需求,并在本节中介绍了修正偶应力连续体的基本方程及其有限元实现技术.

### 1.1 基本方程

修正偶应力理论由 Yang 等<sup>[21]</sup>在 2002 年提出,它是一种由最小势能原理衍生出来的高阶弹性理论.根据该理论,在各向同性平面应力假设的二维问题中,位移场包括单元位移向量  $\mathbf{u} = \{u, v\}^T$  和单元微观旋转位移矢量  $\boldsymbol{\theta}_z$ . Cauchy 应变张量的分量为  $\{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}\}^T$ , 对称曲率张量的分量为  $\{\chi_{xz}, \chi_{yz}\}^T$ . 相应地, Cauchy 应力张量的分量为  $\{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}\}^T$ , 修正偶应力张量的分量为  $\{m_{xz}, m_{yz}\}^T$ . 因此,二维单元的应力分量由五个分量组成,即  $\boldsymbol{\sigma}_{cp} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}, m_{xz}, m_{yz}\}^T$ . 图 1 中说明了单位体积  $\delta x \delta y$  上的平面应力分布.

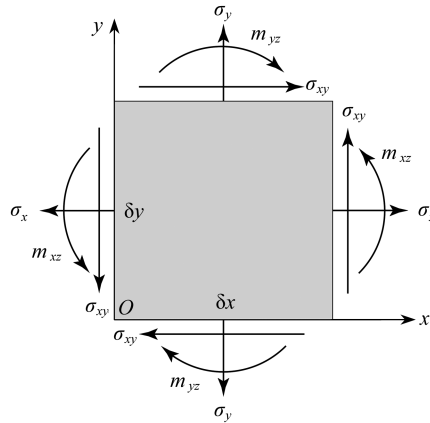


图 1 修正偶应力理论下单位体积  $\delta x \delta y$  上的平面应力分布

Fig. 1 The plane stress distribution on a unit volume  $\delta x \delta y$  according to the modified couple stress elasticity

基于修正偶应力理论的各向同性平面应力问题下的应变-位移关系为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\partial}_\varepsilon \mathbf{u}, \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\chi} = \begin{Bmatrix} \chi_{xz} \\ \chi_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \end{Bmatrix} \theta_z = \mathbf{D}_\chi \theta_z. \quad (2)$$

相应地,本构方程如下:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{D}_\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & 2G \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (3)$$

$$\mathbf{m} = \begin{Bmatrix} m_{xz} \\ m_{yz} \end{Bmatrix} = \mathbf{D}_\chi \boldsymbol{\chi} = \begin{Bmatrix} 2Gl^2 & 0 \\ 0 & 2Gl^2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{xz} \\ \chi_{yz} \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

式中,  $G$  表示剪切模量,由  $G = E/(2(1+\nu))$  给出.值得注意的是,本构关系引入了一个额外的材料参数  $l$ ,称为材料特征长度参数.该参数为反映尺寸效应的重要材料参数,它在经典弹性理论中是不存在的.在实际中,

$l$  的值是通过实验确定的.总本构矩阵  $\mathbf{D}$  由经典弹性本构矩阵  $\mathbf{D}_\varepsilon$  和偶应力本构矩阵  $\mathbf{D}_\chi$  组成,  $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_\varepsilon & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_\chi \end{bmatrix}$ .

## 1.2 有限元过程

众所周知,经典理论下的传统双线性矩形单元是  $C^0$  连续的.然而,引入偶应力项后,由于势能积分中涉及二阶导数,二维实体问题要求  $C^1$  连续.为了满足这一需求,本研究采用了 12 自由度的四边形单元,以保证节点处的  $C^1$  连续性.

对二维结构整体进行离散化,单元每个节点 3 个自由度,包括一个微观旋转自由度,表示为  $\theta_z$ .因此,每个单元的运动变量可由一个 12 自由度向量表示,具体如下:

$$\mathbf{q}^e = \{u_1 \ v_1 \ \theta_1 \ u_2 \ v_2 \ \theta_2 \ u_3 \ v_3 \ \theta_3 \ u_4 \ v_4 \ \theta_4\}^T. \quad (5)$$

位移的插值函数如下:

$$u = \sum_{i=1}^4 N_i u_i, \ v = \sum_{i=1}^4 N_i v_i, \ \theta_z = \sum_{i=1}^4 N_i \theta_i + \beta N_\beta, \quad (6)$$

式中,  $\beta$  为待定系数,  $N_i$  和  $N_\beta$  为形函数.在经典 Lagrange 插值方法的基础上,给出相应表达式:

$$N_i = \frac{1}{4}(1+s_i s)(1+t_i t), \ N_\beta = \frac{1}{8}(1-s^2)(1-t^2). \quad (7)$$

需要强调的是,式(6)引入的待定系数  $\beta$ ,是通过将微观旋转  $\theta_z$  与宏观旋转  $\omega_z$  相等来确定的<sup>[23]</sup>.单元内的宏观旋转  $\omega_z$  表示为

$$\omega_z = \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) / 2 = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial x} v_i - \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial y} u_i \right). \quad (8)$$

假设宏观旋转  $\omega_z$  等于在单元中心处 ( $s = t = 0$ ) 的微观旋转  $\theta_z$ ,待定系数  $\beta$  可由以下关系确定:

$$\frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial x} v_i - \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial y} u_i \right) = \sum_{i=1}^4 N_i \theta_i + \beta N_\beta. \quad (9)$$

通过上述插值方法,便可以建立单元变形与节点位移之间的关系.进一步地,利用最小势能原理,可以导出单元刚度矩阵的表达式:

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_\varepsilon + \mathbf{k}_\chi = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_\varepsilon^T \mathbf{D}_\varepsilon \mathbf{B}_\varepsilon d\Omega^e + \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_\chi^T \mathbf{D}_\chi \mathbf{B}_\chi d\Omega^e, \quad (10)$$

其中,  $\mathbf{B}_\varepsilon$  和  $\mathbf{B}_\chi$  分别表示 Cauchy 应变矩阵和偶应力应变矩阵,  $\mathbf{k}_\varepsilon$  和  $\mathbf{k}_\chi$  分别表示与 Cauchy 应变和对称曲率相关的单元刚度矩阵.为了进行标准的有限元程序编写,采用四点 Gauss 积分法对单元刚度矩阵进行积分,其积分策略如图 2 所示.

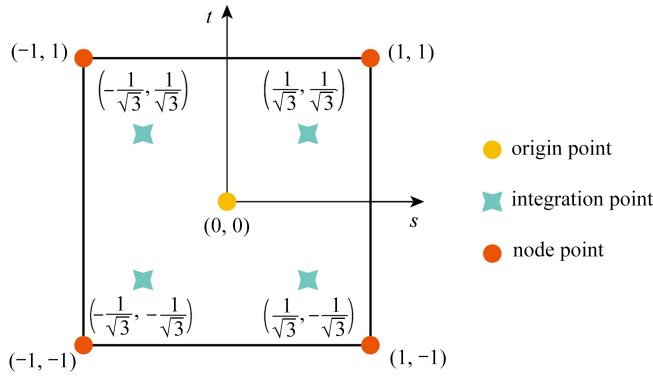


图2 四点 Gauss 积分策略

Fig. 2 The 4-point Gauss integration strategy

## 2 基于修正偶应力理论的 BESO 方法

在实际工程中,结构应力水平是衡量结构是否出现强度破坏、疲劳失效等的重要标准,因此,基于应力的拓扑优化在结构设计实践中至关重要.本节详细介绍了一种拓扑优化方法,该方法对传统的 BESO 方法进行扩展,以基于偶应力的  $p$  范数全局应力为目标函数,并推导出灵敏度数.为确保优化过程的稳定性,对灵敏度数和设计变量均实施了过滤策略.

在 BESO 方法中,设计变量  $x_i$  用于表征优化设计时第  $i$  单元对应的独立设计状态,可近似理解为第  $i$  单元的虚拟密度.设计变量  $x_i$  取二进制值 1 和 0,分别表示材料在第  $i$  设计单元中存在或不存在.具体来说,  $x_i = 1$  表示材料存在,即实体单元;  $x_i = 0$  表示材料不存在,即虚单元.

