

基于模态分解的转静干涉平面叶栅 非定常流场时空分布分析*

周向鑫¹, 李 滕², 杨维建¹,
林永康¹, 张 涛³, 姚建尧¹

(1. 重庆大学 航空航天学院, 重庆 400044;
2. 北京航空航天大学 航空发动机研究院, 北京 102206;
3. 太行实验室, 成都 610213)

(我刊编委严波推荐)

摘要: 由转静干涉引起的非定常流动是造成叶片/叶盘强迫响应的主要激励来源,更加准确和全面地表征转静干涉非定常流场的时空分布特征对流体耦合振动分析具有重要的意义,利用本征正交分解(POD)和动力学模态分解(DMD)等模态分析方法可以有效地从复杂流动系统中识别和提取激励成分.该文以典型的1.5级涡轮平面叶栅为例,采用POD方法和DMD方法获得二维转静干涉流场的流动模态和时间系数,对叶片通道流场的时空分布特性进行分析.结果表明,两种模态分解方法均能有效辨识流动特征,实现流场的合理减缩.利用模态能量排序的POD方法可以准确识别占据流场主导地位的流动结构;而基于频率特征的DMD方法可以快速识别流场中各阶模态对应的激振频率和激励阶次.模态分解方法相较于传统FFT方法,不受采样位置的影响,兼顾全场流动识别和局部特征分析,可为叶轮机械非定常激励耦合振动快速分析提供帮助.

关键词: 瞬态流场; 本征正交分解; 动力学模态分解; 转静干涉; 非定常激励

中图分类号: V211.3 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.450121

Spatiotemporal Characterization of Unsteady Cascade Flow Fields Driven by Rotor Stator Interaction Using Modal Decomposition

ZHOU Xiangxin¹, LI Teng², YANG Weijian¹,
LIN Yongkang¹, ZHANG Tao³, YAO Jianyao¹

(1. College of Aerospace Engineering, Chongqing University,
Chongqing 400044, P.R.China;

2. Research Institute of Aero-Engine, Beihang University, Beijing 102206, P.R.China;

3. Taihang Laboratory, Chengdu 610213, P.R.China)

(Recommended by YAN Bo, M.AMM Editorial Board)

* 收稿日期: 2024-04-29; 修订日期: 2024-09-04

基金项目: 国家科技重大专项(J2022-IV-0010-0024);中央高校基本科研业务费(2023CDJXY-007)

作者简介: 周向鑫(1993—),男,硕士生(E-mail: xiangxinzhou@cqu.edu.cn);

姚建尧(1981—),男,教授,博士,博士生导师(通讯作者. E-mail: yaojianyao@cqu.edu.cn).

引用格式: 周向鑫,李滕,杨维建,林永康,张涛,姚建尧.基于模态分解的转静干涉平面叶栅非定常流场时空分布分析[J].应用数学和力学,2025,46(2):223-240.

Abstract: The unsteady flow caused by the rotor-stator interaction is the primary excitation source for the forced response of the blade/blisk. A more accurate and comprehensive characterization of the spatiotemporal features of the rotor-stator interaction unsteady flow field is of significance for the analysis of fluid-structure interaction vibrations. The typical modal analysis methods such as the proper orthogonal decomposition (POD) and the dynamic mode decomposition (DMD) were employed to effectively identify and extract the excitation components from complex flow systems. With a 1.5-stage turbine cascade as the example, the POD method and the DMD method were used to obtain the flow modes and temporal bases of the 2D rotor-stator interaction flow field, and analyse the spatiotemporal characterization of the blade channel. The results show that, the both modal decomposition methods can effectively identify the flow characteristics and realize the reasonable reduction of the flow field. The POD method, with the modal energy ranking, can accurately identify the dominant flow structures in the flow field. Meanwhile, the DMD method based on frequency characteristics can rapidly pinpoint the excitation frequencies and engine orders of each mode in the flow field. Compared to the fast Fourier transform (FFT) methods, the modal decomposition techniques are not influenced by the sampling locations and effectively combine full-field flow recognition with local feature analysis. This approach facilitates swift analysis of unsteady excitation-coupled vibrations in turbomachinery.

