

# 基于动力刚度理论和 Wittrick-Williams 算法的多段梁点阵色散研究\*

彭长清, 刘金兴

(江苏大学 土木工程与力学学院, 江苏 镇江 212013)

**摘要:** 基于动力刚度法(DSM)表述了多段梁(MSB)点阵的动态响应,进而利用 Wittrick-Williams(WW)算法计算其各阶固有频率.首先,根据 MSB 内部节点处的位移与应力连续条件,以分块矩阵组装的形式得到了 MSB 的动力刚度矩阵.利用这种方法获得的 MSB 动力刚度矩阵仍然是两节点式,并不会增大刚度矩阵的维度.WW 算法与动力刚度矩阵的结合可以精确求解点阵的各阶固有频率.针对 MSB 点阵的周期性胞元,在原始动力刚度矩阵中考虑 Floquet 边界条件,再采取 WW 算法并最终得到了相应点阵的色散曲线.在不可约 Brillouin 区内,利用该法算得的色散曲线与基于 COMSOL 仿真的结果相比,两者误差在 6% 以内,验证了所建方法的可行性.进而系统研究了微观几何和材料参数对色散曲线的影响规律,结果表明使用 MSB 搭建点阵是调节点阵色散特性的有效方法.

**关键词:** 动力刚度法; Wittrick-Williams 算法; Floquet 边界条件; 多段梁点阵; 色散曲线

**中图分类号:** O32      **文献标志码:** A      **DOI:** 10.21656/1000-0887.450043

## Research on Dispersion Characteristics of Multi-Segment Beam Lattices Based on the Dynamic Stiffness Theory and the Wittrick-Williams Algorithm

PENG Changqing, LIU Jinxing

(Faculty of Civil Engineering and Mechanics, Jiangsu University,  
Zhenjiang, Jiangsu 212013, P.R.China)

**Abstract:** The dynamic stiffness method (DSM) was employed to describe dynamic responses of periodic lattices composed of multi-segment beams (MSBs), and the dispersion characteristics were examined based on the Wittrick-Williams algorithm (WWA). First, the dynamic stiffness matrix of the MSB was obtained with the continuity conditions in terms of displacements and stresses at inner joints. The obtained dynamic stiffness matrix in nature remains a 2-node type element, and has the same dimensions as those of a 2-node homogeneous beam. The combination of the DSM and the WWA enables the accurate calculation of natural frequencies of the lattice. As for a periodic unit cell of the MSB lattice, the Floquet boundary condition was introduced into the initial DSM, and then dispersion curves and natural frequencies can be obtained with the WWA. In the irreducible Brillouin zone, results obtained with the proposed method agree reasonably well with those by software

\* 收稿日期: 2024-02-22; 修订日期: 2024-03-18

基金项目: 国家自然科学基金(11972174)

作者简介: 彭长清(1998—),男,硕士生(E-mail: changqing9810@163.com);

刘金兴(1979—),男,教授(通讯作者. E-mail: jxliu@mails.ucas.ac.cn).

引用格式: 彭长清, 刘金兴. 基于动力刚度理论和 Wittrick-Williams 算法的多段梁点阵色散研究[J]. 应用数学和力学, 2025, 46(2): 154-164.

COMSOL, with errors no larger than 6%, which verifies the effectiveness of the proposed method. Furthermore, the effects of microscopic geometric and material parameters on lattice dispersion curves were studied. The results show that, the MSB makes an effective way to adjust dispersion characteristics of lattices by building periodic lattices.

**Key words:** dynamic stiffness method; Wittrick-Williams algorithm; Floquet boundary condition; multi-segment beam lattice; dispersion curves

## 0 引 言

点阵材料是一类具有周期性结构的材料,其特点在于微观单元的周期性排列,常见的点阵包括六边形点阵<sup>[1-2]</sup>、四边形点阵<sup>[3-4]</sup>、重入式点阵<sup>[5-6]</sup>。这些点阵材料的振动行为受到点阵频率依赖性的影响,即其性质与频率之间存在密切关系。色散曲线提供了一种可视化工具,反映了波随频率变化时在点阵材料中的传播特性,为我们深入了解结构的频率-波数关系提供了关键信息。

针对点阵色散曲线的调控一直是研究的重点方向,已有的调控方式包括变截面梁调控<sup>[7-8]</sup>、预应力调控<sup>[9]</sup>、嵌入质量调控<sup>[10]</sup>等。Liu 等<sup>[11]</sup>提出的多段梁(MSB)为我们提供了新的方向,即在点阵中引入 MSB,通过改变其几何参数和材料属性来达到对点阵色散曲线调控的目的。

An 等<sup>[7]</sup>和 Liu 等<sup>[12]</sup>以数值模拟的方式得到了点阵材料的色散曲线。Karličić 等<sup>[9]</sup>通过引入 Floquet 边界条件,将色散曲线转换为求解不同波长下结构刚度矩阵特征值的问题,并分析了预应力、集中质量、弹性介质刚度对色散曲线的影响。Wang 等<sup>[13-14]</sup>通过修正位移场的 Taylor 展开系数,建立了波长相关的应变梯度连续介质模型,预测了双原子点阵材料的色散特性。Wang 等<sup>[15]</sup>基于 Padé 近似方法,建立了二维点阵材料的应变梯度连续介质模型,以预测其声学色散特性。杨访<sup>[16]</sup>通过动态有限元法(DFEM)与 WW 算法<sup>[17-20]</sup>的结合使得数值求解点阵固有频率成为可能,但这种方法的求解精度依赖于网格的划分。周平<sup>[21]</sup>和 Liu 等<sup>[22]</sup>采用动力刚度法(DSM)替换 DFEM,使得求解点阵色散曲线不再依赖于网格的划分。

本文首先以分块矩阵组装的形式得到了 MSB 的刚度矩阵,随后在整体刚度矩阵中引入 Floquet 边界条件,然后通过二分法与 WW 算法的结合,求解得到了 MSB 点阵的固有频率。通过与 FEM 结果的对比,验证了 MSB 组装及点阵色散曲线求解的正确性。最后系统地分析了 MSB 的各项参数对色散曲线的影响。