### 2.1 材料插值

BESO 方法通过将设计变量作为权重系数,利用插值方法描述每个单元的实际材料特性.因此,对于第  $i$  单元实际的本构矩阵 ( $\tilde{\mathbf{D}}_i$ ) 表示为实体单元本构矩阵 ( $\mathbf{D}_i$ ) 与设计变量  $x_i$  的函数.该关系的形式为

$$\tilde{\mathbf{D}}_i = [x_i(1 - 10^{-6}) + 10^{-6}] \cdot \mathbf{D}_i. \quad (11)$$

此方法中引入了修正系数  $10^{-6}$ ,以减少求解平衡方程时的数值奇异性.同时,考虑到本构矩阵与刚度矩阵之间的线性关系,可以用相同的插值方法表示单元刚度矩阵:

$$\tilde{\mathbf{k}}_i = [x_i(1 - 10^{-6}) + 10^{-6}] \cdot \mathbf{k}_i, \quad (12)$$

式中,  $\mathbf{k}_i$  为实体单元的刚度矩阵,  $\tilde{\mathbf{k}}_i$  为经过插值后的单元刚度矩阵.应用此材料插值策略,在应力优化中,仅对实体单元进行灵敏度计算,虚单元的灵敏度直接设为零.该方法有效地避免了低密度区域应力过大而导致的计算奇异性.结构整体刚度矩阵  $\mathbf{K}$  通过插值后的单刚  $\tilde{\mathbf{k}}_i$  组装得到.随后,由平衡方程  $\mathbf{KU} = \mathbf{F}$ , 解析得到结构的全局位移矢量:

$$\mathbf{U} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}, \quad (13)$$

式中,  $\mathbf{U}$  表示结构总的位移向量,  $\mathbf{F}$  表示施加在结构上的外荷载向量.

### 2.2 单元应力向量的计算

研究表明<sup>[37]</sup>,低密度区域的单元中可能出现极高的应力,这给优化过程带来了数值奇点的潜在问题.式 (11)、(12) 所示的幂律型材料插值模型<sup>[38]</sup>可用于改善这一问题.在基于应力的 BESO 方法中,虚单元的应力不被考虑,其应力值在程序实施时直接设为零;仅在实体单元区域计算应力,其计算公式如下:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{ep},i} = \begin{Bmatrix} \sigma_{x,i} \\ \sigma_{y,i} \\ \sigma_{xy,i} \\ m_{xz,i} \\ m_{yz,i} \end{Bmatrix} = \frac{\tilde{\mathbf{D}}_i \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i}{x_i(1 - 10^{-6}) + 10^{-6}} = \mathbf{D}_i \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i, \quad (14)$$



式中,  $\mathbf{B}_i$  表示单元的总应变矩阵,  $\mathbf{u}_i$  表示第  $i$  单元的节点位移向量。

### 2.3 非经典 Von Mises 应力与 $p$ -范数全局应力

在传统应力优化设计中,常以结构设计域内单元的最大 Von Mises 应力最小化作为优化目标。然而,传统的 Von Mises 应力公式仅涵盖了 Cauchy 应力分量,忽略了偶应力项的存在。考虑到材料的微尺度效应,为能捕捉到应力问题的尺寸依赖性,受一种尺寸相关的非经典屈服准则<sup>[39]</sup>的启发,引入适用于各向同性平面应力问题的非经典 Von Mises 应力公式:

$$\sigma_e = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 3\sigma_{xy}^2 - \sigma_x\sigma_y + (3/l^2)(m_{xz}^2 + m_{yz}^2)}. \quad (15)$$

通过以上应力组合得到的  $\sigma_e$  称为非经典 Von Mises 应力或非经典等效应力。该公式通过引入材料尺寸参数,将偶应力项纳入经典 Von Mises 应力公式中,赋予了其考虑材料内部特性尺度的能力,这是经典连续介质力学所不能实现的。为简化符号,将式(15)表示为应力向量  $\sigma_{cp,i}$  与系数矩阵  $\mathbf{V}$  之间的矩阵积:

$$\sigma_{e,i} = (\sigma_{cp,i}^T \mathbf{V} \sigma_{cp,i})^{1/2}, \quad (16)$$

式中,  $\mathbf{V}$  为应力系数矩阵,具体表示为

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3/l^2 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

应力优化旨在降低设计域内应力水平,以所有单元中最大的非经典等效应力最小化作为优化目标。因此,优化目标函数  $f(x)$  表示为

$$f(x) = \sigma_e^{\max} = \max(\sigma_{e,1}, \sigma_{e,2}, \sigma_{e,3}, \dots, \sigma_{e,n}), \quad (18)$$

式中,  $\sigma_e^{\max}$  表示单元中的最大非经典等效应力,  $n$  表示设计域中单元的总数。由式(18)可见,  $\sigma_e^{\max}$  在设计域内表现出局部特性,即  $\sigma_e^{\max}$  出现的位置会随每次优化迭代而变化。 $\sigma_e^{\max}$  的局部性质使其后续灵敏度的推导变得复杂,并可能导致计算量过大。因此采用  $p$  范数全局应力来近似单元中的最大非经典等效应力,优化目标函数据此修改为

$$f(x) = \sigma_{pN} = \left( \sum_{i=1}^n \sigma_{e,i}^p \right)^{1/p}, \quad (19)$$

$p$  值定义为幂阶数。式(19)的计算实质上是设计域内对  $\sigma_{e,i}$  的幂求和。在此操作中,幂阶  $p$  扮演关键角色:较大的  $p$  值使全局应力减小,应力分布更均匀;相反,较小的  $p$  值导致全局应力增加,应力分布更局部化。特别地,当  $p$  趋于无穷大时,  $\sigma_e^{\max}$  在总和中占主导地位,导致  $\sigma_{pN} \approx \sigma_e^{\max}$ ; 当  $p=1$  时,  $\sigma_{pN}$  即为设计域内所有  $\sigma_{e,i}$  的和。直觉上,较高的  $p$  取值更佳,因为其提供了最大应力更准确的近似值和更均匀的应力分布。然而,实际操作中,过高的  $p$  取值可能引起迭代时不良调节的振荡问题。因此,选择合适的  $p$  值需要谨慎,应考虑具体情境。3.2 小节通过数值算例研究了  $p$  值对优化过程的影响。

### 2.4 优化模型

定义拓扑优化问题时,除了目标函数外,还需设定约束函数。本文选取体积约束  $g(x)$  作为约束函数,定义如下:

$$g(x) = \sum_{i=1}^n V_i x_i - V^* = 0, \quad (20)$$

式中,  $V_i$  为第  $i$  单元的体积,  $V^*$  为设定的体积限制分数。在优化过程中,结构体积从 100% 的初始体积逐渐减小,直到收敛到  $V^*$ 。结合式(13)、(19)和(20),基于非经典等效应力和  $p$  范数全局应力的应力最小化 BESO 模型可表示为

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{find: } \mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}, \\ \text{minimize: } f(\mathbf{x}) = \sigma_{PN} = \left( \sum_{i=1}^n \sigma_{e,i}^p \right)^{1/p}, \\ \text{constrain: } \begin{cases} g(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n V_i x_i - V^* = 0, \\ \mathbf{KU} = \mathbf{F}, \\ x_i = 0 \text{ or } 1. \end{cases} \end{array} \right. \quad (21)$$

因此优化问题归结为以结构离散化后单元密度作为设计变量,以最小化  $p$  范数全局应力为目标,以结构体积为约束条件.根据下一小节的灵敏度分析,可通过双向进化策略迭代求解上述定义的优化问题.

## 2.5 灵敏度分析

基于梯度的 BESO 方法是一种寻求最佳材料分布以达到设计目标的常见优化手段.灵敏度分析,源自目标函数,关键地指导设计变量在优化迭代过程中的演变.参考 Xia 等的工作<sup>[34]</sup>,在材料和应力插值模型的定义基础上,应用微分链式法则和直接法对尺寸相关的  $p$  范数全局应力进行偏导数计算,得到数学表达:

$$\frac{\partial \sigma_{PN}}{\partial x_j} = -\sigma_{PN}^{1-p} \left( \sum_{i=1}^n \sigma_{e,i}^{p-2} \sigma_{cp,i}^T \mathbf{VD}_i \mathbf{B}_i \mathbf{G}_i \right) \mathbf{K}^{-1} \mathbf{G}_j^T \mathbf{k}_j \mathbf{u}_j. \quad (22)$$

上式中  $\mathbf{G}_i$  满足  $\mathbf{u}_i = \mathbf{G}_i \mathbf{U}$ , 即从全局的位移向量中提取第  $i$  单元的节点位移向量.进一步,在灵敏度式中引入设计变量项  $x_i$ , 得到灵敏度数  $\alpha_j$  的具体公式:

$$\alpha_j = -x_j \frac{\partial \sigma_{PN}}{\partial x_j} = -x_j \sigma_{PN}^{1-p} \left( \sum_{i=1}^n \sigma_{e,i}^{p-2} \sigma_{cp,i}^T \mathbf{VD}_i \mathbf{B}_i \mathbf{G}_i \right) \mathbf{K}^{-1} \mathbf{G}_j^T \mathbf{k}_j \mathbf{u}_j. \quad (23)$$

此操作旨在优化过程中,通过仅对实体单元评估灵敏度数而将虚单元的灵敏度数设为零,从而减少迭代次数,节省计算时间.

