

# 基于模态空间时域精细积分的 结构动力学参数辨识方法\*

潘耀宗<sup>1</sup>, 赵岩<sup>1,2</sup>

(1. 大连理工大学 力学与航空航天学院 工业装备结构分析优化与 CAE 软件全国重点实验室, 辽宁 大连 116024;  
2. 大连理工大学宁波研究院, 浙江 宁波 315016)

(我刊编委赵岩来稿)

**摘要:** 提出了一种基于模态空间时域精细积分的动力学参数辨识方法. 首先, 基于时域测量信号和理论预测模型构造辨识方程, 在模态空间内, 由时域精细积分方法构造了理论预测模型; 其次, 通过矩阵、向量的 Kronecker 积运算法则推导了辨识模态的无约束向量的二次型函数, 解析地给出了辨识振型的数学表达; 最后, 通过对辨识优化问题进行数学变换, 仅需要辨识结构动力学特性的谱参数(频率和阻尼比), 极大地降低了辨识参数的维度. 数值算例中, 进行了三自由度弹簧质量系统和高速受电弓的动力学参数辨识, 辨识得到的固有频率、阻尼比与理论值相比, 误差在 8% 以内; 辨识振型与理论振型之间的夹角的余弦接近 1, 验证了辨识结果的准确性. 该文提出的方法能够有效地实现辨识谱参数(频率、阻尼)和空间参数(振型)的分离, 具有非常好的求解效率和应用前景.

**关键词:** 动力学参数辨识; 时域精细积分法; 最小二乘法; 自振特性; 动力学优化

**中图分类号:** O32 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.450071

## A Structural Dynamics Parameter Identification Method Based on the Modal Space Time-Domain Precise Integration

PAN Yaozong<sup>1</sup>, ZHAO Yan<sup>1,2</sup>

(1. State Key Laboratory of Structural Analysis, Optimization and CAE Software for Industrial Equipment, School of Mechanics and Aerospace Engineering, Dalian University of Technology,

Dalian, Liaoning 116024, P.R.China;

2. Ningbo Institute of Dalian University of Technology,

Ningbo, Zhejiang 315016, P.R.China)

(Contributed by ZHAO Yan, M.AMM Editorial Board)

**Abstract:** Based on the modal space time-domain precise integration, a dynamic parameter identification method was proposed. Firstly, an identification model was constructed based on the time-domain measurement signals and the theoretical prediction model with the time-domain precise integration method in the modal space. Secondly, the quadratic function of the unconstrained vector was derived through the Kronecker product of ma-

\* 收稿日期: 2024-03-20; 修订日期: 2024-05-04

**基金项目:** 国家自然科学基金(11772084;U1906233); 国家重点研发计划(2017YFC0307203)

**作者简介:** 潘耀宗(1997—), 男, 博士生(E-mail: panyaozong@mail.dlut.edu.cn);

赵岩(1974—), 男, 教授, 博士生导师(通讯作者. E-mail: yzhao@dlut.edu.cn).

**引用格式:** 潘耀宗, 赵岩. 基于模态空间时域精细积分的结构动力学参数辨识方法[J]. 应用数学和力学, 2025, 46(1): 29-39.

trices, and the mathematical expressions of the mode shapes were analyzed and given. Finally, through mathematical transformations of the identification optimization problem, only the dynamics spectrum parameters (frequencies and damping ratios) need be identified, to greatly reduce the dimensionality of the identification parameters. In numerical examples, the dynamic parameter identification for the spring-mass system and the high-speed pantograph system were studied. The identified natural frequencies and damping ratios have errors less than 8% compared to the theoretical values. The cosine of the angle between the identified and the theoretical mode shapes is close to 1, which verifies the accuracy of the identification results. The proposed method can effectively achieve the separation of dynamic spectral parameters (frequencies, damping ratios) and spatial parameters (modal shapes), and has better solving efficiency and application prospects.

**Key words:** dynamic parameter identification; time-domain precise integration method; least squares method; free vibration characteristic; dynamics optimization

## 0 引 言

结构的动力学参数(固有频率、阻尼比和振型)是振动控制和健康监测的重要物理特征量,通过跟踪动力学参数随时间的演变不仅可以了解结构的真实运行状态和可靠性,还可以辨识结构的损伤部位,相关研究具有实际工程意义,也是结构动力学发展的重要方向<sup>[1-4]</sup>。

结构动力学参数的辨识属于动力学反问题,其中实验模态分析是动力学参数辨识最重要的手段之一。在实验过程中同时测量输入载荷和输出响应,通过获得的测试数据及辨识算法进行结构动力学参数识别,加载则可通过力锤、激振器、振动台等设备实现,得到信噪比远超于环境响应的强迫振动响应,成为实验模态分析最显著的优势。实验模态分析辨识算法分为频域方法和时域方法。频域方法的一般思路是通过拟合测量数据和理论预测的频响函数(FRF)来获得模态参数,包括加权最小二乘法<sup>[5]</sup>、有理分数多项式(RFP)<sup>[6]</sup>、多参考最小二乘复频域(PolyMAX)法<sup>[7]</sup>等。在某些情况下,当频率分辨率较低且存在频谱泄露时,频域方法的辨识结果精度不能令人满意<sup>[8]</sup>。在频域辨识方法发展的同时,学者们开展了动力学参数时域辨识方法研究,应用比较广泛的有最小二乘复指数(LSCE)法<sup>[9]</sup>、多参考复指数(PRCE)法<sup>[10]</sup>、Ibrahim 时域(ITD)法<sup>[11]</sup>、特征系统实现算(ERA)法<sup>[12]</sup>等。上述时域算法已被广泛应用于现代高端工业装备和结构的动力学参数辨识的实验和现场测试中。例如,Xu等<sup>[13]</sup>对 DSA380 高速列车受电弓进行了力锤敲击实验,采用 PolyMAX 算法辨识了在不同使用工况下装备的模态特性。Kasai等<sup>[14]</sup>基于 ERA 方法对工程试验卫星进行了在轨动力学参数辨识实验,其中系统输入是由喷气式推进器产生的冲击激励。王亮等<sup>[15]</sup>采用基于时域缩放选带技术的 ERA 方法对高速飞行器进行了地面模态试验,获得了飞行器前两阶模态的固有频率和阻尼比。