Key words: transient flow field; proper orthogonal decomposition; dynamic mode decomposition; rotor-stator interaction; unsteady excitation

0 引 言

叶片高周疲劳断裂是造成叶片断裂故障的主要原因之一,其中叶轮机中复杂的非定常流动是叶片振动的主要激励源.实践表明,在发动机研制、使用和发展中,风扇/压气机和涡轮结构系统因流体诱导振动导致的叶片高循环疲劳失效问题,已成为影响发动机结构完整性和可靠性的重大关键问题之一^[1].在各类非定常激励中,转静干涉,即由上游叶片排尾迹、下游叶片排势流扰动造成的周期性非定常流动是诱发叶片强迫振动的主要原因.

在传统的叶片强迫振动响应分析中,往往采用 Campbell 图进行共振分析,简单地由转速、叶片数及其他可能引起低阶激励的因素来确定非定常流场的激励频率和空间分布特征(激励阶次(engine order, EO)).随着现代航空发动机性能需求和设计水平的不断提高,气动负荷更大,同时叶盘结构也越来越轻巧,导致流固耦合程度更高,振动问题也更为突出,此时,单纯由叶片数来确定激励的时空分布特征已不能满足精细化设计分析的要求,迫切需要采用基于非定常流场数据的激励特征分析方法.

在转静干涉非定常流场特征分析方面,国内外学者多通过分析流场中某点非定常激励的时间历程、频谱等获得局部信息,或者通过升力、力矩的计算来得到宏观信息.Mailach 等^[2]和周正贵等^[3]通过叶片表面积分的形式获得了叶升力和力矩,并对时域历程进行频谱分析,获得了非定常激励的主要频率成分为叶片通过频率的倍频.王英锋等^[4]、杨彤等^[5]、张小博等^[6]分别对不同叶高、不同弦向位置特征点处的非定常压强做了频谱分析,分别用来分析不同工作状态下激励变化情况、叶型改变对非定常气动力的影响、转子叶片非定常激励频谱特征等.Li 等^[7]在气动阻尼分析中考虑叶片振动的情况下,对叶片表面非定常气动力进行了频谱分析,讨论了叶片振动对频谱的影响.Monk 等^[8]通过非定常气动力的频谱分析,说明了静子非对称设计在气动减载中的应用效果.

除前述两类主要方法外,国内外学者还根据流致振动分析需求,提出了其他非定常激励的评价方法.Mailach 等^[9]基于其研究^[2],在考虑上下游流动条件和叶片面积的基础上,给出了升力和力矩的无量纲形式,并应用此方式衡量了时序效应对多级压气机叶片非定常气动力的影响^[10].Furth 等^[11]将激励定义为某一频率的气动力,将广义力 Fourier 变换后的激励幅值与模态点积并进行归一化,与模态激励类似.该方法与振动模态关联,能够定量表征某一频率下非定常激励的空间分布及其影响.Liu 等^[12]通过图形方式给出了某一叶高处非定常压强的时空分布规律,但未给出定量表征方法.

近年来,用来描述轴流压气机气动噪音的 Tyler-Sofrin 模态^[13]也被用来表征多级叶轮机中转静干涉非定

常流场的时空分布特征.该方法利用发动机内流时间和空间的周期性,将非定常流场在旋转坐标系下表示成为一系列具有不同节径数的行波的线性叠加形式.Adamczyk^[14]和 Lengani 等^[15]分别给出了不同谐波数和周向模态数所对应系数的求解方法,获得了不同模态下非定常压强的幅值等信息.Courtiade 等^[16]提出了一种时间、空间双重模态分解方法,获得了不同截面处壁面静压的时空分布图.由于 Tyler-Sofrin 模态能够有效地描述多级叶轮机的非定常激励,其也被用于失谐叶盘的强迫响应分析^[17-18].