## 2.6 BESO 方法的数值实现

本小节重点介绍基于修正偶应力理论的应力优化模型在迭代优化中的数值实现过程,该过程通过 MATLAB 编程完成.具体的程序架构如图 3 所示,其分为拓扑优化过程、有限元建模和有限元计算三个主要模块,其中有限元建模和有限元计算作为优化过程中的子模块进行开发.

为避免设计变量在优化区域内以 1 和 0 交替分布引起的棋盘格现象<sup>[40]</sup>及对优化稳定性的负面影响,采用基于灵敏度数的过滤与平均策略,该策略在双向渐进结构优化中常用.具体方法如下:

$$\tilde{\alpha}_i = \frac{\sum_{j=1}^n w_{ij}^{\text{sen}} \cdot \alpha_j}{\sum_{j=1}^n w_{ij}^{\text{sen}}}, \quad (24)$$

式中,  $\tilde{\alpha}_i$  为过滤后第  $i$  单元的灵敏度数,  $\alpha_j$  为过滤前第  $j$  单元的灵敏度数,  $n$  表示设计域内总的单元数,  $w_{ij}^{\text{sen}}$  为线性权重因子<sup>[34]</sup>.为提高双向渐进结构优化的收敛性,将当前迭代步骤的灵敏度数与前两次迭代的灵敏度数进行平均处理:

$$\tilde{\alpha}_i^{(k)} = \frac{\tilde{\alpha}_i^{(k)} + \tilde{\alpha}_i^{(k-1)} + \tilde{\alpha}_i^{(k-2)}}{3}, \quad k > 2, \quad (25)$$

式中,  $(k)$  表示当前的迭代次数.基于灵敏度数的过滤和平均后,通过双向进化策略<sup>[34]</sup>更新设计变量,并对更新后的设计变量执行类似的过滤策略.

最终,在完成优化迭代后,需评估收敛性.判断停止迭代的条件是,在达到预设的迭代次数  $N_{\max}$  后,额外进行 15 次的迭代循环,则认为优化过程结束.最大迭代次数  $N_{\max}$  的计算式如下:

$$N_{\max} = \left\lceil \left[ \frac{\lg(V^*/\bar{V})}{\lg(1 - C_{\text{er}})} \right] \right\rceil, \quad (26)$$

式中,  $\lceil \cdot \rceil$  为向上取整符号,  $\bar{V}$  表示结构原始体积,  $C_{\text{er}}$  表示体积进化率.

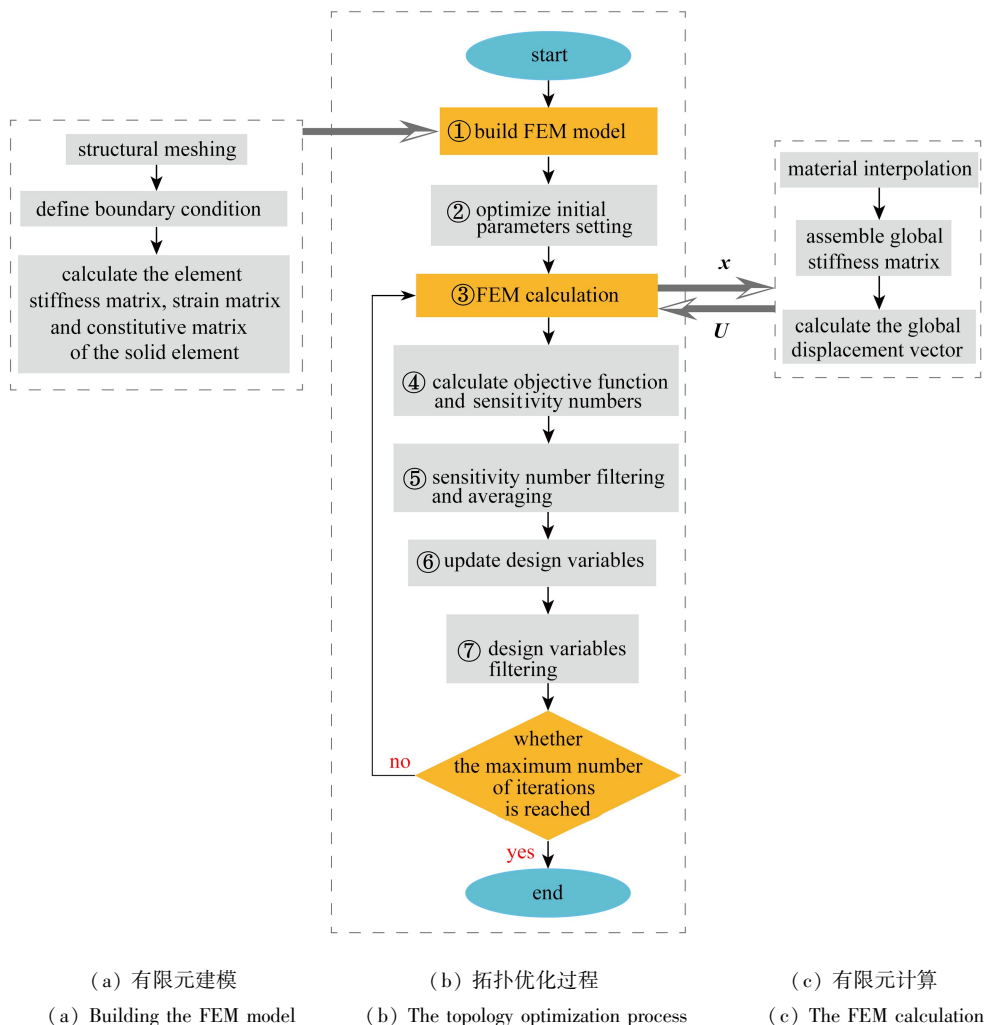


图 3 基于偶应力理论的 BESO 模型流程图  
Fig. 3 The flowchart of the couple stress based BESO model

### 3 数值结果

前文已介绍了基于修正偶应力理论的应力优化 BESO 方法,本节将通过三个数值算例验证其有效性.这些数值算例重点探讨尺寸效应对结构优化设计过程及其结果的影响,并考察了材料尺寸参数  $l$ 、范数  $p$  值和体积限制分数等参数对结构优化的影响.3.1 小节将尺寸效应集成到矩形梁优化模型中,评估不同材料尺寸参数值对应力优化的影响.3.2 小节测试并比较了修正偶应力模型和经典弹性模型在不同的范数  $p$  值和体积限制分数下的优化表现.

优化设计程序从设计域内充满材料的初始设计开始,通过迭代更新设计变量  $x_i$ , 达到预定的体积分数后,再执行 15 轮额外的优化循环以达到最终的材料分配.后续的所有示例均使用第 1 节所述的四边形四节点平面应力有限元模型.假定固体材料的弹性模量为 1.0 MPa, Poisson 比为 0.3, 每次迭代中要去除的材料相对百分比为  $C_{er} = 2\%$ , 以上提到的参数在所有算例中保持一致.

#### 3.1 矩形梁的应力优化: 尺寸效应的影响

在修正偶应力理论中,尺寸效应的表现受材料尺寸参数  $l$  的支配.因此,本例通过改变材料尺寸参数取值,来研究其对拓扑优化设计过程及结果的影响.

##### 3.1.1 优化问题设置

本例设置一个如图 4 所示的矩形梁结构,其长  $L = 180 \text{ mm}$ , 高  $H = 30 \text{ mm}$ . 该结构在左右两端节点处受到位移约束,并在上表面的 10 个节点施加垂直力  $F = 0.05 \text{ N}$ . 优化的目标是寻求在设计域内全局应力 ( $\sigma_{PN}$ )



最小的拓扑结构。

采用尺寸相关的修正偶应力弹性模型对结构进行了建模,优化设计会受到尺寸效应的显著影响.因此,设置了一系列不同的材料尺寸参数值,以比率  $H/l$  作为尺寸效应的衡量指标.假定结构高度  $H$  保持不变,较小的  $H/l$  比值意味着尺寸效应更为显著;相反,较大的  $H/l$  比值则表明尺寸效应可被相对忽略.设计域被离散为  $360 \times 60$  网格,所有单元边长相同  $h^e = 0.05 \text{ mm}$ .