## 1 MSB 的动力刚度矩阵

刚度矩阵能够直观而准确地描绘出梁受力与节点位移之间的紧密关系。静力刚度矩阵  $\mathbf{K}$  在梁单元的研究中有着重要的作用,然而在实际工程中,梁结构常常承受动态载荷。因此,对于梁单元动力刚度矩阵的深入研究变得至关重要。在 DFEM 中,梁单元的动力刚度矩阵  $\mathbf{K}_{\text{FEM}}(\omega)$  可以通过静力刚度矩阵  $\mathbf{K}$  与质量矩阵  $\mathbf{M}$  的组合得到。 $\mathbf{K}_{\text{FEM}}(\omega)$  在低频范围内能够有效地揭示梁单元的动态性能。然而,在中高频段,精确获取梁单元的动态性能需要依赖网格的精细划分。随着网格的加密,计算时间也势必增长。为解决这一问题,研究人员提出了基于梁单元的运动控制方程和边界条件的 DSM。通过这种方法,可以得到梁单元的精确动力刚度矩阵  $\mathbf{K}_D(\omega)$ 。 $\mathbf{K}_D(\omega)$  能够在高频段准确地捕捉梁单元的动态性能,而无需过度依赖网格划分,从而提升计算效率。

### 1.1 DSM

Euler-Bernoulli 梁的轴向振动控制方程为

$$EA \left( 1 + \zeta_k \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_a \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

拉压内力为

$$N(x) = EA \left( 1 + \zeta_k \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2)$$

横向振动的控制方程为

$$EI\left(1 + \zeta_k \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c_b \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \quad (3)$$

弯曲内力为

$$\begin{cases} M(x) = EI\left(1 + \zeta_k \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ V(x) = -EI\left(1 + \zeta_k \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}, \end{cases} \quad (4)$$

式中  $E$  为材料的弹性模量,  $A$  为梁的横截面面积,  $\rho$  为材料的密度,  $\xi_k$  为与质量相关的阻尼系数,  $c_a$  为轴向振动中与速度相关的阻尼系数,  $c_b$  为弯曲振动中与速度相关的阻尼系数,  $I$  为梁的横截面惯性矩,  $l$  为梁的长度.

通过将谐波位移解  $u(x, t) = U(x)e^{i\omega t}$  和  $w(x, t) = W(x)e^{i\omega t}$  分别代入轴向和横向振动控制微分方程, 将得到的含有待定参数的解与边界条件结合消去待定系数, 最终得到梁单元的动力刚度矩阵  $\mathbf{K}_D(\omega)$  [23]:

$$\mathbf{K}_D(\omega) = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & d_3 & d_4 & 0 & d_6 & d_7 \\ 0 & d_4 & d_5 & 0 & -d_7 & d_8 \\ d_2 & 0 & 0 & d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_6 & -d_7 & 0 & d_3 & -d_4 \\ 0 & d_7 & d_8 & 0 & -d_4 & d_5 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

其中

$$\begin{cases} d_1 = EA(1 + i\omega\zeta_k)k_a \cot(k_a)/l, & d_2 = -EA(1 + i\omega\zeta_k)k_a \csc(k_a)/l, \\ d_3 = R_3(cS + sC)/\delta, & d_4 = R_2sS/\delta, \\ d_5 = R_1(sC - cS)/\delta, & d_6 = -R_3(s + S)/\delta, \\ d_7 = R_2(C - c)/\delta, & d_8 = R_1(S - s)/\delta, \\ R_j = EI(k_b/L)^j, & j = 1, 2, 3, \\ \delta = 1 - cC, & \zeta_{mb} = \frac{c_b}{\rho A}, \quad \zeta_{ma} = \frac{c_a}{\rho A}, \\ s = \sin(k_b), & c = \cos(k_b), \quad S = \sinh(k_b), \quad C = \cosh(k_b), \\ k_b^4 = \frac{(\rho A\omega^2 - i\omega c_b)L^4}{EI(1 + i\omega\zeta_k)} = \frac{\rho A\omega^2 L^4(1 - i\zeta_{mb}/\omega)}{EI(1 + i\omega\zeta_k)}, \\ k_a^2 = \frac{(\rho A\omega^2 - i\omega c_a)L^2}{EA(1 + i\omega\zeta_k)} = \frac{\rho\omega^2 L^2(1 - i\zeta_{ma}/\omega)}{E(1 + i\omega\zeta_k)}. \end{cases} \quad (6)$$

DSM 中的形函数本质上是梁单元的控制微分方程在频域导出的精确通解, 由于不涉及基于控制微分方程的近似, 不需要进行离散化, 避免了质量矩阵  $\mathbf{M}$  的出现. DSM 得到的动力刚度矩阵  $\mathbf{K}_D(\omega)$  在频率趋近于 0 时将收敛于静力刚度矩阵  $\mathbf{K}$ , 且在任意频率范围均可准确地捕捉梁的动力性能. 在本研究中不考虑阻尼的影响, 即  $\xi_k, c_a, c_b$  均取 0.

## 1.2 MSB 刚度矩阵的组装

等截面梁点阵材料在进行设计时提供的参数有限, Liu 等 [11] 的研究中引入了 MSB 的概念, 为点阵材料的设计提供了新的方向. 在 MSB 的设计中, 长度比、宽度比以及材料属性等多种参数都会对点阵材料产生影响. 为了深入研究这些参数对点阵材料的影响, 首要目标是推导 MSB 的动力刚度矩阵.

首先, 在不深入研究 MSB 所包含的各个节段具体表达式的情况下, 我们以分块矩阵的形式导出了双节段三段梁动力刚度矩阵. 在图 1(a) 所示的三段式梁单元中, 当节点  $i$  和  $l$  受到广义外力时, 两个节点的力与位移的关系可表示为

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{il} = \mathbf{K}_i \mathbf{r}_{il}, \\ \mathbf{F}_{il} = \{Q_i \ N_i \ M_i \ Q_l \ N_l \ M_l\}^T, \\ \mathbf{r}_{il} = \{u_i \ v_i \ \varphi_i \ u_l \ v_l \ \varphi_l\}^T, \end{cases} \quad (8)$$

其中  $\mathbf{K}_i$  是三段梁的刚度矩阵, 是一个  $6 \times 6$  的对称矩阵;  $\mathbf{F}_{il}$  和  $\mathbf{r}_{il}$  分别是节点力和位移列向量。