时域算法的数学模型大致可分为基于理论预测和实际测量数据之间的残差构造极小值优化问题,以及通过脉冲响应数据集构造 Hankel 矩阵,并通过数学变换转化的标准特征问题。对于后者,由于测量噪声的存在,虚假模态成为需要考虑的重要问题;此外,脉冲响应函数需要通过对频响函数进行逆 Fourier 变换得到,也会引入一定的额外误差。通过残差构造极值优化问题进行动力学参数辨识,能够直接应用测量加速度等时域数据,不需要计算脉冲响应,有效避免了数据处理所带来的不确定,同时结合滤波算法能够进行特定自振频率的辨识,具有显著的优势。由于实际测量时域信号均在物理空间描述,而结构动力学参数是在模态空间描述,对于辨识模型的有效构造成为极值优化方法的首要问题;此外,动力学参数包括固有频率、阻尼比和振型,如果将这些参数耦合在一起将极大地增加优化变量个数,也成为采用极值优化方法进行模态辨识的一个难点。

针对上述问题,本文基于模态空间精细积分方法预测模态响应来构建理论模型,使用模态基底将构建的理论模型转换到物理空间,充分利用了精细积分算法状态转移矩阵高精度计算的特点,能够获得准确的辨识模型;借鉴快速 Bayesian FFT 辨识思想,在时域内推导了具有无约束二次型函数形式的标准数学模型,通过极值理论建立仅关于频率和阻尼的优化目标函数,并实现谱参数与空间参数的解耦,显著减小了优化参数的维度,与未解耦辨识方法相比,不仅精度一致,且计算效率得到了有效提升。在数值算例中,利用本文方法对三自由度弹簧质量系统和高速列车受电弓模型进行了动力学参数辨识,弹簧质量系统的谱参数最佳估计值

相对于理论值的误差在 3% 以内,而且随着噪声水平增加,谱参数的最佳估计值变化非常微小;受电弓谱参数的最佳估计结果的误差稍大,在 8% 以内(第一阶阻尼比除外);弹簧质量系统和受电弓的振型的  $C_{MAC}$  (两个振型向量之间夹角的余弦)均大于 0.99.

## 1 结构动力学参数的时域辨识模型

定义待辨识系统的结构动力学参数  $\theta = \{f_i, \zeta_i, \varphi_i, \gamma_i : i = 1, 2, \dots, m\}$ , 其中  $f_i$  为固有频率,  $\zeta_i$  为阻尼比,  $\varphi_i$  是仅关于测量节点的振型,  $\gamma_i$  为振型参与系数. 将系统  $n$  个测量节点实际测量的加速度数据记为  $\{\hat{y}_k \in R^n : k = 1, 2, \dots, N_s\}$ , 对应相同测量节点的理论响应记为  $\{y_k(\theta) \in R^n : k = 1, 2, \dots, N_s\}$ , 其中  $N_s$  是每个测量通道的信号样本数.

假定不存在建模误差,仅考虑测量噪声的影响,测量响应与理论响应有如下关系:

$$\hat{y}_k = y_k(\theta) + \epsilon_k, \quad (1)$$

其中,  $\epsilon_k$  是测量值与理论值之间的误差向量.

通常情况下,不同测量通道的测量误差  $\epsilon_k$  具有等方差和随机独立性,因此假设  $\epsilon_k$  为零均值且各分量相互独立的 Gauss 白噪声<sup>[16]</sup>,即

$$\epsilon_k \sim N(0, \sigma_\epsilon^2 I_n). \quad (2)$$

定义误差函数:

$$J(\theta) = \sum_{k=1}^{N_s} \epsilon_k^T \epsilon_k = \sum_{k=1}^{N_s} [\hat{y}_k - y_k(\theta)]^T [\hat{y}_k - y_k(\theta)], \quad (3)$$

可以看到误差函数  $J(\theta)$  以待辨识参数  $\theta$  为自变量. 这里,将其称为结构动力学参数的时域辨识模型.

在确定性的动力学参数辨识方法中,通过最小化系统测量响应与理论响应之间的总体误差来获得待识别参数的最佳估计,即

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta} (J(\theta)), \quad (4)$$

当  $\epsilon_k$  是具有零均值的平稳随机过程,且与实际测量数据无关时,最小二乘估计  $\hat{\theta}$  是无偏、有效和一致的.

## 2 基于模态空间时域精细积分的结构动力学参数辨识

### 2.1 结构动力学参数辨识的理论预测模型

应用模态坐标变换,具有正交阻尼的线性时不变系统可以由如下的一系列解耦的单自由度二阶常微分方程表示:

$$\ddot{q}_i + 2\zeta_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i = p_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (5)$$

其中,  $\ddot{q}_i$ ,  $\dot{q}_i$  和  $q_i$  分别是系统第  $i$  阶模态加速度、速度及位移;  $\omega_i$  和  $\zeta_i$  分别是系统第  $i$  阶固有圆频率和阻尼比;  $p_i$  是第  $i$  阶模态激励力,由下式给出

$$p_i = \gamma_i F(t), \quad (6)$$

其中,  $F(t)$  是物理空间内的系统输入,  $\gamma_i$  为振型参与系数.

当系统输入分别为单点激励力或加速度激励时,振型参与系数  $\gamma_i$  可以表示为

$$\gamma_i = \frac{\psi_i^T B_0}{\psi_i^T M \psi_i} \quad \text{or} \quad \gamma_i = -\frac{\psi_i^T M E}{\psi_i^T M \psi_i}, \quad (7)$$

其中,  $B_0 \in R^{n_d \times 1}$  和  $M \in R^{n_d \times n_d}$  分别是输入指示矩阵和质量矩阵,  $E \in R^{n_d}$  是元素均为 1 的向量,  $\psi_i \in R^{n_d \times 1}$  是包含系统所有自由度的第  $i$  阶振型向量.