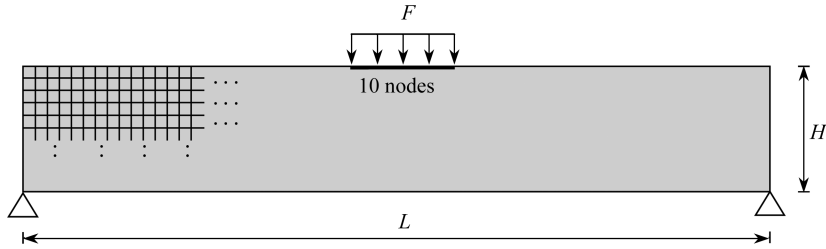


图4 矩形梁结构:设计域以  $360 \times 60$  网格离散

Fig. 4 The rectangular beam structure with the design domain is discretized by a  $360 \times 60$  mesh

在优化过程中,体积限制分数设置为 30%;选择应力范数  $p$  值为 4;设计变量和灵敏度数的过滤半径均设为单元尺寸的两倍。

### 3.1.2 结果与分析

图 5 展示了基于经典弹性理论的应力优化结构设计.图 6—8 展示了使用偶应力弹性模型的优化结构,分别对材料尺寸参数取 2.5, 5, 10, 100,  $10^3$  和  $10^7$  时的情况进行了比较.这些图中的第一行子图提供了各种  $H/l$  参数值下优化结构设计的视觉呈现,其中黑色区域代表实体单元 ( $x_i = 1$ ),白色区域表示虚单元 ( $x_i = 0$ ).相应地,每幅图的第 2—8 行子图分别展示材料分布的各应力分量云图(应力云图的色标范围为从零到各情况的最大应力值),依次为非经典 Von Mises 应力 ( $\sigma_e$ ),  $x, y, xy$  方向的 Cauchy 应力 ( $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ ),  $xz, yz$  方向的偶应力 ( $m_{xz}, m_{yz}$ ) 以及偶应力的模量 ( $\sqrt{m_{xz}^2 + m_{yz}^2}$ ).



图5 基于经典弹性理论的应力最优拓扑结构

Fig. 5 Stress optimization topology structures based on the classical elasticity theory

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同。

图 5—8 的结果显示了尺寸效应对应力优化设计的影响,揭示了两个重要方面.首先,关于优化结构中的整体趋势:随着比值  $H/l$  的降低,即梁结构的高度  $H$  逐渐接近材料尺度  $l$ ,尺寸效应在优化设计中的影响变得更加显著.因此,从图 6 过渡到图 8,可以观察到结构设计的变化,这归因于尺寸效应的不同影响程度.相反,随着比率  $H/l$  的增加,即材料尺度对优化设计影响的减小,结构设计趋向于经典弹性理论的预测,其中尺寸效应不被考虑.其次,关于优化结构的应力分量:尺寸效应的表现与偶应力模量的增加有直接的相关性.这一现象可以从偶应力项对尺寸相关的非经典 Von Mises 应力计算式的贡献中解释.公式中的偶应力项  $(3/l^2)(m_{xz}^2 + m_{yz}^2)$ ,为对传统 Von Mises 应力公式的补充.随着尺寸效应逐渐变得显著(从  $H/l = 10^3$  开始),偶应力项在应力组合中的比重增加,导致其值远超过了经典弹性模型中的传统 Von Mises 应力值。

图 9 描述了不同尺寸效应程度下  $p$  范数全局应力  $\sigma_{pN}$  的演化趋势,并将基于偶应力的优化模型(红线)与基于经典弹性的模型(黑线)进行了比较.横坐标为  $H/l$  比值,在 2.5, 5, 10, 100,  $10^3, 10^4, 10^5, 10^6, 10^7, 10^8, 10^9$  的范围依次取值,纵坐标则对全局应力值进行了刻画.结果显示:基于偶应力的优化模型的全局应力值随尺寸效应的变化有显著的演化趋势:随着  $H/l$  增大,尺寸效应减弱,全局应力值呈下降趋势;当材料尺寸参数的影响减弱至无 ( $H/l = 10^7$ ) 时,两种模型的全局应力值趋向一致.这展现了随着  $H/l$  比值的增大,基于偶应

力模型逐渐向基于经典弹性模型的收敛过程。

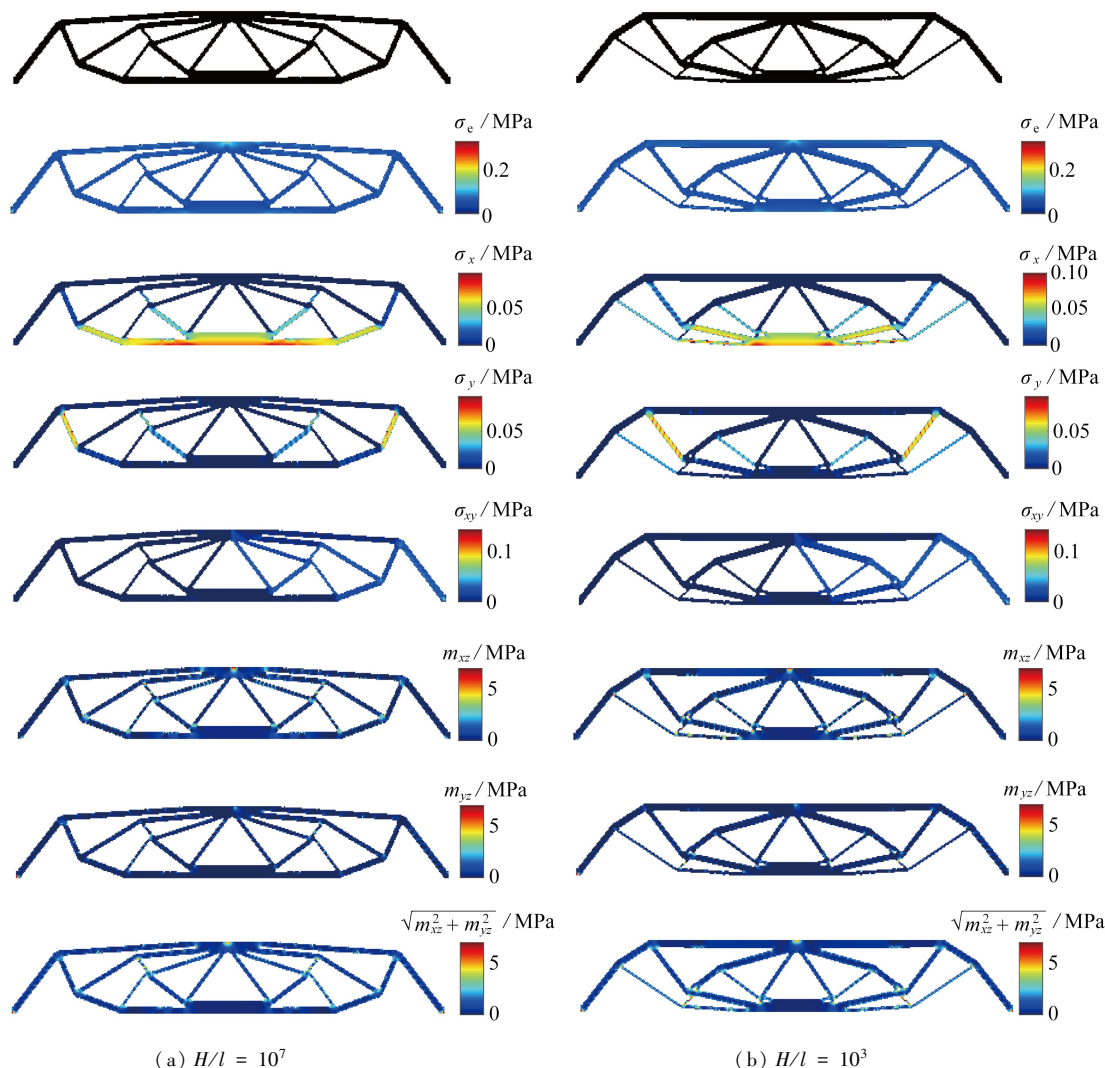


图 6 基于修正偶应力理论的应力最优拓扑结构及应力分量云图 ( $H/l = 10^7, 10^3$ )