尽管目前国内外学者已经提出了多种基于流场数据的非定常激励分析评价方法,但仍缺乏同时获得全场宏观时空分布特征的方法,而基于特征提取技术的模态分解技术为非定常流场的时空分布特征分析提供了新工具.典型的方法包括本征正交分解(proper orthogonal decomposition, POD)和动力学模态分解(dynamic mode decomposition, DMD)两类.POD 方法通过对复杂流动状态主能量模态的提取,选择一组最佳描述整体流动特性的正交基来实现流场的低维度近似描述^[19],广泛应用于包括流体分析在内的各种动力学系统降阶分析^[20-22].DMD 方法将流动的发展视为线性动力学过程,并对整个过程的流场快照(snapshot)进行特征分析,以此获得描述流场特性的各阶模态及其对应的特征值(或 Ritz 值)^[23-24].值得注意的是,相较于基于发动机内部转静干涉流场的时空周期性假设获得的 Tyler-Sofrin 模态,POD 模态和 DMD 模态是通过数据“快照”分析获得的“含能”模态,因此后两者更具一般性.总的来说,POD 模态的主要目的是以最少的模态捕捉最大的能量,而 DMD 模态侧重于揭示数据的时间动态特征,每个模态代表特定的动态行为.

POD 和 DMD 方法在叶轮机械转静干涉流场分析中已经得到了应用,主要集中在减缩模型分析方面.Epureanu 等^[25-26]基于 POD 方法建立了振荡叶栅在频域内的减缩模型,有效预测了不同减缩频率和叶片间相位角情况下叶片的压力系数和升力系数.Li 等^[27-28]和 Wei 等^[29]基于 POD 建立了参数化的减缩模型,能够快速分析不同来流条件、不同时序位置情况下的非定常流场.而 Kou 等^[30]和 Hu 等^[31]基于 DMD 方法,同样构建了可用于叶轮机非定常流场的参数化减缩模型.Clark 等^[32]针对非同步振动问题,基于谐波平衡法(harmonic balance)和 POD 建立了非定常流动的减缩模型,有效预测了非同步振动中的“锁定”现象.

POD 和 DMD 方法在转静干涉非定常激励特征分析中也有应用.Cizmas 和 Palacios^[33]以单级涡轮的转静干涉流场为对象,基于 Galerkin 法建立了流动分析减缩模型,分析了 POD 模态的特征和流场重构精度.Rochuon 等^[34]以高速、高压离心式压气机为对象,分别对数值结果和试验结果进行了 POD 分析.王磊等^[35]以对转压气机为研究对象,利用 POD 方法捕捉到上下游叶顶非定常流场的主导结构来源.Qiao 等^[36]分析了 T106 涡轮叶栅的 POD 模态,解释了上游尾迹和泄漏流对叶栅流动性能的影响.Suzuki^[37]利用 DMD 方法分析了压气机中非定常的级间流动模态,并探讨了对应模态的不稳定性所带来的气动噪声的变化.Liu 等^[38]和 Song 等^[39]分别利用 DMD 方法提取了叶片脱落涡的模态,并分析了其对多级压气机振动响应以及叶尖流动失稳的影响.De Almeida 等^[40]结合实验中的预失速扰动现象,通过整周压气机级模型数值计算和 DMD 方法,讨论了预失速扰动和相关非定常流动结构的关系.结果表明,POD 模态和 DMD 模态可以方便地表征非定常激励时空分布特征,并能分辨出尾迹、势流等对激励的贡献程度.

目前,流动模态分析已经成为国内外学者研究的热点,为流动形态分析、数据压缩、降阶模型建立等提供了理论基础^[41],其在发动机内部转静干涉流场分析中也有广阔的应用前景.本文将介绍非定常流场的 POD 和 DMD 分析方法,并以 1.5 级涡轮二维平面叶栅为例,说明转静干涉流场的时空分布特征.