运动方程(5)中右端项同时与振型参与系数  $\gamma_i$  和输入  $F(t)$  有关,对此进行规范化,将方程两边除以  $\gamma_i$ , 并采用自然频率代替圆频率,即将  $\omega_i = 2\pi f_i$  代入运动方程(5)中,得到如下表达式:

$$\ddot{\tilde{q}}_i + 4\pi\zeta_i f_i \dot{\tilde{q}}_i + 4\pi^2 f_i^2 \tilde{q}_i = F(t), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (8)$$

其中  $\ddot{\tilde{q}}_i = \ddot{q}_i / \gamma_i$ ,  $\dot{\tilde{q}}_i = \dot{q}_i / \gamma_i$ ,  $\tilde{q}_i = q_i / \gamma_i$ , 分别为系统在模态空间内,在激励  $F(t)$  作用下的模态响应,可以看到该方程与通常载荷作用下的单自由度方程形式上完全一致. 从后文 2.2 小节可以看到,只要对一系列(模态)单

自由度运动方程进行理论响应模型建模,就能方便嵌入结构动力学参数辨识算法中,这也是本文方法的一个显著特色,即辨识谱参数(频率、阻尼)和辨识空间参数(振型)能够有效分离。

采用状态空间形式重新表述结构动力学方程(8),对此定义系统第*i*阶模态的状态向量为

$$\mathbf{v}_i = \begin{Bmatrix} \tilde{q}_i \\ \dot{\tilde{q}}_i \end{Bmatrix}, \quad (9)$$

则运动方程(8)可以转化为一阶常微分方程:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}}_i = \mathbf{A}_i \mathbf{v}_i + \mathbf{R}(t), \\ \mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4\pi^2 f_i^2 & -4\pi \zeta_i f_i \end{bmatrix}, \mathbf{R}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ F(t) \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (10)$$

上述方程的求解可以采用时域精细积分法,其充分利用定常系统对时间的均匀性,基于 $2^N$ 类算法,对结构动力学时程积分进行数值计算,即使采用较大的积分步长,也不会发生由于“算法阻尼”导致的系统能量不守恒(即数值不稳定),能够得到与精确解相比拟的数值结果,基于这些特色,本文在模态空间内由时域精细积分方法构造理论预测模型。

在积分步 $t \in [t_k, t_{k+1}]$ 中,运动方程(10)的通解由齐次方程通解 $\mathbf{v}_{i,h}(t)$ 与非齐次方程特解 $\mathbf{v}_{i,p}(t)$ 组成,即

$$\mathbf{v}_i(t) = \mathbf{v}_{i,h}(t) + \mathbf{v}_{i,p}(t). \quad (11)$$

由线性常微分方程的理论可知,齐次方程的通解为

$$\mathbf{v}_{i,h}(t) = e^{\mathbf{A}_i(t-t_k)} \mathbf{c}, \quad (12)$$

其中, $\mathbf{c}$ 为积分常向量,由系统初始条件给出。

当 $t = t_k$ 时,将式(12)代入式(11)中,可求解出 $\mathbf{c} = \mathbf{v}_i(t_k) - \mathbf{v}_{i,p}(t_k)$ ,最终得到

$$\mathbf{v}_i(t) = e^{\mathbf{A}_i(t-t_k)} [\mathbf{v}_i(t_k) - \mathbf{v}_{i,p}(t_k)] + \mathbf{v}_{i,p}(t). \quad (13)$$

使用待定系数法求解非齐次方程的特解。假定载荷在积分步长 $\Delta t$ 内线性变化,即

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{s}_1 + (t - t_k) \mathbf{s}_2, \quad (14)$$

其中, $\mathbf{s}_1$ 和 $\mathbf{s}_2$ 是 $\Delta t$ 内的时不变向量,则线性载荷精细积分格式为(HPD-L式)

$$\mathbf{v}_i(t_{k+1}) = e^{\mathbf{A}_i \Delta t} [\mathbf{v}_i(t_k) + \mathbf{A}_i^{-1}(\mathbf{s}_1 + \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{s}_2)] - \mathbf{A}_i^{-1}(\mathbf{s}_1 + \mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{s}_2 + \Delta t \mathbf{s}_2). \quad (15)$$

在已知系统初始状态 $\mathbf{v}_i(t_0)$ 的条件下,通过式(15)可以迭代求解出每一时刻系统的模态位移和速度。

对于系统的模态加速度响应,在任意时刻 $t = k\Delta t$ ,由已求出的模态位移 $\tilde{q}_i$ 和速度 $\dot{\tilde{q}}_i$ ,根据运动方程(8)的平衡关系得到:

$$\ddot{\tilde{q}}_{i,k} = F(t_k) - 4\pi \zeta_i f_i \dot{\tilde{q}}_{i,k} - 4\pi^2 f_i^2 \tilde{q}_{i,k}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (16)$$

其中, $\ddot{\tilde{q}}_{i,k}$ , $\dot{\tilde{q}}_{i,k}$ 和 $\tilde{q}_{i,k}$ 是连续变量的离散表示。

至此,式(15)和式(16)给出了由精细积分表述的结构动力学参数的时域辨识理论预测模型。

## 2.2 结构动力学谱参数辨识的解耦方法

为应用辨识模型,即式(3),需要进一步将2.1小节获得的模态响应转换到物理空间。令 $\boldsymbol{\eta}_{i,k}$ 表示模态位移 $q_{i,k}$ 或者模态加速度 $\ddot{q}_{i,k}$ ,根据模态叠加法可以求解出系统在输入 $F(t)$ 作用下的响应:

$$\mathbf{y}_k(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^m \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\eta}_{i,k} = \sum_{i=1}^m \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\gamma}_i \tilde{\boldsymbol{\eta}}_{i,k}. \quad (17)$$

令 $\boldsymbol{\phi}_i = \boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\gamma}_i$ ,构造空间参数矩阵 $\boldsymbol{\phi} = \{\boldsymbol{\phi}_1 \quad \boldsymbol{\phi}_2 \quad \dots \quad \boldsymbol{\phi}_m\} \in R^{n \times m}$ ,则式(17)可以被写为

$$\mathbf{y}_k(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\phi} \tilde{\boldsymbol{\eta}}_k, \quad (18)$$

其中 $\tilde{\boldsymbol{\eta}}_k = \{\tilde{\boldsymbol{\eta}}_{1,k} \quad \tilde{\boldsymbol{\eta}}_{2,k} \quad \dots \quad \tilde{\boldsymbol{\eta}}_{m,k}\}^T$ 是广义位移或加速度向量。

将式(18)代入式(3),展开得到如下函数表达式:

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{k=1}^{N_s} (\tilde{\boldsymbol{\eta}}_k^T \boldsymbol{\phi}^T \boldsymbol{\phi} \tilde{\boldsymbol{\eta}}_k) - 2 \sum_{k=1}^{N_s} (\hat{\mathbf{y}}_k^T \boldsymbol{\phi} \tilde{\boldsymbol{\eta}}_k) + \sum_{k=1}^{N_s} (\hat{\mathbf{y}}_k^T \hat{\mathbf{y}}_k). \quad (19)$$

式(19)是关于模态参数的一般函数表达式,空间参数(振型)和动力学谱参数(频率、阻尼比)耦合在一

起,只能通过数值优化算法强行进行求解,极大地增加了问题的复杂性.为了实现谱参数和空间参数的解耦,对空间参数矩阵  $\boldsymbol{\phi}$  进行向量化操作,从而改变优化目标函数的数学结构,得到关于空间参数向量的二次型函数.通过对二次型函数求解极值,得到仅关于谱参数的优化目标函数,具体推导如下所示.