Fig. 6 Stress optimization topology structures and stress component contours based on the couple stress theory ( $H/l = 10^7, 10^3$ )

### 3.2 附加参数对优化设计的影响

3.1 小节确定了基于修正偶应力理论的应力拓扑优化中存在尺寸效应后, 本小节旨在研究可能影响优化过程的其他参数。其中数值算例的  $H/l$  取值要求使得结构能表现出较强的尺寸效应。3.2.1 小节讨论应力范数  $p$  值对优化效果的影响, 3.2.2 小节探讨体积约束变化对应力优化的影响。这些研究为理解在尺寸效应背景下影响应力拓扑优化过程的各种因素提供了全面见解。

#### 3.2.1 L 型梁应力优化: 应力范数 $p$ 值的影响

目标函数全局应力  $\sigma_{pV}$  的计算方法为各单元等效应力的幂和, 选择合适的  $p$  值至关重要, 关系到优化结构中应力集中的问题。L 型梁设计域及边界条件如图 10 所示, 结构长  $L = 200 \text{ mm}$ , 高  $H = 200 \text{ mm}$ , 通过从右上端截去一个边长  $L' = 0.6L$  的方形, 从而实现 L 型几何结构。设计域内采用边长为  $h^e = 1 \text{ mm}$  的方形四节点单元用于 L 型梁的离散化。梁的顶端位移均被固定, 垂直载荷  $F = 0.5 \text{ N}$  分布在右上端部的 8 个节点上, 以避免应力集中。设置材料尺寸参数  $l$  为  $20 \text{ mm}$  ( $H/l = 10$ ), 此条件下结构尺寸效应显著。体积限制分数设置为 25%; 设计变量的过滤半径设置为有限元尺寸的 6 倍, 即  $r_{\min} = 6h^e$ , 灵敏度数的过滤半径设置为有限元尺寸的 4 倍, 即  $r_{\text{sen}} = 4h^e$ 。

图 11 呈现了当  $p$  范数值分别设定为 2, 4, 6 时, 应力优化的最优拓扑结构及其应力  $\sigma_e$  分布云图. 为便于比较, 图左列 (a)、(c)、(e) 展示了基于经典弹性理论优化的结构, 右列 (b)、(d)、(f) 则展示了采用修正偶应力模型优化的结构. 每个子图上标注了相应全局应力值  $\sigma_{PN}$  以及最大非经典等效应力值  $\sigma_e^{\max}$ . 分析结果揭示了以下观点: 首先, 高  $p$  值能有效降低全局应力值  $\sigma_{PN}$ , 促进应力分布均匀性, 并使全局应力值更接近最大非经典等效应力值. 其次, 在两种理论的比较方面, 不论  $p$  值如何, 修正偶应力理论下的应力值总是高于经典理论的应力值, 这一差异由偶应力项的额外贡献所致.

在讨论  $p$  取值情况时, 选择较高的  $p$  值有助于提升应力分布的均匀度, 并限制局部应力集中, 且使得全局应力能更准确地近似最大应力. 然而, 试验表明过大的  $p$  值会导致振荡和不光滑的数值结果. 因此, 最佳  $p$  值因具体应用场景而异, 合理选择  $p$  值十分关键, 应依据具体情况确定.

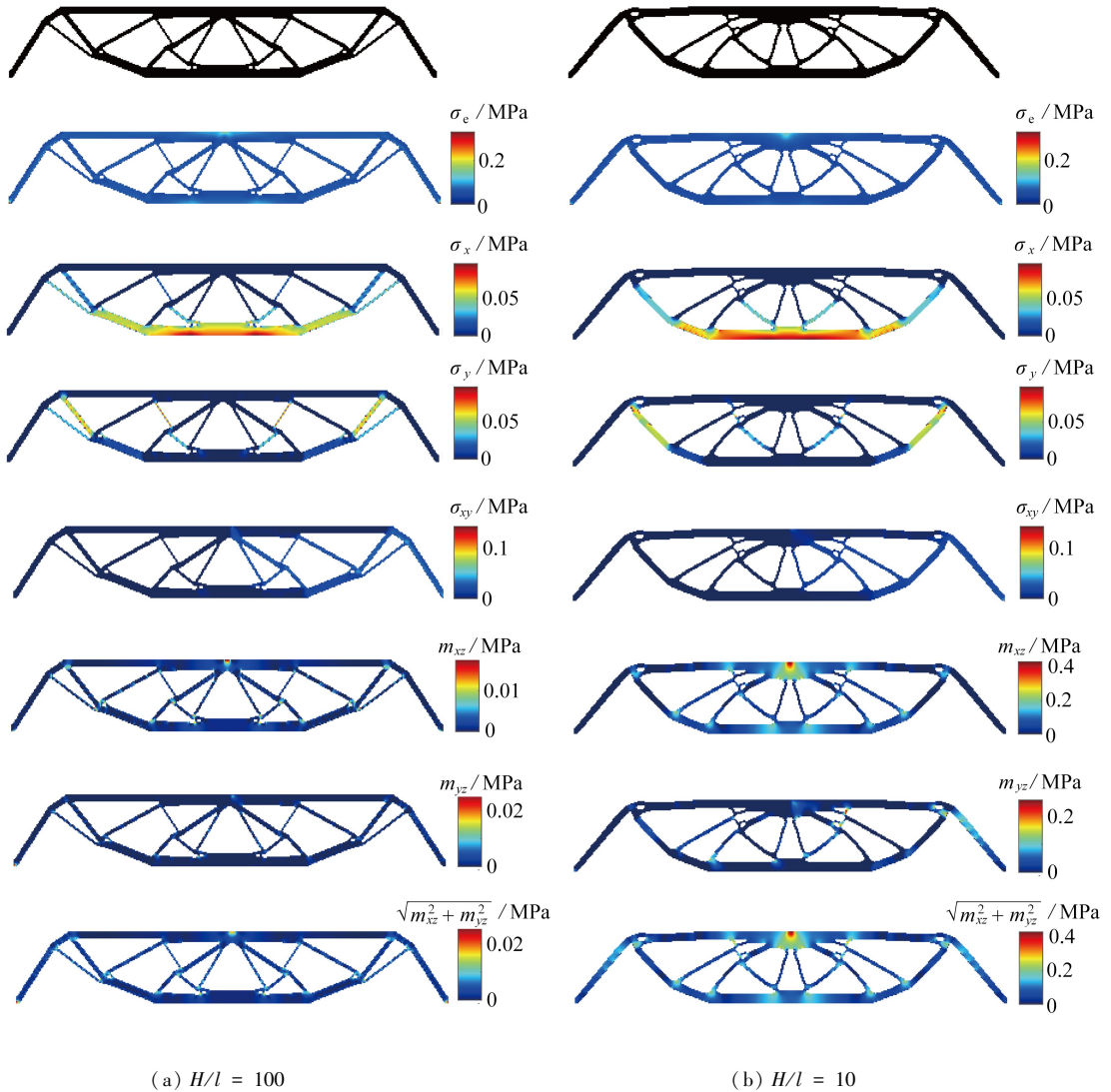
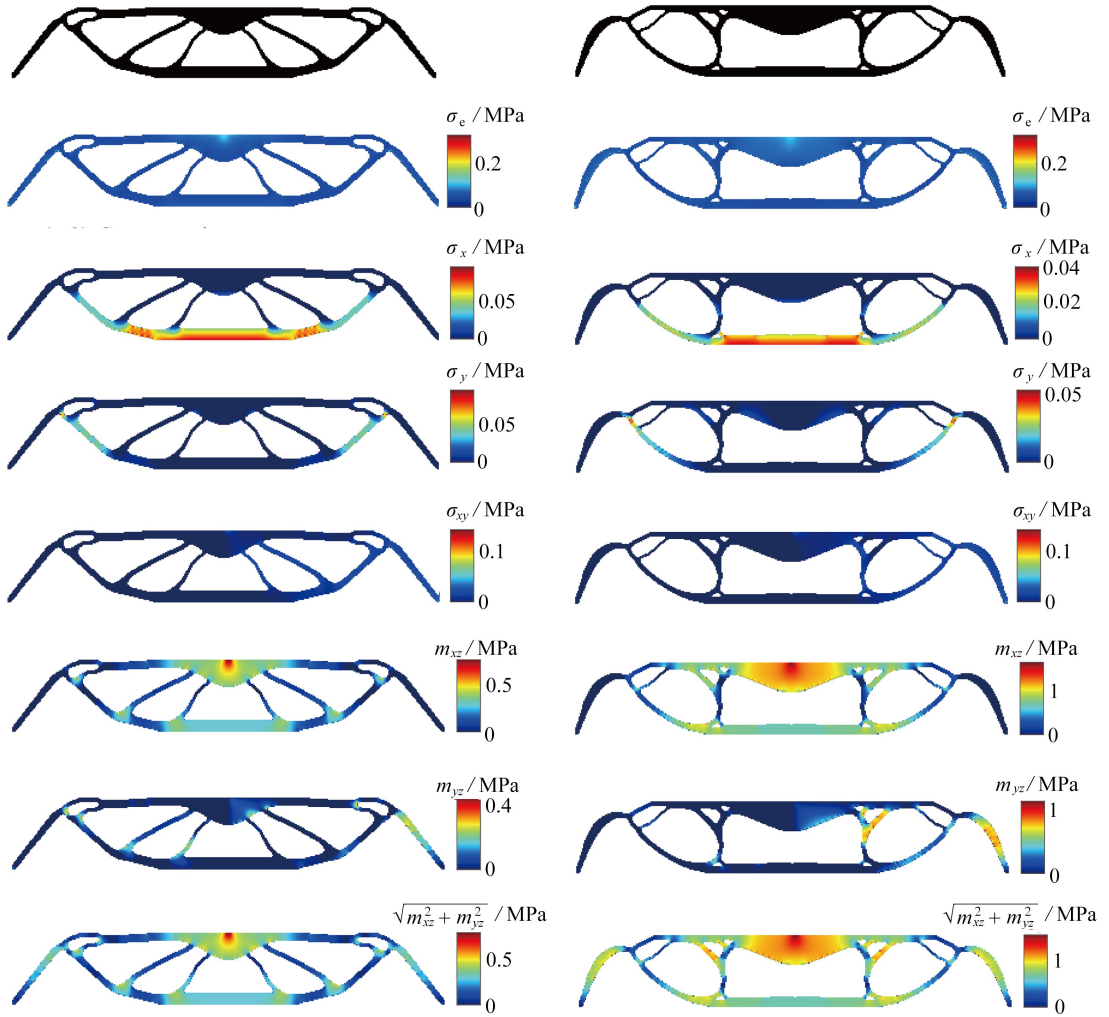