1 流场的模态分解方法

本文采用的 POD 和 DMD 方法均利用了流场各个时刻的快照形成数据集,从组集的流场矩阵中提取特征信息.接下来介绍两类方法的原理和实施过程.

1.1 基于快照的 POD 方法

给定 N 个离散时刻下的流场快照,以各网格点的压强为例,定义其在第 j 个离散时间步的压强分布为 $\mathbf{u}(x, t_j)$, $j \in [1, N_t]$.构造快照矩阵 \mathbf{U} 如下:

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{u}_k \quad \cdots \quad \mathbf{u}_N], \quad (1)$$

其中 \mathbf{u}_j 是第 j 个时间步的快照,为一个 n 维向量.将其投影到一个 m 维的正交子空间,则有

$$\mathbf{u}(x, t_j) = \sum_{m=1}^M a_m(t_j) \boldsymbol{\phi}_m(x), \quad j \in [1, N_t], \quad (2)$$

式中 $\boldsymbol{\phi}_m(x)$ 为流场的 POD 模态, $a_m(t_j)$ 为其对应的时间系数. 该子空间的规范正交基应满足数据集到子空间的映射误差最小, 即

$$\boldsymbol{\Phi} = \arg \min \left[\frac{1}{N_t} \sum_{j=1}^{N_t} \left| \mathbf{u}(x, t_j) - \sum_{m=1}^M a_m(t_j) \boldsymbol{\phi}_m(x) \right|^2 \right]. \quad (3)$$

该式可以转变为求解最大值约束问题:

$$\boldsymbol{\Phi} = \arg \max \left[\frac{1}{N_t} \sum_{j=1}^{N_t} |(\mathbf{u}(x, t_j), \boldsymbol{\Phi})|^2 \right], \quad (\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Phi}) = 1, \quad (4)$$

其中 $(\mathbf{u}(x, t_j), \boldsymbol{\Phi})$ 表示 $\mathbf{u}(x, t_j)$ 和 $\boldsymbol{\Phi}$ 的内积. 针对式(4)的约束优化问题, 可以通过 Lagrange 乘子法求解. 构建 Lagrange 方程:

$$J(\boldsymbol{\Phi}) = \sum_{j=1}^{N_t} (\mathbf{u}(x, t_j), \boldsymbol{\Phi})^2 - \lambda ((\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Phi}) - 1), \quad (5)$$

式中 λ 为 Lagrange 乘子. 将方程对 $\boldsymbol{\Phi}$ 求偏导并令其为零, 便能得到最优解:

$$(\mathbf{U}^T \mathbf{U} - \lambda \mathbf{I}) \boldsymbol{\Psi} = \mathbf{0}. \quad (6)$$

引入相关矩阵 $\mathbf{Q} = \mathbf{U}^T \mathbf{U}$. $\boldsymbol{\Psi}$ 为 \mathbf{Q} 的特征向量矩阵, 其列向量 $\boldsymbol{\Psi}_i$ 与实特征值 λ_i 相对应. 将 $\boldsymbol{\Psi}$ 进一步按列向量的二范数归一化, 便获得了所求的 POD 基底 $\boldsymbol{\Phi}$. 由于 $\boldsymbol{\Phi}$ 正交且归一, 描述时域变化的投影系数矩阵 \mathbf{A} 可由下式求得:

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{P}. \quad (7)$$

λ_i 所表征的物理意义为向量 $\boldsymbol{\Psi}_i$ 对快照矩阵的贡献. Sirovich^[19] 认为特征值之和代表了流动的总能量, 各个模态对应的特征值代表了该模态在流场总能量中的占比, 特征值越大, 对应模态在描述流场的动态特征中就越重要, 故引入广义“能量”的概念来评估 POD 基底所表征的快照集合特征的多少:

$$E_{\text{POD}} = \frac{\sum_{m=1}^M \lambda^{(m)}}{\sum_j \lambda^{(j)}}. \quad (8)$$

对于我们研究的具有时空周期性的非正常流动, 少数 POD 基底能够覆盖大部分“能量”, 即原始数据的关键信息. 因此, 通过少量低阶模态就能有效捕捉流场的动态特性, 并实现流场的降阶描述.