对于任意矩阵  $\boldsymbol{X} \in R^{a \times b}$ , 向量化算子“vec”将矩阵  $\boldsymbol{X}$  的元素  $x_{ij}$  按列堆栈,即  $\boldsymbol{X}_1 = \text{vec}(\boldsymbol{X}) = [x_{1,1} \ \cdots \ x_{a,1} \ x_{1,2} \ \cdots \ x_{a,2} \ \cdots \ x_{1,b} \ \cdots \ x_{a,b}]^T$ . 对矩阵  $\boldsymbol{\phi}$  进行向量化操作有

$$\boldsymbol{\Phi} = \text{vec}(\boldsymbol{\phi}) = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\phi}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\phi}_m \end{Bmatrix} \in R^{nm}. \quad (20)$$

根据向量化算子的运算法则:  $\text{vec}(\boldsymbol{UDH}) = (\boldsymbol{H}^T \otimes \boldsymbol{U}) \text{vec}(\boldsymbol{D})$ , 其中  $\boldsymbol{U} \in R^{d \times h}$ ,  $\boldsymbol{D} \in R^{h \times g}$ ,  $\boldsymbol{H} \in R^{g \times u}$ ,  $\otimes$  表示 Kronecker 积.因此,  $\boldsymbol{\phi} \tilde{\boldsymbol{\eta}}_k = \text{vec}(\boldsymbol{\phi} \tilde{\boldsymbol{\eta}}_k) = \text{vec}(\boldsymbol{I}_n \boldsymbol{\phi} \tilde{\boldsymbol{\eta}}_k)$ , 式(18)可以改写为

$$\boldsymbol{y}_k(\boldsymbol{\theta}) = (\tilde{\boldsymbol{\eta}}_k^T \otimes \boldsymbol{I}_n) \boldsymbol{\Phi}. \quad (21)$$

将式(21)代入式(3),展开得到如下目标函数表达式:

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{B} \boldsymbol{\Phi} - 2 \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{C} + \sum_{k=1}^{N_s} (\hat{\boldsymbol{y}}_k^T \hat{\boldsymbol{y}}_k), \quad (22)$$

其中

$$\boldsymbol{B} = \left[ \left( \sum_{k=1}^{N_s} \boldsymbol{Q}_k \right) \otimes \boldsymbol{I}_n \right] \in R^{nm \times nm}, \quad \boldsymbol{Q}_k = \tilde{\boldsymbol{\eta}}_k \tilde{\boldsymbol{\eta}}_k^T \in R^{m \times m}, \quad (23)$$

$$\boldsymbol{C} = \sum_{k=1}^{N_s} (\tilde{\boldsymbol{\eta}}_k \otimes \hat{\boldsymbol{y}}_k) \in R^{nm \times 1}. \quad (24)$$

从式(22)可以看到,目标函数  $J(\boldsymbol{\theta})$  是关于空间参数向量  $\boldsymbol{\Phi}$  的二次型函数.通常振型  $\boldsymbol{\varphi}_i$  具有范数约束:  $\|\boldsymbol{\varphi}_i\|_2 = 1$ , 因此  $\|\boldsymbol{\phi}_i\|_2 = \gamma_i$ . 由于  $\gamma_i$  是一个变量,因此  $\boldsymbol{\phi}_i$  是无约束的向量,即向量  $\boldsymbol{\Phi}$  也是无约束的.对于无约束的二次型函数,可以直接利用导函数求解自变量.根据矩阵求导运算法则,  $J(\boldsymbol{\theta})$  关于空间参数向量  $\boldsymbol{\Phi}$  的梯度为

$$\nabla_{\boldsymbol{\Phi}} J = 2(\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{B} - \boldsymbol{C}^T). \quad (25)$$

由于  $\nabla_{\boldsymbol{\Phi}} J|_{\boldsymbol{\Phi}=\hat{\boldsymbol{\Phi}}} = \mathbf{0}$ , 因此可以得到向量  $\hat{\boldsymbol{\Phi}}$  的解析解为

$$\hat{\boldsymbol{\Phi}}(f_i, \zeta_i) = \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{C}, \quad (26)$$

即函数  $J(\boldsymbol{\theta})$  在  $\hat{\boldsymbol{\Phi}} = \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{C}$  处具有最小值.在式(26)中,由于矩阵  $\boldsymbol{B}$  和  $\boldsymbol{C}$  是关于  $f_i$  和  $\zeta_i$  的隐式函数,因此  $\hat{\boldsymbol{\Phi}}$  也是关于  $f_i$  和  $\zeta_i$  的函数.

计算函数  $J(\boldsymbol{\theta})$  在  $\hat{\boldsymbol{\Phi}}$  处的函数值,得到仅关于  $f_i$  和  $\zeta_i$  的函数  $J(f_i, \zeta_i)$ :

$$J(f_i, \zeta_i) = -[\boldsymbol{C}(f_i, \zeta_i)]^T [\boldsymbol{B}(f_i, \zeta_i)]^{-1} \boldsymbol{C}(f_i, \zeta_i) + \sum_{k=1}^{N_s} (\hat{\boldsymbol{y}}_k^T \hat{\boldsymbol{y}}_k). \quad (27)$$

式(27)实现了动力学谱参数  $\{f_i, \zeta_i\}$  与空间参数  $\{\boldsymbol{\varphi}_i, \gamma_i\}$  的分离.在式(19)中,函数共包含  $2m + nm$  个未知参数.通常,为了更好地了解结构的振型,需要设置较多的测量通道,当辨识模态阶数较多时,使用优化算法求解出所有未知参数的代价巨大.然而将式(27)作为优化目标函数,未知参数的个数仅为  $2m$ , 远小于  $2m + nm$  (当  $n$  和  $m$  较大时),极大地减小了未知参数的个数,能够显著提高优化效率.