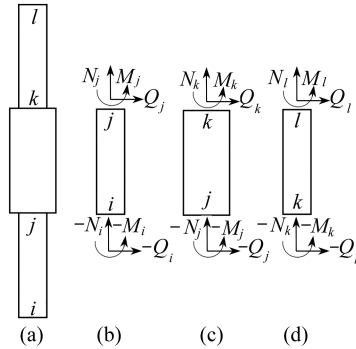


图 1 三段梁模型以及各个分段的受力情况

Fig. 1 The 3-segment beam and the forces on each segment

类似地, 对于图 1(b)、1(c)、1(d) 中的各个分段, 节点力和位移之间的关系可以分别用各分段的刚度矩阵表示:

$$\begin{aligned} & i-j: \\ & \begin{cases} \mathbf{F}_{ij} = \mathbf{M}^{ij} \mathbf{r}_{ij}, \\ \mathbf{F}_{ij} = \{N_i \ Q_i \ M_i \ N_j \ Q_j \ M_j\}^T, \\ \mathbf{r}_{ij} = \{u_i \ w_i \ \varphi_i \ u_j \ w_j \ \varphi_j\}^T; \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & j-k: \\ & \begin{cases} \mathbf{F}_{jk} = \mathbf{M}^{jk} \mathbf{r}_{jk}, \\ \mathbf{F}_{jk} = \{N_j \ Q_j \ M_j \ N_k \ Q_k \ M_k\}^T, \\ \mathbf{r}_{jk} = \{u_j \ w_j \ \varphi_j \ u_k \ w_k \ \varphi_k\}^T; \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & k-l: \\ & \begin{cases} \mathbf{F}_{kl} = \mathbf{M}^{kl} \mathbf{r}_{kl}, \\ \mathbf{F}_{kl} = \{N_k \ Q_k \ M_k \ N_l \ Q_l \ M_l\}^T, \\ \mathbf{r}_{kl} = \{u_k \ w_k \ \varphi_k \ u_l \ w_l \ \varphi_l\}^T, \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

式中  $\mathbf{M}^{ij}, \mathbf{M}^{jk}, \mathbf{M}^{kl}$  分别为  $i-j, j-k, k-l$  段的刚度矩阵. 同时对矩阵进行分块处理, 以  $3 \times 3$  的子矩阵  $\mathbf{M}^{\text{I}}, \mathbf{M}^{\text{II}}, \mathbf{M}^{\text{III}}$  分别代表  $\mathbf{M}^{ij}$  的左上矩阵、右上矩阵和右下矩阵. 对  $\mathbf{M}^{jk}$  和  $\mathbf{M}^{kl}$  也进行同样的分块处理. 节点力与位移之间的关系可以用这些子矩阵表示为

$$\begin{Bmatrix} Q_i \\ N_i \\ M_i \end{Bmatrix} = \mathbf{M}^{\text{I}} \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ \varphi_i \end{Bmatrix} + \mathbf{M}^{\text{II}} \begin{Bmatrix} u_j \\ w_j \\ \varphi_j \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} Q_j \\ N_j \\ M_j \end{Bmatrix} = (\mathbf{M}^{\text{II}})^T \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ \varphi_i \end{Bmatrix} + \mathbf{M}^{\text{III}} \begin{Bmatrix} u_j \\ w_j \\ \varphi_j \end{Bmatrix}, \quad (12a)$$

$$- \begin{Bmatrix} Q_j \\ N_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \mathbf{M}^{\text{I}} \begin{Bmatrix} u_j \\ w_j \\ \varphi_j \end{Bmatrix} + \mathbf{M}^{\text{II}} \begin{Bmatrix} u_k \\ w_k \\ \varphi_k \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} Q_k \\ N_k \\ M_k \end{Bmatrix} = (\mathbf{M}^{\text{II}})^T \begin{Bmatrix} u_j \\ w_j \\ \varphi_j \end{Bmatrix} + \mathbf{M}^{\text{III}} \begin{Bmatrix} u_k \\ w_k \\ \varphi_k \end{Bmatrix}, \quad (12b)$$

$$- \begin{Bmatrix} Q_k \\ N_k \\ M_k \end{Bmatrix} = \mathbf{M}^{\text{I}} \begin{Bmatrix} u_k \\ w_k \\ \varphi_k \end{Bmatrix} + \mathbf{M}^{\text{II}} \begin{Bmatrix} u_l \\ w_l \\ \varphi_l \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} Q_l \\ N_l \\ M_l \end{Bmatrix} = (\mathbf{M}^{\text{II}})^T \begin{Bmatrix} u_k \\ w_k \\ \varphi_k \end{Bmatrix} + \mathbf{M}^{\text{III}} \begin{Bmatrix} u_l \\ w_l \\ \varphi_l \end{Bmatrix}. \quad (12c)$$

进一步,可以找出内部节点与外部节点位移之间的关系:

$$\begin{cases} (\mathbf{M}_I^{jk} + \mathbf{M}_{III}^{ij}) \begin{Bmatrix} u_j \\ w_j \\ \varphi_j \end{Bmatrix} + \mathbf{M}_{II}^{jk} \begin{Bmatrix} u_k \\ w_k \\ \varphi_k \end{Bmatrix} = -(\mathbf{M}_{II}^{ij})^T \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ \varphi_i \end{Bmatrix}, \\ (\mathbf{M}_{II}^{jk})^T \begin{Bmatrix} u_j \\ w_j \\ \varphi_j \end{Bmatrix} + (\mathbf{M}_{III}^{jk} + \mathbf{M}_I^{kl}) \begin{Bmatrix} u_k \\ w_k \\ \varphi_k \end{Bmatrix} = -\mathbf{M}_{II}^{kl} \begin{Bmatrix} u_l \\ w_l \\ \varphi_l \end{Bmatrix}. \end{cases} \quad (13)$$

以矩阵的形式可以表示为

$$\begin{cases} \mathbf{r}_{jk} = \mathbf{R} \mathbf{r}_{kl}, \\ \mathbf{R} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{M}_I^{jk} + \mathbf{M}_{III}^{ij} & \mathbf{M}_{II}^{jk} \\ (\mathbf{M}_{II}^{jk})^T & \mathbf{M}_{III}^{jk} + \mathbf{M}_I^{kl} \end{bmatrix}}_A^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} -(\mathbf{M}_{II}^{ij})^T & 0 \\ 0 & -\mathbf{M}_{II}^{kl} \end{bmatrix}}_B. \end{cases} \quad (14)$$

对矩阵  $\mathbf{R}$  以相同的方式进行划分,得到  $\mathbf{R}_I, \mathbf{R}_{II}, \mathbf{R}_{III}$ .将式(14)代入到式(12)中,经过简单的矩阵运算最终可以得到用各个分段的刚度矩阵表达的三段梁刚度矩阵:

$$\mathbf{K}_I = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_I^{ij} + \mathbf{M}_{II}^{ij} \mathbf{R}_I & \mathbf{M}_{II}^{ij} \mathbf{R}_{II} \\ \text{sym} & (\mathbf{M}_{II}^{kl})^T \mathbf{R}_{III} + \mathbf{M}_{III}^{kl} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

以这种方式组装得到的三段梁刚度矩阵  $\mathbf{K}_I$  是一个  $6 \times 6$  的对称矩阵,相较于 FEM 中的刚度矩阵组装,极大地降低了刚度矩阵的维度.针对这一组装方式正确性的验证将在后文中进行.