图 7 基于修正偶应力理论的应力最优拓扑结构及应力分量云图 ( $H/l = 100, 10$ )

Fig. 7 Stress optimization topology structures and stress component contours based on the couple stress theory ( $H/l = 100, 10$ )

### 3.2.2 悬臂结构的应力优化: 体积限制分数的影响

在 BESO 优化过程中, 材料体积分数  $V^*$  作为一个直接影响结构设计的关键约束条件, 确保最终设计在设计域内达到预定的固体材料比例, 从而影响结构的整体质量. 通过调节材料体积分数, 可以促进材料分布向更加均衡的方向发展, 这对于满足设计规范中的应力优化要求至关重要.



(a)  $H/l = 5$

(b)  $H/l = 2.5$

图 8 基于修正偶应力理论的应力最优拓扑结构及应力分量云图 ( $H/l = 5, 2.5$ )

Fig. 8 Stress optimization topology structures and stress component contours based on the couple stress theory ( $H/l = 5, 2.5$ )

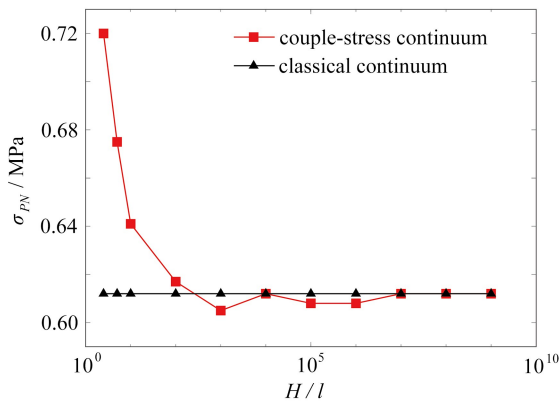


图 9  $\sigma_{PN}$  值随尺寸效应的演化: 偶应力优化模型与经典弹性优化模型比较

Fig. 9 Evolution of  $\sigma_{PN}$  vs. the size effect: comparison between the couple stress-based optimization model and the classical elasticity-based model



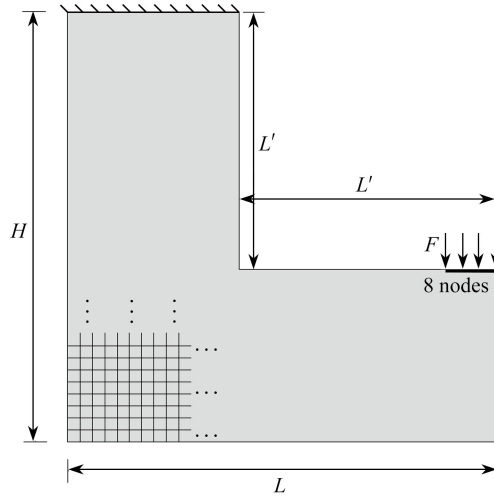
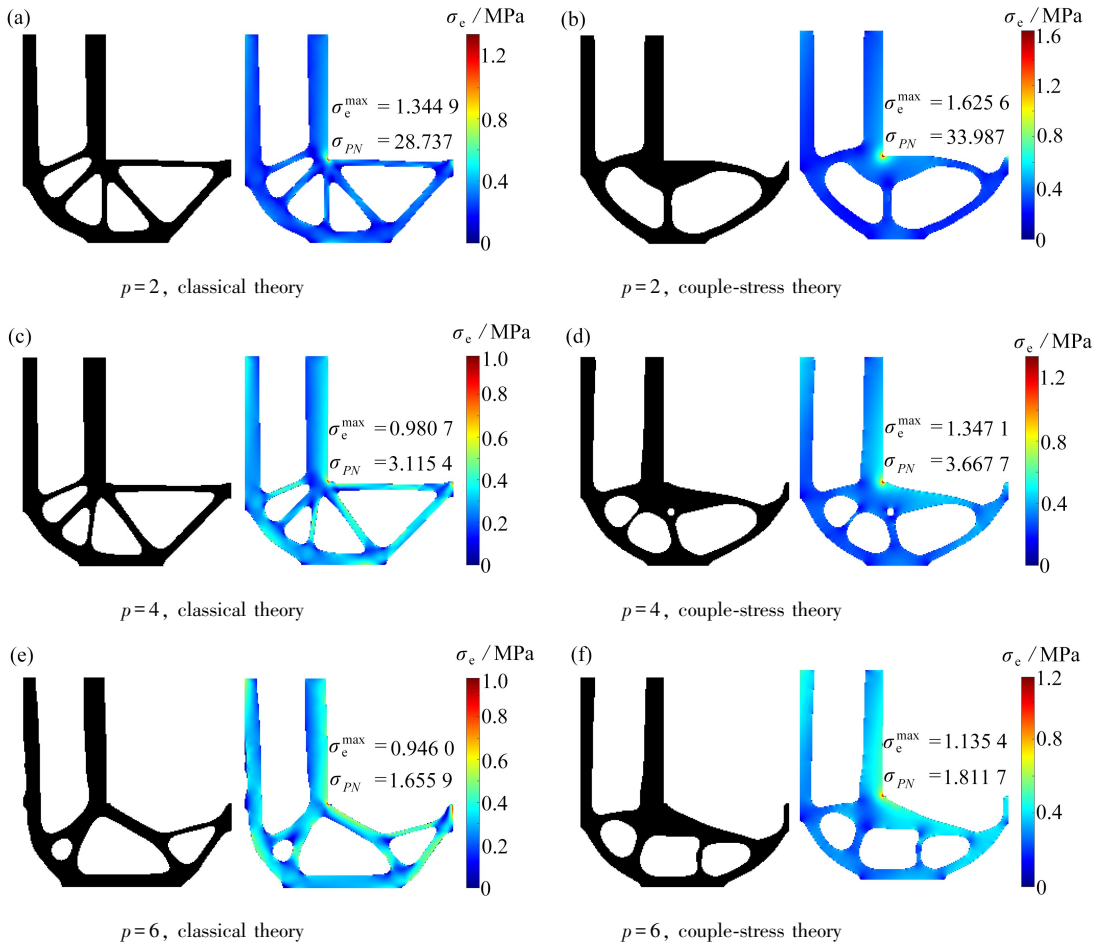


图 10 L型支架结构的设计域

Fig. 10 The design domain of the L-bracket structure

图 11 应力范数  $p$  值的影响: 应力优化结构设计和应力  $\sigma_e$  分布云图的比较Fig. 11 Influences of stress norm  $p$  values: comparison of stress-optimized structural designs and stress  $\sigma_e$  distribution contours

本例研究了受弯作用的悬臂梁结构,如图 12 所示,旨在探究不同材料体积分数  $V^*$  对优化设计的影响.结构模型长  $L = 200$  mm,高  $H = 100$  mm,设计域内采用  $200 \times 100$  的网格,使用边长为  $h^e = 1$  mm 的方形四节点单元进行悬臂梁的离散化.梁的左侧位移被固定,垂直载荷  $F = 0.5$  N 分布在右上端的 10 个节点上.设定应力



范数  $p$  值为 4; 材料尺寸参数  $l$  为 20 mm ( $H/l = 5$ ), 此条件下结构展现出显著的尺寸效应. 设计变量和灵敏度数的过滤半径均设置为有限单元尺寸的两倍.