对于目标函数(27),在利用优化算法求解得到  $\{\hat{f}_i, \hat{\zeta}_i\}$  后,根据式(26)可以求解得到  $\hat{\boldsymbol{\Phi}}$ . 根据式(20)可以从向量  $\hat{\boldsymbol{\Phi}}$  中提取向量  $\hat{\boldsymbol{\phi}}_i$ , 则振型参与系数的最佳估计值的解析解为

$$\hat{\boldsymbol{y}}_i = \|\hat{\boldsymbol{\phi}}_i\|_2. \quad (28)$$

至此,振型的最佳估计值的解析解为

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}}_i = \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}_i}{\hat{\boldsymbol{y}}_i}. \quad (29)$$

通常使用“模态置信准则”(MAC)来表示振型估计结果的精确度,  $C_{\text{MAC}}$  被定义为两个振型向量之间夹角的余弦:

$$C_{\text{MAC}} = \frac{(\hat{\boldsymbol{\phi}})^T \boldsymbol{\varphi}}{\|\hat{\boldsymbol{\phi}}\|_2 \|\boldsymbol{\varphi}\|_2}, \quad (30)$$

$C_{\text{MAC}}$  越接近于 1, 两个振型越相似.

## 3 数值算例

### 3.1 三自由度弹簧质量系统

如图 1 所示的三自由度弹簧-质量系统, 其中  $k_1 = 300 \text{ N/m}$ ,  $k_2 = 50 \text{ N/m}$ ,  $k_3 = 100 \text{ N/m}$ ,  $k_4 = 200 \text{ N/m}$ ,  $m_1 = 0.2 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 0.1 \text{ kg}$ ,  $m_3 = 0.3 \text{ kg}$ . 假定三阶阻尼比均为 1%, 对该系统施加正弦扫频加速度激励, 激励频率在 20 s 内从 0.1 Hz 线性增加到 9 Hz, 激励幅值为  $1 \text{ m/s}^2$ . 测量三个质量块的位移, 采样频率为 100 Hz. 通过在理论响应信号添加独立同分布的 Gauss 白噪声来模拟实际测量响应.

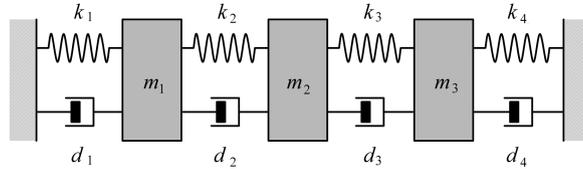


图 1 三自由度弹簧-质量系统

Fig. 1 The 3-DOF spring-mass system

#### 3.1.1 固定噪声水平下的动力学参数辨识结果

设测量噪声水平为 15%, 系统加速度激励和测量位移时域信号如图 2 所示. 使用 MATLAB 中的 function 优化函数进行动力学参数辨识优化问题求解(式(27)); 固有频率的初始值由测量位移时域响应功率谱的共振峰值给定, 阻尼比的初始值均为 0.5%.

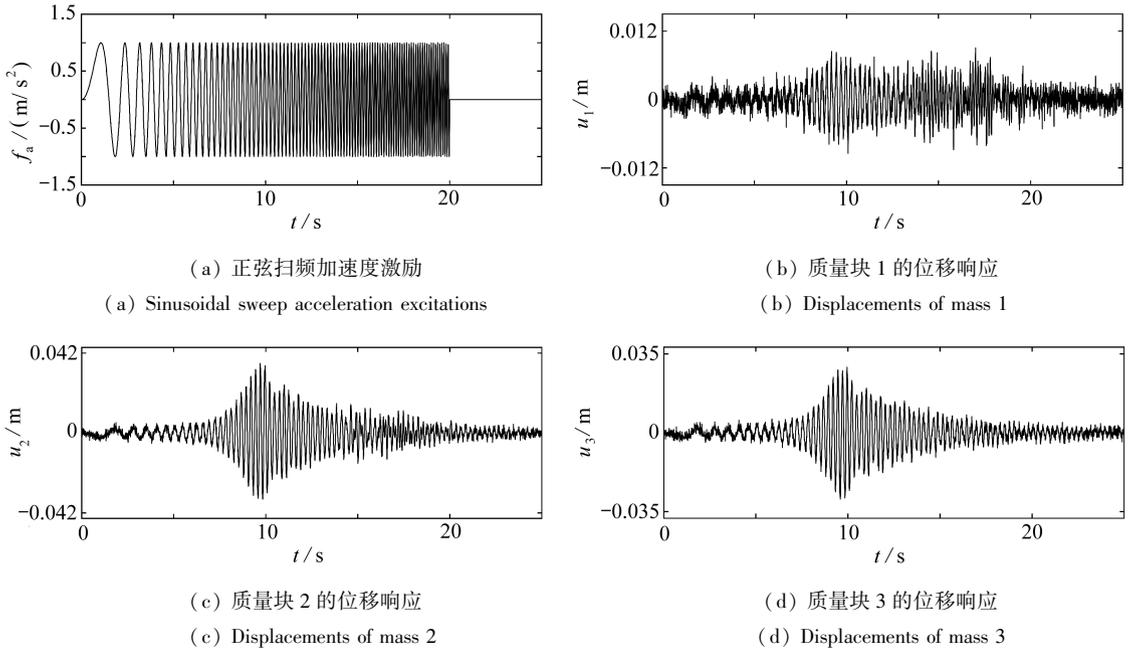


图 2 系统激励与测量位移响应

Fig. 2 System excitations and measurement displacement responses

使用所提出的方法得到的弹簧-质量系统的动力学参数辨识结果如表 1 所示. 可以看出, 固有频率和阻尼比的最佳估计值非常接近理论值, 最大误差仅为 3%, 振型参与系数的最佳估计值相对于理论值的误差最大也仅为 7.14%. 由表 1 还可以看出, 第 1~3 阶模态的振型的  $C_{\text{MAC}}$  均接近 1, 表明振型的辨识结果也十分准确. 第 1 阶模态的辨识结果最好, 与理论值完全吻合.