## 2 MSB 点阵的色散曲线

结构的色散曲线是反映波在结构中传播形式的重要特性. Floquet 边界条件考虑了波的周期性与结构周期性之间的关系,而 WW 算法则是一种用于数值求解结构固有频率的方法.基于波的传播特性, Floquet 边界条件和 WW 算法的新型组合为点阵色散曲线的求解提供了创新性的研究途径.

这种方法为点阵材料色散曲线的求解提供了全新的工具和视角,为深入理解结构中波传播铺平了道路.通过综合考虑周期性结构的波动特性,我们能够更全面地探索结构的色散曲线,从而为结构工程和波动控制领域的未来研究提供有益的理论支持,为解决结构波动问题 and 提高波动控制效能提供了新的可能性.

### 2.1 WW 算法

Wittrick 和 Williams 提出的 WW 算法<sup>[17]</sup>是一种基于结构动力刚度矩阵的数值方法,用于高精度求解结构单元的固有频率.该算法的求解精度直接受动力刚度矩阵准确性的影响,并且 DSM 提供的动力刚度矩阵为精确地计算结构的固有频率提供了新的方法.

值得注意的是, WW 算法并非直接求解固有频率,而是一种用于统计结构中所有固有频率中低于给定频率  $\omega^*$  的固有频率个数  $J$  的计数方法:

$$J = J_0(\omega^*) + J_K(\omega^*), \quad (16)$$

其中  $J_0(\omega^*)$  是结构所有子单元的固有频率中低于  $\omega^*$  的数量,  $J_K(\omega^*)$  是频率为  $\omega^*$  时,采用 Gauss 消元法将结构的整体刚度矩阵  $\mathbf{K}(\omega^*)$  转化为上三角矩阵  $\mathbf{K}^+(\omega^*)$  后,矩阵  $\mathbf{K}^+(\omega^*)$  主对角线中负元素的个数.

通过将 WW 算法与二分法结合,找出  $J$  发生改变的频率点,便可以得到结构的固有频率.例如,设定求解结构的  $m$  阶固有频率  $\omega_m$ ,通过二分法不断调整上限  $\omega_l$  和下限  $\omega_d$ ,满足

$$J(\omega_l) \geq m, J(\omega_d) \leq m - 1, \omega_l - \omega_d \leq \varepsilon_{\text{tool}}, \quad (17)$$

即可得到结构在误差范围为  $\varepsilon_{\text{tool}}$  的情况下的第  $m$  阶固有频率  $\omega_m$ .

### 2.2 Floquet 边界条件

周期性点阵材料可被视为原始单元格在点阵空间中沿着一组基矢  $(e_1, e_2)$  移动平铺所得.基于 Bloch 定理的 Floquet 边界条件<sup>[22]</sup>阐明了周期性结构中,波动的表达方式可通过平面波来描述.这一边界条件确保了

波函数在点阵周期内保持平滑和一致.通过引入 Floquet 边界条件,我们能够对周期性点阵材料中波的传播进行建模,从而更深入地理解点阵结构中的波动特性.这种方法为研究周期性点阵中的波动行为提供了一种坚实且实用的框架.

根据 Bloch 定理,  $(m, n)$  位置的单元格中  $j_{th}$  点的波动可以表示为

$$\mathbf{q}_r = \mathbf{q}_{r_j} e^{k(r-r_j)} = \mathbf{q}_{r_j} e^{mk_1 + nk_2}, \quad (18)$$

其中  $\mathbf{q}_{r_j}$  表示初始单元格  $j_{th}$  点的位移;  $k_i (i = 1, 2)$  是传播常数,可以表示为  $k_i = \xi_i + i\varepsilon_i$ ,  $\xi_i$  为衰减系数,  $\varepsilon_i$  为相位常数,一般情况下默认波在传播的过程中没有衰减,即  $\xi_i = 0$ .

选择图 2(a) 中的模型 I 为例,通过 Floquet 边界条件来说明点阵中两个相邻单元对应节点之间位移的关系.在前文中,我们已经推导出了 MSB 的动力刚度矩阵,按照 FEM 的方式组装各子单元的动力刚度矩阵,得到模型 I 的 5 节点整体动力刚度矩阵  $\mathbf{K}(\omega)$ . 这个整体动力刚度矩阵  $\mathbf{K}(\omega)$  描述了结构中各个单元之间的相互作用:

$$\mathbf{K}(\omega) \mathbf{q} = \mathbf{F}, \quad (19)$$

式中  $\mathbf{K}(\omega)$  是模型 I 的  $15 \times 15$  整体刚度矩阵,  $\omega$  表示频率,  $\mathbf{q}$  和  $\mathbf{F}$  分别代表点阵频域中的广义力和位移列向量.根据 Bloch 定理,点阵节点位移相关的 Floquet 边界条件为

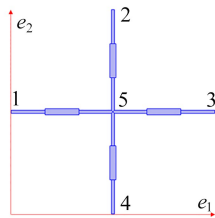
$$\mathbf{q}_3 = e^{-i\varepsilon_1} \mathbf{q}_1, \quad \mathbf{q}_2 = e^{-i\varepsilon_2} \mathbf{q}_4. \quad (20)$$

因此,广义位移  $\mathbf{q}$  可以简化为

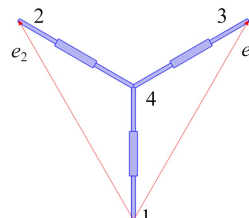
$$\mathbf{q} = \mathbf{T}_B(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \tilde{\mathbf{r}}, \quad (21)$$

其中  $\tilde{\mathbf{r}} = [\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_4 \quad \mathbf{q}_5]^T$ ,  $\mathbf{T}_B$  为 Floquet 边界条件中的转换矩阵,可以表示为

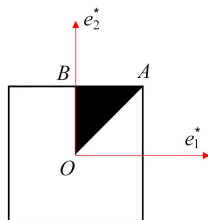
$$\mathbf{T}_B(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 \\ \mathbf{I}e^{-i\varepsilon_1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}e^{-i\varepsilon_2} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (22)$$