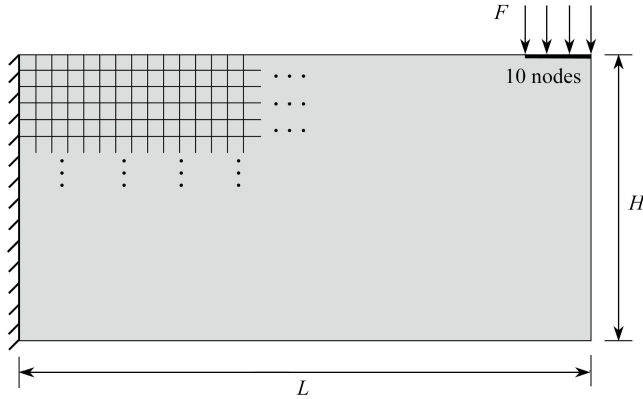
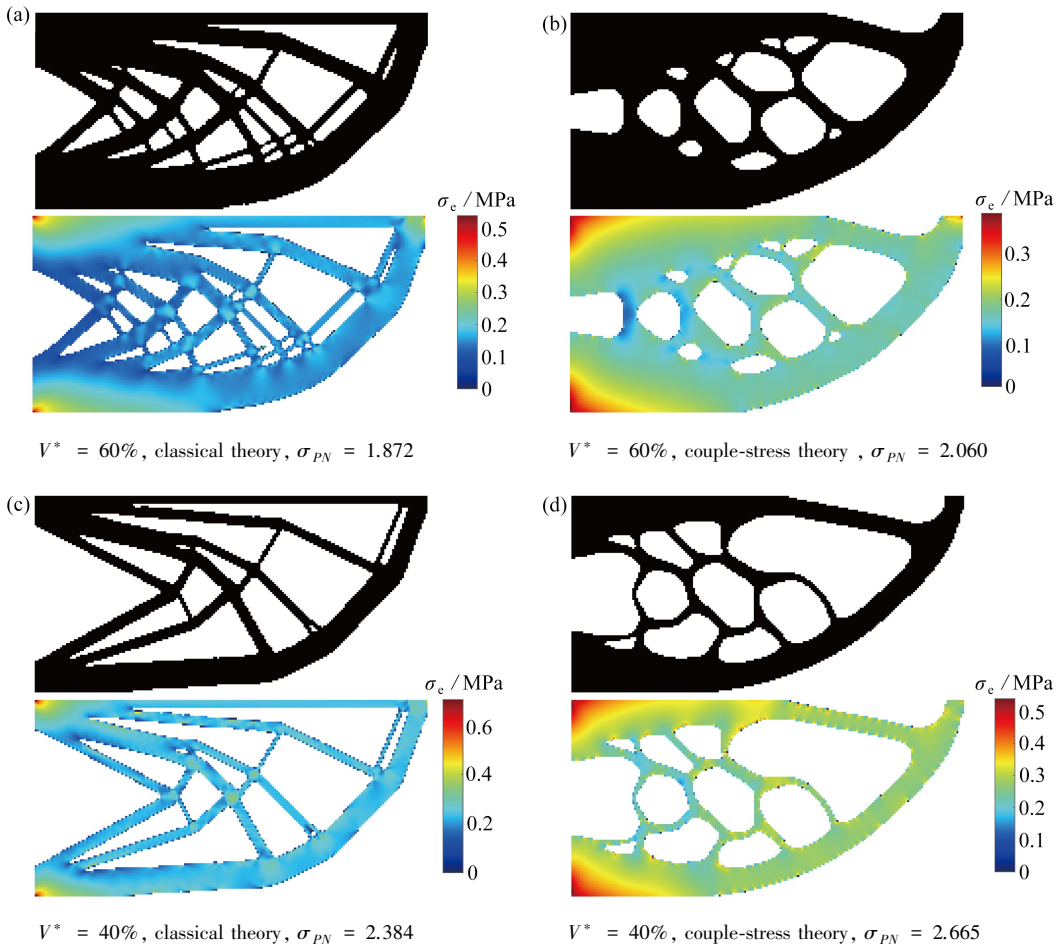


图 12 悬臂梁结构的设计域

Fig. 12 The design domain of the cantilever beam structure

图 13 展示了体积分数分别设置为 60%, 40%, 20% 时应力优化的最佳拓扑结构及其应力  $\sigma_e$  分布云图, 并对偶应力模型和经典弹性模型的优化结构设计进行了比较, 对应的全局应力值  $\sigma_{PN}$  见表 1. 观察到, 不论采用哪种理论, 优化后的结构均显示出圆形下框架的布局特征. 这种设计布局与施加的外部载荷条件有关, 其使得右下角附近的应力较弱. 进一步发现, 规定的材料体积分数直接影响优化结构设计的复杂度. 体积分数最低 (20%) 的结构仅包含两根加强肋, 同时应力水平也较高. 这一特殊情况 (20%) 在经典弹性模型和偶应力模型中均导致了最高的全局应力水平.



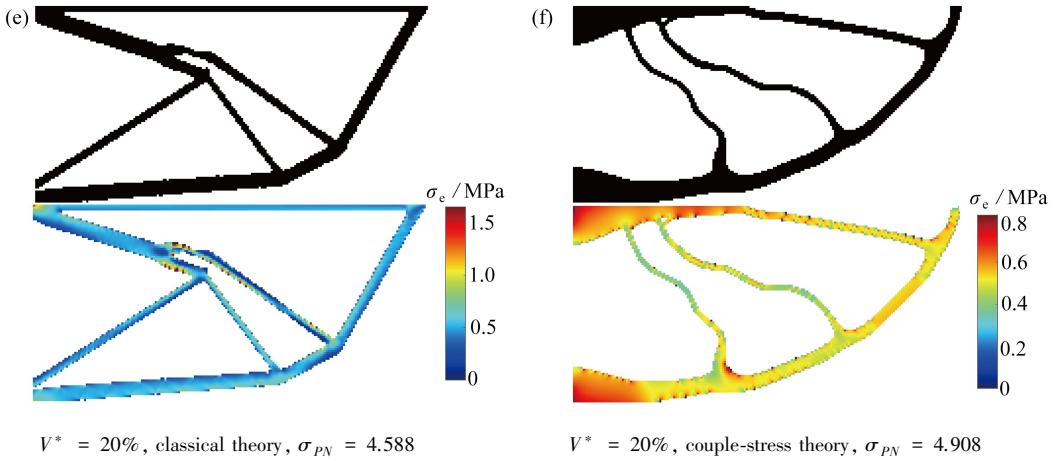


图 13 体积限制分数的影响:应力优化结构设计和应力  $\sigma_c$  分布云图的比较

Fig. 13 Influences of the volume fractions constraint: comparison of stress-optimized structural designs and stress  $\sigma_c$  distribution contours

这些发现强调了体积分数作为拓扑优化重要约束的作用.无论优化过程中使用哪种弹性理论模型,不同的材料体积分数选择都会影响最终结构的性能和应力分布,因此在满足设计目标的同时,应综合考虑选择适当的体积分数.