表 1 弹簧-质量系统动力学参数辨识结果

Table 1 Identification results of dynamic parameters of the spring-mass system

parameter		mode 1	mode 2	mode 3
$f/\text{Hz}$	identification	3.854	6.236	7.339
	theory	3.854	6.238	7.340
$\zeta/\%$	identification	1.00	1.02	1.03
	theory	1.00	1.00	1.00
$\gamma$	identification	1.65	0.54	0.75
	theory	1.65	0.50	0.70
$C_{\text{MAC}}$		1.000 0	0.999 7	0.999 0

### 3.1.2 不同噪声水平的辨识结果

为了研究测量噪声水平对谱参数辨识结果的影响,共设置了 4 个级别的测量噪声水平,由低到高依次为 5%,10%,15%,20%,其中第三种设置已经在上一小节进行了讨论。

表 2 显示了在不同噪声水平下第 1~3 阶模态的固有频率和阻尼比的识别结果。可以看出:随着测量噪声水平的增加,固有频率和阻尼比的最佳估计结果逐渐偏离理论值,但是固有频率最佳估计值的变化十分微小,尤其第 1 阶依然与理论值保持一致;第 2 阶和第 3 阶模态的阻尼比的误差较大,但是最大误差也仅为 5%,与理论值较为吻合,表明所提出的方法在噪声量级较大的情况下依然能给出较为准确的辨识结果,具有较好的鲁棒性。这与文献[14]的结论类似,当噪声是独立同分布的零均值 Gauss 白噪声时,Markov 估计结果(即加权最小二乘估计)与最小二乘法的估计结果是一致的,不会受到噪声方差的显著影响。

表 2 不同测量噪声水平谱参数辨识结果

Table 2 Dynamic spectral parameter identification results under different measurement noise levels

measurement noise level /%	mode 1		mode 2		mode 3	
	$f/\text{Hz}$	$\zeta/\%$	$f/\text{Hz}$	$\zeta/\%$	$f/\text{Hz}$	$\zeta/\%$
5	3.854	1.00	6.238	1.01	7.340	1.01
10	3.854	1.00	6.237	1.02	7.340	1.02
15	3.854	1.00	6.236	1.02	7.339	1.03
20	3.854	1.01	6.236	1.03	7.339	1.05

### 3.1.3 计算效率分析

使用 3.1.2 小节中测量噪声水平为 10%的位移响应数据,分别将式(19)和式(27)作为目标函数进行优化求解,其中式(19)需要求解 6 个谱参数和 9 个空间参数(共 15 个优化变量),式(27)仅需要求解 6 个谱参数,空间参数由谱参数解析求解得到。解耦辨识与未解耦动力学参数辨识的计算结果与时间对比如表 3 所示。

表 3 谱参数与空间参数耦合和解耦时结果对比

Table 3 Comparison of results of spectral parameters coupled and decoupled with spatial parameters

	mode 1			mode 2			mode 3			optimisation
	$f/\text{Hz}$	$\zeta/\%$	$\gamma$	$f/\text{Hz}$	$\zeta/\%$	$\gamma$	$f/\text{Hz}$	$\zeta/\%$	$\gamma$	time /s
decoupled	3.854	1.00	1.65	6.237	1.02	0.52	7.340	1.02	0.73	22.40
coupled	3.854	1.00	1.65	6.237	1.02	0.52	7.340	1.02	0.73	121.84

由表 3 可以看出,分别利用式(19)和式(27)优化求解得到的谱参数和振型参与系数是完全一致的,然而,谱参数与空间参数解耦时求解所需的时间约是耦合求解时的 1/5,显著提升了辨识效率。

## 3.2 高速受电弓模型

### 3.2.1 模态辨识数值仿真

进行高速列车受电弓有限元模型动力学参数辨识,在受电弓有限元模型的底座施加固定约束,弓头无约束。对受电弓有限元模型施加瞬态激励来模拟实际模态试验中的锤击激励,三角脉冲信号的幅值为 30 N,脉冲宽度为 0.01 s,激励施加的位置如图 3 所示。在受电弓弓头的滑板上共设置 7 个测量通道,用于测量 Z 方

向的加速度响应,采样频率为 1 000 Hz,每个测量通道的数据长度为 1 500.通过在理论响应信号添加独立同分布的 Gauss 白噪声来模拟实际测量响应,测量噪声水平为 20%.各阶振型阻尼比均为 1%.

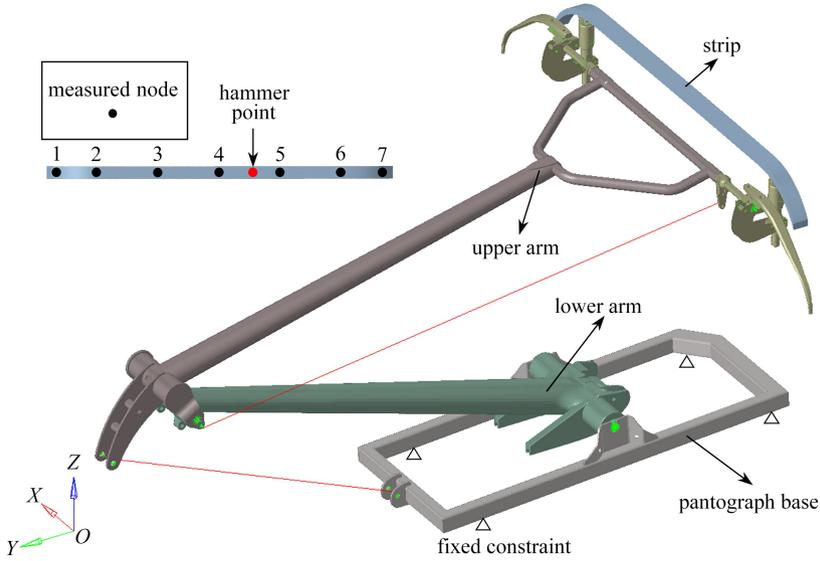
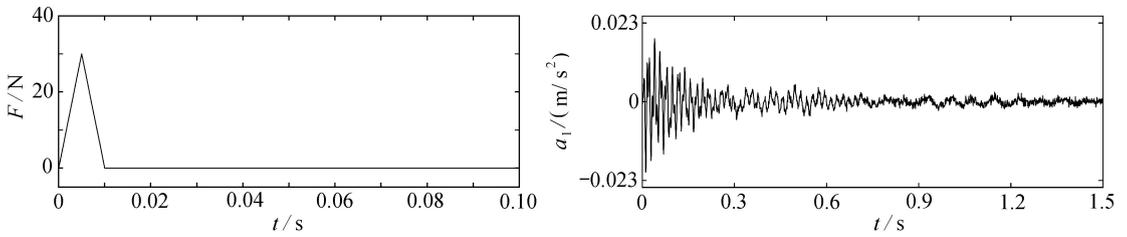


图 3 高速受电弓结构图

Fig. 3 Structural diagram of the high-speed pantograph



(a) 三角波脉冲激励力

(b) 测量节点 1 的加速度响应

(a) The triangular wave pulse excitation force

(b) The acceleration response of measurement node 1

图 4 高速受电弓系统激励与测量加速度响应

Fig. 4 Excitation and measurement acceleration response of high-speed pantograph system

脉冲激励信号如图 4(a) 所示,测量节点 1 的加速度响应如图 4(b) 所示.表 4 显示了使用本文方法识别的受电弓动力学参数,可以看出,除第 6 阶模态的固有频率相较于理论值的误差稍大外(误差为 1.43%),其余辨识的固有频率与理论值非常接近(误差在 0.3% 以内);阻尼比固有频率更容易受到测量噪声的干扰,由于前三阶模态的能量较低,受到噪声的干扰相较于高阶模态较为严重,因此前三阶阻尼比的误差最低为 5%,大于后三阶的误差(均为 1%).六阶模态的  $C_{MAC}$  均大于 0.99,表明辨识的振型具有较高的精度,图 5 给出了辨识出的滑板振型形状.