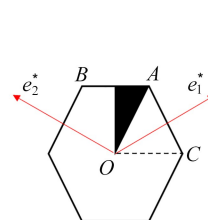
(a) 模型 I : MSB 十字形点阵  
(a) Model I : the MSB cross lattice



(b) 模型 II : MSB 六边形点阵  
(b) Model II : the MSB hexagonal lattice



(c) 模型 I 的不可约 Brillouin 区  
(c) The irreducible Brillouin zone of model I



(d) 模型 II 的不可约 Brillouin 区  
(d) The irreducible Brillouin zone of model II

图 2 模型 I 和模型 II

Fig. 2 Model I and model II

为保证等式两侧维度的一致性,引入转换矩阵的共轭转置矩阵  $\mathbf{T}_B^H(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ , 最终得到如下结果:

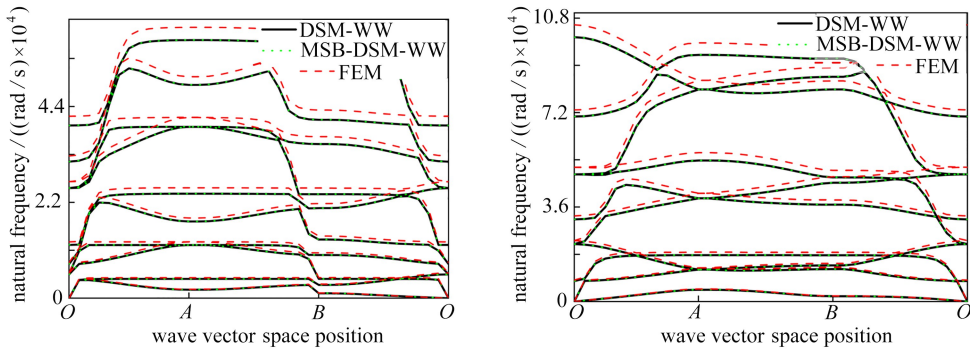
$$\mathbf{T}_B^H(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \mathbf{K}(\omega) \mathbf{T}_B(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \tilde{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{K}}(\omega, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \tilde{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{F}}, \quad (23)$$

其中  $\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{T}_B^H(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2)\mathbf{F}$ . 对于自由波传播, 外力  $\mathbf{F}$  通常被设定为  $\mathbf{0}$ .

至此, 代入 Floquet 边界条件后, 我们得到了点阵与波矢相关的整体刚度矩阵  $\tilde{\mathbf{K}}(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2)$ . 波矢沿着点阵不可约 Brillouin 区边界进行扫描, 代入不同的相位常数  $(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2)$ , 结合 WW 算法得到不同波矢下的固有频率, 最终得到点阵的色散曲线.

### 2.3 两种周期性 MSB 点阵的色散曲线

以等截面梁这一特殊 MSB 为例用来验证 MSB-DSM-WW 算法的准确性. 三段梁的参数设定如下: 长度  $l = 0.1$  m, 厚度  $d = 0.003$  m; 中间段, 长度  $l_2 = 0.003$  m, 宽度  $t_2 = 0.003$  m, 密度  $\rho_2 = 2\,500$  kg/m<sup>3</sup>, 弹性模量  $E_2 = 2.1 \times 10^{10}$  Pa; 端部段, 长度  $l_1 = (l - l_2)/2$ , 宽度  $t_1 = 0.003$  m, 密度  $\rho_1 = 2\,500$  kg/m<sup>3</sup>, 弹性模量  $E_1 = 2.1 \times 10^{10}$  Pa. 基于上述三段梁, 组成了模型 I (图 2(a)) 和模型 II (图 2(b)). 沿点阵不可约 Brillouin 区的  $O-A-B-O$  路径进行扫描, 获取了模型 I 和模型 II 的前十阶色散曲线(图 3).



(a) 模型 I 的色散曲线

(b) 模型 II 的色散曲线

(a) Dispersion curves of model I

(b) Dispersion curves of model II

图 3 分别考虑为普通梁和分段梁, 使用本文方法以及 FEM 得到的两个模型的色散曲线

Fig. 3 The dispersion curves of the 2 models considered respectively for the 1-segment beam and the 3-segment beam, in comparison with the results of the finite element model

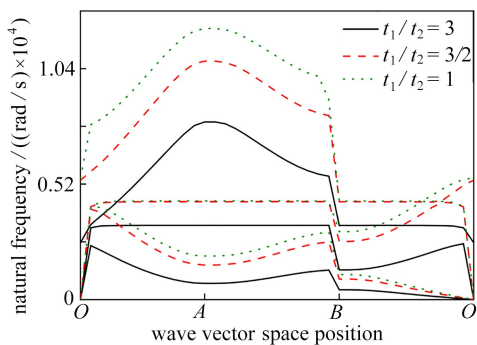
考虑为普通梁, 使用本文方法得到 DSM-WW 结果; 考虑为等分的三段梁, 使用本文方法得到 MSB-DSM-WW 结果; 使用 COMSOL 建模得到 FEM 结果. 三种方法得到的色散曲线在某些波矢条件下均存在两个固有频率接近的情况, 然而其对应的振型并不相同. 对比 DSM-WW 和 MSB-DSM-WW 的结果发现完全一致, 这证实了第 2 节中提出的三段梁刚度矩阵组装方法的准确性, MSB-DSM-WW 可推广用于求解非等截面梁点阵的色散曲线. 按照本文方法得到的色散曲线与 FEM 结果进行比较, 发现两者的变化趋势相同, 且误差在 6% 之内. 这进一步证实了所提出的 MSB 点阵色散曲线求解方法的正确性. 值得注意的是, MSB-DSM-WW 算法的求解精度直接受到所采用的梁单元刚度矩阵的影响, 本文采用的梁单元模型为 Euler-Bernoulli 梁模型, 忽略了梁单元的剪切变形, 因此得到的最终结果与采用实体单元模型的 FEM 结果存在一定的误差, 且频率越高差别越大.

## 3 MSB 参数对色散曲线的影响

前一节已经提出了 MSB 点阵色散曲线的求解方式, 并证明了其正确性. 在本节中, 我们将进一步分析 MSB 的几何参数和材料属性对色散曲线的影响. 通过系统的参数研究, 我们将深入了解这些参数如何影响点阵的振动特性. 为便于分析, 我们仅取点阵的前三阶色散曲线.