表 1 不同体积分数下的全局应力水平对比

Table 1 Comparison of global stress levels under different volume fractions

volume limitation $V^*$	classical theory-based $\sigma_{PN}$ /MPa	modified couple stress theory-based $\sigma_{PN}$ /MPa
60%	1.872	2.060
40%	2.384	2.665
20%	4.588	4.908

## 4 结 论

本文应用 BESO 方法在修正偶应力弹性理论的框架内进行应力优化,其新颖之处在于,建立了考虑偶应力贡献的非经典等效应力的新型公式,将其应用于基于应力的 BESO 技术中,并对  $p$  范数全局应力的灵敏度进行了分析.通过三种数值实例,研究了尺寸效应对应力优化过程和最终结构设计的影响,同时还探讨了范数  $p$  值和体积限制分数  $V^*$  的影响.数值测试算例验证了所提出优化方法的有效性及其处理尺寸效应问题的能力.通过此项研究,促进了 BESO 优化技术在偶应力理论背景下的发展,为尺寸相关的拓扑设计的实际应用提供了可能性.

此外,本研究的成果有望在国内自主研发的 CAE 软件中进行开发,对于推进尺寸相关的拓扑设计真正实现国产、自主、可控具有重大意义.目前包括 LiToSim<sup>[41-42]</sup> 在内的国产 CAE 软件企业正致力于相关技术的开发.未来,该技术有望在需要考虑尺寸效应的各种工程领域获得应用.例如,在设计高性能复合材料、航空航天和汽车工业中优化材料微结构,减少应力集中,提高材料耐久性和强度;在微电机系统中优化微结构以降低应力,提升设备可靠性和寿命;或在能量吸收材料中通过微结构优化提升冲击或压力下的能量吸收效率,增强安全性.

## 参考文献 (References):

- [1] BENDSØE M P, KIKUCHI N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1988, **71**(2): 197-224.
- [2] BENDSØE M P. Optimal shape design as a material distribution problem[J]. *Structural Optimization*, 1989, **1**(4): 193-202.
- [3] SIGMUND O. On the design of compliant mechanisms using topology optimization[J]. *Mechanics of Struc-*

- tures and Machines*, 1997, **25**(4): 493-524.
- [4] ROZVANY G I N. Topology optimization in structural mechanics[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2001, **21**(2): 89.
- [5] ROZVANY G I N. Aims, scope, methods, history and unified terminology of computer-aided topology optimization in structural mechanics[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2001, **21**(2): 90-108.
- [6] WALLIN M, TORTORELLI D A. Nonlinear homogenization for topology optimization[J]. *Mechanics of Materials*, 2020, **145**: 103324.
- [7] DBOUK T. A review about the engineering design of optimal heat transfer systems using topology optimization [J]. *Applied Thermal Engineering*, 2017, **112**: 841-854.
- [8] BRUNS T E. Topology optimization of convection-dominated, steady-state heat transfer problems[J]. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2007, **50**(15/16): 2859-2873.
- [9] DÜHRING M B, JENSEN J S, SIGMUND O. Acoustic design by topology optimization[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, **317**(3/5): 557-575.
- [10] WADBRO E, BERGGREN M. Topology optimization of an acoustic horn[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2006, **196**(1/3): 420-436.
- [11] DESAI J, FAURE A, MICHAILIDIS G, et al. Topology optimization in acoustics and elasto-acoustics via a level-set method[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2018, **420**: 73-103.
- [12] MINIACI M, KRUSHYNSKA A, GLIOZZI A S, et al. Design and fabrication of bioinspired hierarchical dissipative elastic metamaterials[J]. *Physical Review Applied*, 2018, **10**(2): 024012.
- [13] MAZZOTTI M, FOEHR A, BILAL O R, et al. Bio-inspired non self-similar hierarchical elastic metamaterials [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2023, **241**: 107915.
- [14] ERINGEN A. *Microcontinuum Field Theories, I: Foundations and Solids*[M]. New York: Springer, 2012.
- [15] COSSERAT E, COSSERAT F. *Theorie des corps d'edormables*[Z]. Cornell University Library Historical Math Monographs, 1909.
- [16] REDA H, ALAVI S E, NASIMSOBHAN M, et al. Homogenization towards chiral Cosserat continua and applications to enhanced Timoshenko beam theories[J]. *Mechanics of Materials*, 2021, **155**: 103728.
- [17] ERINGEN A C, SUHUBI E S. Nonlinear theory of simple micro-elastic solids, I [J]. *International Journal of Engineering Science*, 1964, **2**(2): 189-203.
- [18] MINDLIN R D, TIERSTEN H F. Effects of couple-stresses in linear elasticity[J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1962, **11**(1): 415-448.
- [19] TOUPIN R A. Elastic materials with couple-stresses[J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1962, **11**(1): 385-414.
- [20] LAI P, CONG Y, GU S, et al. Size-dependent parametrisation of active vibration control for periodic piezoelectric microplate coupled systems: a couple stress-based isogeometric approach[J]. *Mechanics of Materials*, 2023, **186**: 104788.
- [21] YANG F, CHONG A C M, LAM D C C, et al. Couple stress based strain gradient theory for elasticity[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2002, **39**(10): 2731-2743.
- [22] ROVATI M, VEBER D. Optimal topologies for micropolar solids[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2007, **33**(1): 47-59.
- [23] LIU S, SU W. Topology optimization of couple-stress material structures[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2010, **40**(1): 319-327.
- [24] SU W, LIU S. Topology design for maximization of fundamental frequency of couple-stress continuum[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2016, **53**(3): 395-408.
- [25] GANGHOFFER J F, GODA I, NOVOTNY A A, et al. Homogenized couple stress model of optimal auxetic microstructures computed by topology optimization[J]. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **98**(5): 696-717.
- [26] CHEN W, HUANG X. Topological design of 3D chiral metamaterials based on couple-stress homogenization [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2019, **131**: 372-386.

- [27] YANG R J, CHEN C J. Stress-based topology optimization[J]. *Structural Optimization*, 1996, **12**(2): 98-105.
- [28] ROZVANY G I N. On design-dependent constraints and singular topologies[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2001, **21**(2): 164-172.
- [29] DUYSINX P, SIGMUND O. New developments in handling stress constraints in optimal material distribution [C]//7th AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization. St Louis, MO, USA, 1998. DOI:10.2514/6.1998-4906.
- [30] BRUGGI M. On an alternative approach to stress constraints relaxation in topology optimization[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2008, **36**(2): 125-141.
- [31] LUO Y, WANG M Y, KANG Z. An enhanced aggregation method for topology optimization with local stress constraints[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2013, **254**: 31-41.
- [32] PICELLI R, TOWNSEND S, BRAMPTON C, et al. Stress-based shape and topology optimization with the level set method[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2018, **329**: 1-23.
- [33] HUANG X, XIE Y M. Convergent and mesh-independent solutions for the bi-directional evolutionary structural optimization method[J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2007, **43**(14): 1039-1049.
- [34] XIA L, ZHANG L, XIA Q, et al. Stress-based topology optimization using bi-directional evolutionary structural optimization method[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2018, **333**: 356-370.
- [35] FAN Z, XIA L, LAI W, et al. Evolutionary topology optimization of continuum structures with stress constraints[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2019, **59**(2): 647-658.
- [36] ADACHI T, TOMITA Y, TANAKA M. Computational simulation of deformation behavior of 2D-lattice continuum[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 1998, **40**(9): 857-866.
- [37] LE C, NORATO J, BRUNS T, et al. Stress-based topology optimization for continua[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2010, **41**(4): 605-620.
- [38] DUYSINX P, BENDSØE M P. Topology optimization of continuum structures with local stress constraints[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1998, **43**(8): 1453-1478.
- [39] KAHROBAIYAN M H, RAHAEIFARD M, AHMADIAN M T. A size-dependent yield criterion[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2014, **74**: 151-161.
- [40] SIGMUND O. A 99 line topology optimization code written in Matlab[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2001, **21**(2): 120-127.
- [41] 彭梦瑶, 顾水涛, 周洋靖, 等. 基于 LiToSim 平台的疲劳寿命评估 LtsFatigue 软件开发及应用[J]. 应用数学和力学, 2022, **43**(9): 976-986.(PENG Mengyao, GU Shuitao, ZHOU Yangjing, et al. Development and application of fatigue life evaluation software LtsFatigue based on LiToSim[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(9): 976-986.(in Chinese))
- [42] 叶彦鹏, 顾水涛, 刘敏, 等. 基于 LiToSim 平台的海上风机过渡段优化软件开发[J]. 应用数学和力学, 2021, **42**(5): 441-451.(YE Yanpeng, GU Shuitao, LIU Min, et al. Optimization software development for offshore turbine transition structures based on LiToSim[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, **42**(5): 441-451.(in Chinese))