表 4 高速受电弓动力学参数辨识结果

Table 4 Identification results of dynamic parameters of the high-speed pantograph

parameter		mode 1	mode 2	mode 3	mode 4	mode 5	mode 6
$f/\text{Hz}$	identification	9.029	12.459	13.753	50.450	52.220	121.552
	theory	9.035	12.472	13.764	50.585	52.376	123.320
$\zeta/\%$	identification	1.23	1.08	1.05	1.10	0.90	1.10
	theory	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$\gamma/10^{-4}$	identification	2.33	1.71	2.35	3.87	1.28	6.43
$C_{MAC}$		0.997 4	0.998 1	0.999 6	0.999 9	0.995 5	0.999 7

图 5 中碳滑板的前两阶振型是碳滑板的垂向振动且未发生弹性变形,该振动是由弓头弹簧引起的.在实际受电弓结构中,碳滑板通过弹簧盒中的弹簧与上臂杆连接在一起.事实上,图 5 所示的振型属于受电弓的

局部振型,如需严格区分第 1、2 和第 4、5 阶模态,还需要在弓头、上臂杆和下臂杆设置更多的测量节点,从而得到全局振型图。

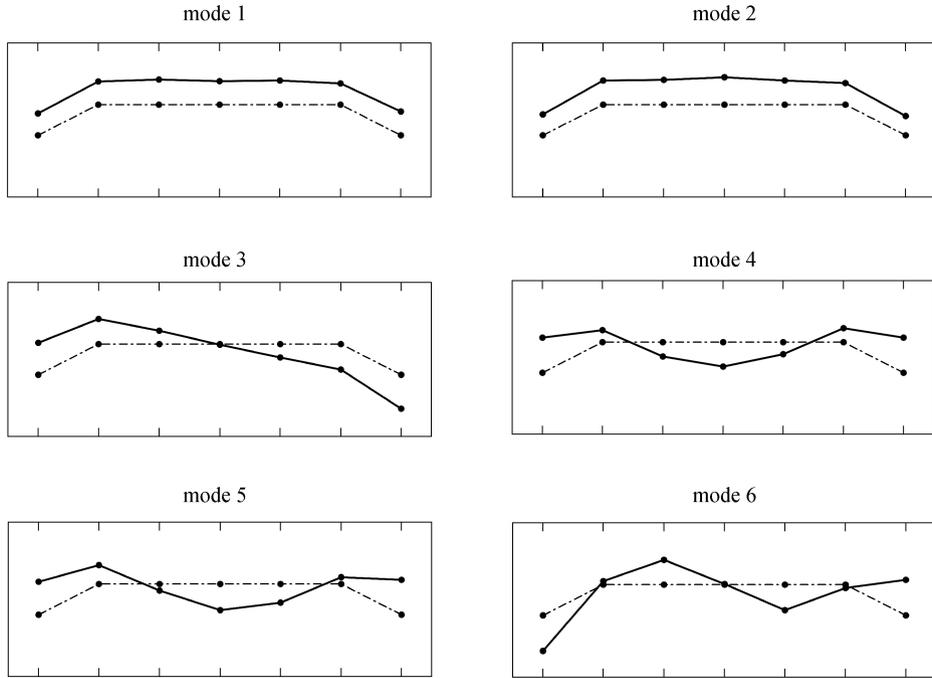
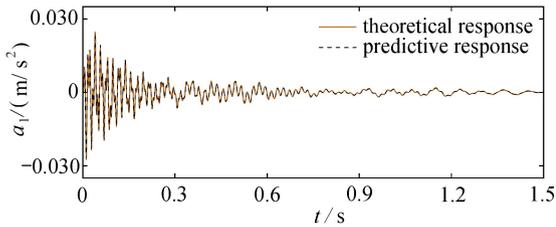


图 5 受电弓滑板振型辨识结果

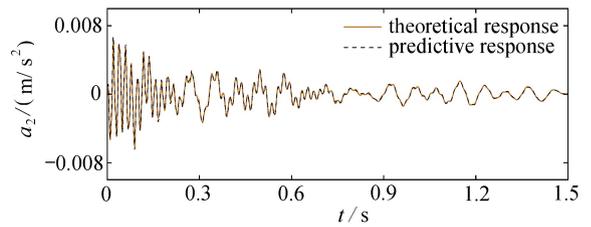
Fig. 5 Identification results of mode shapes of the pantograph strip

为了进一步验证辨识结果的准确性,在相同的位置施加幅值为 40 N 的脉冲激励,脉冲宽度保持不变,使用辨识出的动力学参数预测系统在该脉冲激励下的响应,并将节点 1~4 的预测响应与理论响应进行对比,结果如图 6 所示。从图中可以看出预测的加速度响应与理论加速度响应曲线重合较好,表明辨识出的动力学参数较为准确。



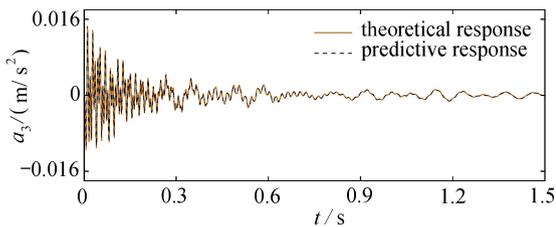
(a) 节点 1 的加速度响应

(a) Acceleration responses of measurement node 1



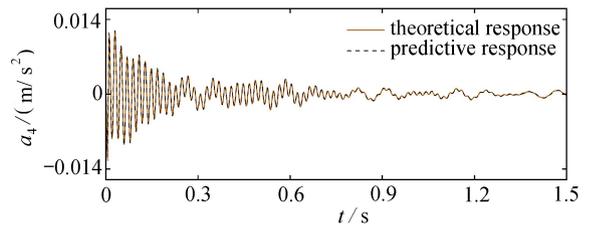
(b) 节点 2 的加速度响应

(b) Acceleration responses of measurement node 2



(c) 节点 3 的加速度响应

(c) Acceleration responses of measurement node 3



(d) 节点 4 的加速度响应

(d) Acceleration responses of measurement node 4

图 6 受电弓理论响应与预测响应对比

Fig. 6 Comparison between theoretical and predictive responses of the pantograph

### 3.2.2 模态辨识试验验证

为了进一步验证本文方法的有效性,利用文献[17]中的试验数据对受电弓实际结构进行模态参数辨识,并将辨识结果与文献结果进行对比试验验证.利用力锤敲击产生的冲击载荷和拾振点的加速度测量数据,使用本文方法辨识得到的固有频率和阻尼比如表5所示.