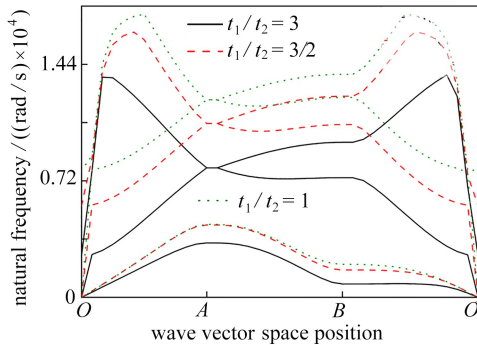
### 3.1 MSB 几何参数的影响

通过观察图 4 我们可以发现, 改变中间段宽度对两个模型的色散曲线都产生了影响. 在中间段宽度  $t_2$  小于端部段宽度  $t_1$  的条件下, 增大中间段宽度, 两个模型的固有频率均出现增大的趋势, 这是由于该条件下刚度的提升大于质量增大对模型固有频率的影响. 在中间段宽度  $t_2$  大于端部段宽度  $t_1$  的条件下, 增大中间段宽度, 两个模型的固有频率变化并不明确, 这是由于该条件下刚度与质量增大的效果对模型固有频率的影响效率相仿.



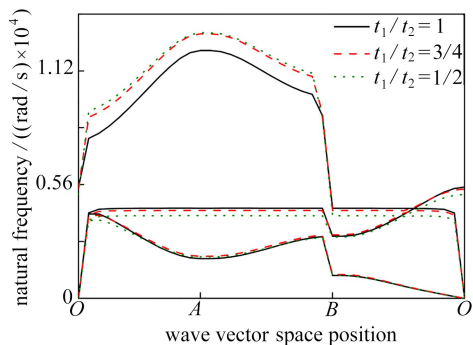
(a) 模型 I 在不同宽度下的色散曲线 ( $t_1/t_2 \geq 1$ )

(a) Dispersion curves of model I with different widths ( $t_1/t_2 \geq 1$ )



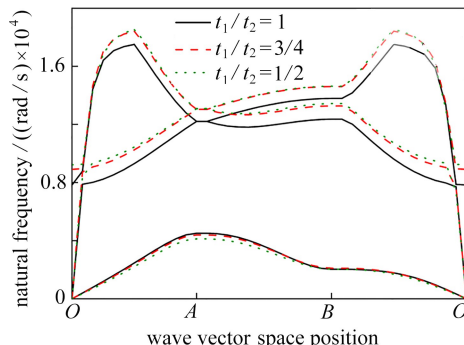
(b) 模型 II 在不同宽度下的色散曲线 ( $t_1/t_2 \geq 1$ )

(b) Dispersion curves of model II with different widths ( $t_1/t_2 \geq 1$ )



(c) 模型 I 在不同宽度下的色散曲线 ( $t_1/t_2 \leq 1$ )

(c) Dispersion curves of model I with different widths ( $t_1/t_2 \leq 1$ )



(d) 模型 II 在不同宽度下的色散曲线 ( $t_1/t_2 \leq 1$ )

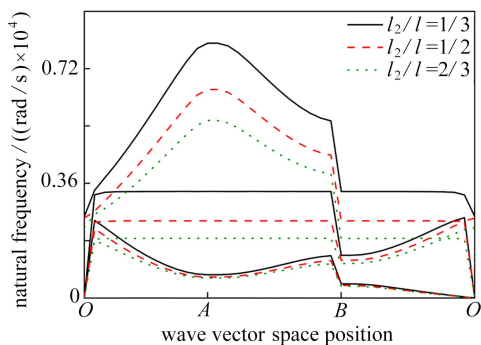
(d) Dispersion curves of model II with different widths ( $t_1/t_2 \leq 1$ )

图 4 两个模型色散曲线受到中间段宽度  $t_2$  的影响 ( $t_1 = 0.003 \text{ m}$ ,  $l_2/l = 1/3$ )

Fig. 4 The dispersion curves of the 2 models with different width  $t_2$  values of the middle segment

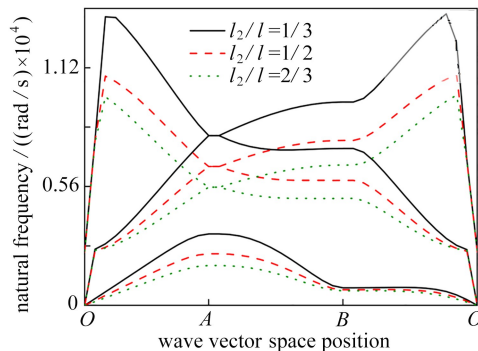
( $t_1 = 0.003 \text{ m}$ ,  $l_2/l = 1/3$ )

通过对图 5 的分析我们可以得出,改变中间段的长度  $l_2$  对两个模型的色散曲线都产生了显著影响的结论.在不同的  $t_1/t_2$  取值情况下,中间段长度  $l_2$  对点阵色散曲线产生了不同的影响.在  $t_2 > t_1$  的情况下,随着中间段长度  $l_2$  的增大,两个模型的固有频率均呈现增大的趋势,当  $t_2 < t_1$  时,伴随着中间段长度  $l_2$  的增大,两个模型的固有频率均呈现减小的趋势.值得注意的是,这种变化并未对色散曲线的整体趋势产生影响.



(a) 模型 I 在不同长度下的色散曲线 ( $t_2 = 0.001 \text{ m}$ )

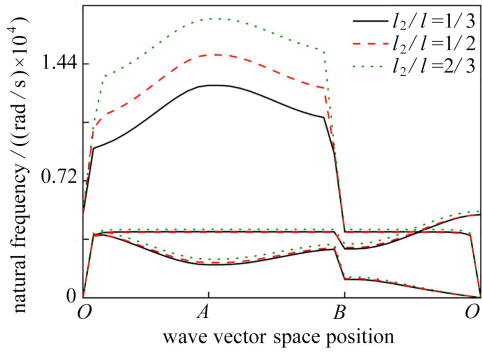
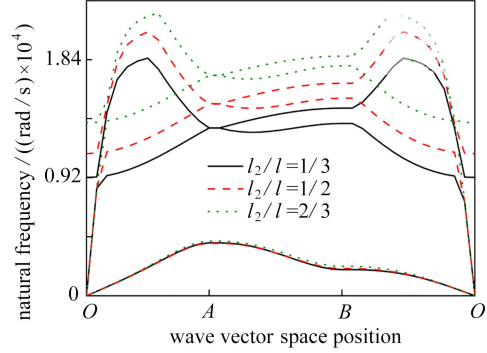
(a) Dispersion curves of model I with different lengths ( $t_2 = 0.001 \text{ m}$ )



(b) 模型 II 在不同长度下的色散曲线 ( $t_2 = 0.001 \text{ m}$ )

(b) Dispersion curves of model II with different lengths ( $t_2 = 0.001 \text{ m}$ )



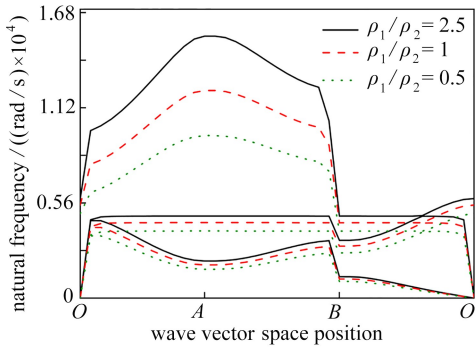
(c) 模型 I 在不同长度下的色散曲线 ( $t_2 = 0.006 \text{ m}$ )(c) Dispersion curves of model I with different lengths ( $t_2 = 0.006 \text{ m}$ )(d) 模型 II 在不同长度下的色散曲线 ( $t_2 = 0.006 \text{ m}$ )(d) Dispersion curves of model II with different lengths ( $t_2 = 0.006 \text{ m}$ )图 5 两个模型色散曲线受到中间段长度  $l_2$  的影响 ( $t_1 = 0.003 \text{ m}$ )Fig. 5 The dispersion curves of the 2 models with different length  $l_2$  values of the middle segment ( $t_1 = 0.003 \text{ m}$ )

综合上述结果,在本文给出的参数基础上改变 MSB 的几何参数会导致点阵的刚度和质量同时发生改变,且刚度改变对点阵固有频率的影响占据主导作用.通过对 MSB 几何参数的调整可以灵活地调节结构的固有频率,从而实现对点阵色散曲线的针对性调控.这为设计和优化 MSB 点阵以满足不同振动控制需求提供了有益的指导.

### 3.2 MSB 材料属性的影响

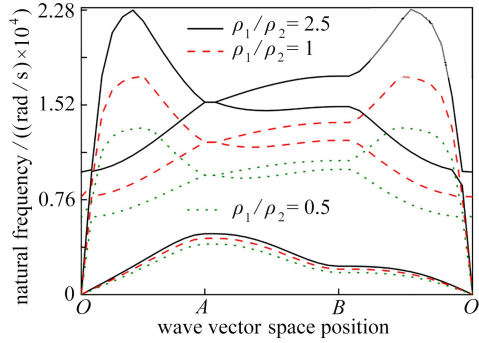
通过对图 6 的分析,我们观察到随着 MSB 中间段密度  $\rho_2$  的增大,两个模型的固有频率均呈现减小的趋势.这一现象可能归因于密度的增大导致了点阵结构质量的增加,从而减小了结构的固有频率.而在对图 7 的分析中,我们发现随着 MSB 中间段弹性模量  $E_2$  的增大,两个模型的固有频率均呈现增加的趋势.这一现象可能归因于弹性模量的增大提高了结构的刚度,进而提高了点阵的固有频率.值得注意的是,尽管固有频率发生变化,色散曲线的变化趋势并未发生改变.

综合上述结果,MSB 的材料属性对点阵的振动特性同样有着关键性的影响.通过对 MSB 材料属性的调整可以灵活地调节结构的固有频率,从而实现对点阵色散曲线的针对性调控.



(a) 模型 I 在不同密度下的色散曲线

(a) Dispersion curves of model I with different densities



(b) 模型 II 在不同密度下的色散曲线

(b) Dispersion curves of model II with different densities

图 6 两个模型色散曲线受到中间段密度  $\rho_2$  的影响 ( $\rho_1 = 2500 \text{ kg/m}^3$ ,  $t_1 = 0.003 \text{ m}$ ,  $t_2 = 0.003 \text{ m}$ ,  $l_2/l = 1/3$ )Fig. 6 The dispersion curves of the 2 models with different density  $\rho_2$  values of the middle segment ( $\rho_1 = 2500 \text{ kg/m}^3$ ,  $t_1 = 0.003 \text{ m}$ ,  $t_2 = 0.003 \text{ m}$ ,  $l_2/l = 1/3$ )

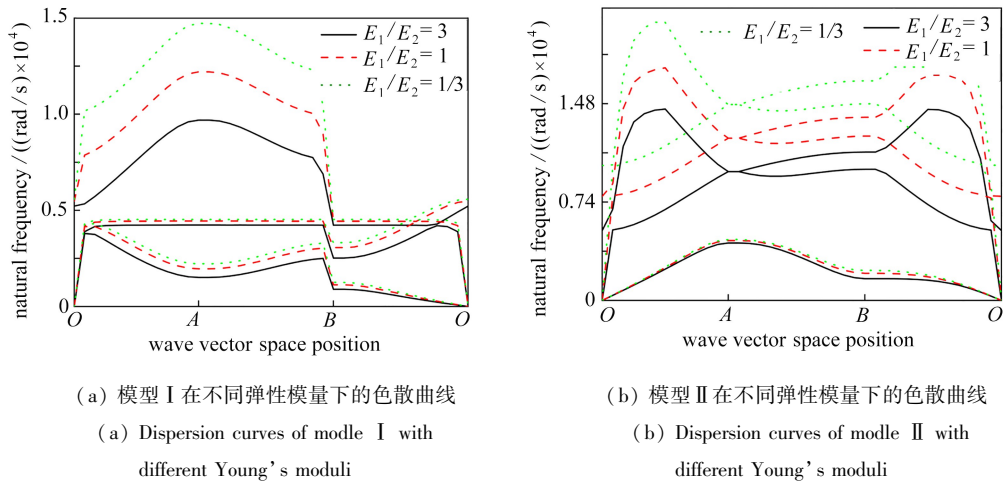


图 7 两个模型色散曲线受到中间段弹性模量  $E_2$  的影响 ( $E_1 = 2.1 \times 10^{10}$  Pa,  $t_1 = 0.003$  m,  $t_2 = 0.003$  m,  $l_2/l = 1/3$ )

Fig. 7 The dispersion curves of the 2 models with different Young's modulus  $E_2$  values of the middle segment

( $E_1 = 2.1 \times 10^{10}$  Pa,  $t_1 = 0.003$  m,  $t_2 = 0.003$  m,  $l_2/l = 1/3$ )

## 4 结 论

本文以 MSB 点阵材料为研究对象,提出了一种新的方法用于求解 MSB 点阵的色散曲线,将推导结果与 FEM 模拟结果进行对比,验证了理论推导的正确性.本文同时研究了 MSB 的相关参数对点阵材料色散曲线的影响,主要得到了以下结论:

1) 基于 DSM 得到了梁单元准确的动力刚度矩阵,以分块矩阵组装的形式得到了 MSB 的动力刚度矩阵,随后通过 Floquet 边界条件的代入得到了 MSB 点阵与波矢相关的整体刚度矩阵,最终通过二分法与 WW 算法的结合,将波矢在点阵不可约 Brillouin 区进行扫掠,得到了 MSB 点阵的色散曲线.