表5 高速受电弓模态试验动力学参数辨识结果

Table 5 Identification results of dynamic parameters of the high-speed pantograph modal test

	parameter	mode 1	mode 2	mode 3	mode 4	mode 5
proposed	$f/\text{Hz}$	10.2	12.50	48.8	133.6	219.4
methodology	$\zeta/\%$	0.46	0.36	3.95	2.711	1.84
ref. [17]	$f/\text{Hz}$	10.0	12.50	48.4	128.5	213.0

由表5可以看出,使用本文方法辨识出的固有频率和文献结果基本一致,尤其是第二阶固有频率完全相同,后两阶固有频率的偏差稍大,相对偏差最大仅为3.97%,对比结果表明本文方法可以很好地辨识实际结构的动力学参数.本文方法还给出了阻尼比的辨识结果,由于文献[17]仅进行了频率辨识,故这里未进行阻尼辨识对比.此外,结合3.2.1小节高速受电弓动力学辨识的仿真结果(表4)来看,其与试验辨识的结果(表5)并不完全一致,这一个主要原因是,由于存在认知不确定性,仿真的动力学模型与实际结构相比存在建模偏差.

## 4 结 论

本文直接使用时域测量信号,通过最小化理论预测响应和实际测量数据之间的残差来优化求解动力学参数,避免了计算脉冲响应函数所带来的误差.此外,充分利用了精细积分算法状态转移矩阵高精度计算的特点,能够获得准确的辨识模型,通过二次型函数极值理论建立了仅关于谱参数的优化目标函数,空间参数由谱参数解析计算得到,实现了谱参数与空间参数的解耦.

**致谢** 本文作者衷心感谢文献[17]作者提供的高速受电弓模态辨识试验数据对本文的帮助.

### 参考文献(References):

- [1] 唐颖卓, 卢光宇, 蔡国平. 基于绳索作动器的大型太空望远镜桁架结构的振动主动控制[J]. 应用数学和力学, 2022, **43**(2): 123-131. (TANG Yingzhuo, LU Guangyu, CAI Guoping. Active vibration control of truss structures for large space telescopes based on cable actuators[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(2): 123-131. (in Chinese))
- [2] 李帅, 向致谦, 潘坚文, 等. 高拱坝模态参数识别综述[J]. 地震工程与工程振动, 2023, **43**(2): 1-12. (LI Shuai, XIANG Zhiqian, PAN Jianwen, et al. Review on modal parameters identification for high arch dams[J]. *Earthquake Engineering and Engineering Dynamics*, 2023, **43**(2): 1-12. (in Chinese))
- [3] 姚志远, 汪凤泉, 赵淳生. 环境自然激励下一种结构损伤在线识别方法[J]. 应用数学和力学, 2005, **26**(2): 246-252. (YAO Zhiyuan, WANG Fengquan, ZHAO Chunsheng. A method of online damage identification for structures based on ambient vibration[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2005, **26**(2): 246-252. (in Chinese))
- [4] REYNDERS E. System identification methods for (operational) modal analysis: review and comparison[J]. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 2012, **19**(1): 51-124.
- [5] SEYBERT A F. Estimation of damping from response spectra[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1981, **75**(2): 199-206.
- [6] RICHARDSON M H, FORMENTI D L. Global curve fitting of frequency response measurements using the rational fraction polynomial method[C]//*Proceeding of 3rd IMAC*. Orlando, 1985: 390-397.
- [7] PEETERS B, VAN DER AUWERAER H, GUILLAUME P, et al. The PolyMAX frequency-domain method: a new standard for modal parameter estimation? [J]. *Shock and Vibration*, 2004, **11**(3/4): 395-409.

- [8] CUNHA Á, CAETANO E. Experimental modal analysis of civil engineering structures[J]. *Sound and Vibration*, 2006, **6**(40): 12-20.
- [9] BROWN D L, ALLEMANG R J, ZIMMERMAN R, et al. Parameter estimation techniques for modal analysis [J]. *SAE Transactions*, 1979, **88**: 828-846.
- [10] VOLD H, KUNDRAT J, ROCKLIN G T, et al. A multi-input modal estimation algorithm for mini-computers [J]. *SAE Transactions*, 1982, **91**: 815-821.
- [11] IBRAHIM S R, MIKULCIK E C. A method for the direct identification of vibration parameters from the free response[J]. *The Shock and Vibration Bulletin*, 1977, **47**(4): 183-198.
- [12] JUANG J N, PAPPAS R S. An eigensystem realization algorithm for modal parameter identification and model reduction[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1985, **8**(5): 620-627.
- [13] XU X, ZHANG H, WEI X, et al. Experimental study on natural vibration characteristics of double-strip high-speed pantograph head[J]. *Experimental Mechanics*, 2023, **63**(6): 995-1001.
- [14] KASAI T, YAMAGUCHI I, IGAWA H, et al. On-orbit system identification experiments of the engineering test satellite-VIII[J]. *Transactions of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences, Space Technology Japan*, 2009, **7**(ists26): 79-84.
- [15] 王亮, 蔡毅鹏, 南宫自军. 高速飞行器飞行模态辨识技术及验证研究[J]. *强度与环境*, 2022, **49**(4): 23-28. (WANG Liang, CAI Yipeng, NANGONG Zijun. Application and verification of the high speed aircraft's operational mode identification[J]. *Structure & Environment Engineering*, 2022, **49**(4): 23-28.(in Chinese))
- [16] YANG J H, LAM H F. An innovative Bayesian system identification method using autoregressive model[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2019, **133**: 106289.
- [17] 许向红, 罗羿, 张颢辰, 等. 基于模态实验的单滑板受电弓全柔模型修正方法[J]. *力学学报*, 2023, **55**(8): 1753-1760.(XU Xianghong, LUO Yi, ZHANG Haochen, et al. Full flexible model updating of single-strip pantograph based on modal test[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2023, **55**(8): 1753-1760.(in Chinese))