2) MSB 的引入为点阵色曲线的调控提供了新的参数,拓宽了其设计范围.在  $t_1/t_2 > 1$  的条件下增大 MSB 中间段的宽度  $t_2$ 、在  $t_1/t_2 < 1$  的条件下增大中间段所占的长度,提高中间段的材料弹性模量均会提高点阵的固有频率;在  $t_1/t_2 > 1$  的条件下减小中间段的宽度  $t_2$ 、在  $t_1/t_2 < 1$  的条件下增大中间段所占的长度,提高中间段的材料密度均会减小点阵的固有频率.

## 参考文献 (References):

- [1] PRAJWAL P, GHUKU S, MUKHOPADHYAY T. Large-deformation mechanics of anti-curvature lattice materials for mode-dependent enhancement of non-linear shear modulus[J]. *Mechanics of Materials*, 2022, **171**: 104337.
- [2] QI C, JIANG F, YANG S. Advanced honeycomb designs for improving mechanical properties: a review[J]. *Composites Part B: Engineering*, 2021, **227**: 109393.
- [3] CHI Z Y, LIU J X, SOH A K. Micropolar modeling of a typical bending-dominant lattice comprising zigzag beams[J]. *Mechanics of Materials*, 2021, **160**: 103922.
- [4] KUMAR B, BANERJEE A, DAS R, et al. Frequency dependent effective modulus of square grid lattice using spectral element method[J]. *Mechanics of Materials*, 2023, **184**: 104695.
- [5] CHEN Z, WU X, XIE Y M, et al. Re-entrant auxetic lattices with enhanced stiffness: a numerical study[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2020, **178**: 105619.
- [6] LI X, LU Z, YANG Z, et al. Yield surfaces of periodic honeycombs with tunable Poisson's ratio[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2018, **141**: 290-302.
- [7] AN X, YUAN X, FAN H. Meta-Kagome lattice structures for broadband vibration isolation[J]. *Engineering Structures*, 2023, **277**: 115403.

- [8] DENG J, GUASCH O. Sound waves in continuum models of periodic sonic black holes[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2023, **205**: 110853.
- [9] KARLIĆIĆ D, CAJIĆ M, CHATTERJEE T, et al. Wave propagation in mass embedded and pre-stressed hexagonal lattices[J]. *Composite Structures*, 2021, **256**: 113087.
- [10] LI X F, CHENG S L, YANG H Y, et al. Integrated analysis of bandgap optimization regulation and wave propagation mechanism of hexagonal multi-ligament derived structures[J]. *European Journal of Mechanics A: Solids*, 2023, **99**: 104952.
- [11] LIU J X, DENG S C, ZHANG J, et al. Lattice type of fracture model for concrete[J]. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2007, **48**(3): 269-284.
- [12] LIU K J, LIU H T, ZHEN D. Mechanical and bandgap properties of 3D bi-material triangle re-entrant honeycomb[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2024, **261**: 108664.
- [13] WANG B Y, LIU J X, SOH A K, et al. Exact strain gradient modelling of prestressed nonlocal diatomic lattice metamaterials[J]. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2023, **30**(13): 2718-2734.
- [14] WANG B Y, LIU J X, SOH A K, et al. On band gaps of nonlocal acoustic lattice metamaterials: a robust strain gradient model[J]. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 2022, **43**(1): 1-20.
- [15] WANG B Y, LIU J X. Padé-based strain gradient modeling of bandgaps in two-dimensional acoustic lattice metamaterials[J]. *International Journal of Applied Mechanics*, 2023, **15**(2): 2350006.
- [16] 杨访. 手性声学超材料的带隙特性及减振性能研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2022. (YANG Fang. Research on the bandgap characteristics and vibration absorption properties of chiral acoustic metamaterials [D]. Harbin: Harbin Engineering University, 2022. (in Chinese))
- [17] WILLIAMS F W, WITTRICK W H. An automatic computational procedure for calculating natural frequencies of skeletal structures[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 1970, **12**(9): 781-791.
- [18] WITTRICK W H, WILLIAMS F W. A general algorithm for computing natural frequencies of elastic structures[J]. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 1971, **24**(3): 263-284.
- [19] 钟万勰, 吴志刚, 高强, 等.  $H_\infty$  分散控制系统范数计算的模态综合法( I ) [J]. 应用数学和力学, 2004, **25**(2): 111-120. (ZHONG Wanxie, WU Zhigang, GAO Qiang, et al. Modal synthesis method for norm computation of  $H_\infty$  decentralized control systems ( I ) [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2004, **25**(2): 111-120. (in Chinese))
- [20] 钟万勰, 吴志刚, 高强, 等.  $H_\infty$  分散控制系统范数计算的模态综合法( II ) [J]. 应用数学和力学, 2004, **25**(2): 121-127. (ZHONG Wanxie, WU Zhigang, GAO Qiang, et al. Modal synthesis method for norm computation of  $H_\infty$  decentralized control systems ( II ) [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2004, **25**(2): 121-127. (in Chinese))
- [21] 周平. 基于动态刚度阵法的船舶结构振动特性分析[D]. 大连: 大连理工大学, 2006. (ZHOU Ping. Analysis of vibration characteristic for ship structure by dynamic stiffness matrix method [D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2006. (in Chinese))
- [22] LIU X, LU Z, ADHIKARI S, et al. Exact wave propagation analysis of lattice structures based on the dynamic stiffness method and the Wittrick-Williams algorithm[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2022, **174**: 109044.
- [23] ADHIKARI S, MUKHOPADHYAY T, LIU X. Broadband dynamic elastic moduli of honeycomb lattice materials: a generalized analytical approach[J]. *Mechanics of Materials*, 2021, **157**: 103796.