1.2 基于快照的 DMD 方法

同样, 以各网格节点的压强为例, 有 N 个离散时刻下的流场快照, 相邻两个快照时间间隔为 Δt , 分别定义快照序列矩阵 \mathbf{X} 和 \mathbf{Y} :

$$\mathbf{X} = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{u}_{N-1}], \quad (9)$$

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{u}_2 \quad \mathbf{u}_3 \quad \cdots \quad \mathbf{u}_N]. \quad (10)$$

基于线性假设, 那么存在一个映射矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times M}$, 使得任意一个时刻的快照满足

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{A} \mathbf{u}_i, \quad (11)$$

即有

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{A} \mathbf{u}_1 \quad \mathbf{A} \mathbf{u}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{A} \mathbf{u}_{N-1}] = \mathbf{A} \mathbf{X}. \quad (12)$$

对于秩为 r 的矩阵 \mathbf{X} , DMD 方法利用 \mathbf{X} 矩阵的奇异值分解来找到矩阵 $\tilde{\mathbf{A}} \in \mathbb{C}^{r \times r}$, 以此代替高维系数矩阵 \mathbf{A} , 即

$$\mathbf{X} = \mathbf{U} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{W}^H, \quad \mathbf{U} \in \mathbb{C}^{M \times r}, \quad (13)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{U}^H, \quad \mathbf{U}^H \mathbf{U} = \mathbf{I}, \quad (14)$$

其中 $\boldsymbol{\Sigma}$ 为奇异值对角阵, \mathbf{I} 为单位矩阵. 因矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 的计算可以看作最小化问题:

$$\underset{\tilde{\mathbf{A}}}{\text{minimize}} \|\mathbf{Y} - \mathbf{U} \tilde{\mathbf{A}} \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{W}^H\|_{\text{F}}^2, \quad (15)$$

故可将 \mathbf{A} 近似为 $\tilde{\mathbf{A}}$, 而

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{U}^H \mathbf{Y} \mathbf{W} \mathbf{\Sigma}^{-1}. \quad (16)$$

对 $\tilde{\mathbf{A}}$ 进行特征分解, 定义 DMD 模态^[42] 为

$$\Phi_j = \frac{1}{\mu_j} \mathbf{Y} \mathbf{W} \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{z}_j, \quad \mu_j \neq 0, \quad (17)$$

式中 μ_j 为第 j 个模态的 Ritz 特征值, \mathbf{z}_j 为对应的特征向量^[43]. 同时, 流动的增长率 g_j 和频率 ω_j 分别为

$$g_j = \text{Re}(\ln \mu_j) / \Delta t, \quad (18)$$

$$\omega_j = \text{Im}(\ln \mu_j) / \Delta t. \quad (19)$$

为了表征 DMD 模态相对占比, 同样利用模态能量对各阶动力学模态进行排序. DMD 模态的幅值可以被解释为该模态在初始时刻对流场的贡献大小, 因此幅值较大的模态可以认为在流动中占据较高的“能量”或重要性. 定义模态振幅^[44] 为

$$\alpha_j = \mathbf{z}_j^{-1} \mathbf{U}^H \mathbf{u}_1, \quad (20)$$

模态能量为每一时刻每一点振幅的平方和.

利用 DMD 方法进行模态分解的最大优势是分解所得到的模态具有单一的频率和增长率, 在分析动力学线性问题和周期性流动问题时非常合适.

2 转静干涉非定常流场模态获取方法

本文选取 1.5 级 Aachen 涡轮二维平面叶栅作为研究对象, 分别利用 POD 方法和 DMD 方法分解和重构流场, 通过模态能量分布和重构误差对重构流场所需模态阶次进行表征和评估, 同时也证明了基于 POD 和 DMD 的流场低阶分解的可靠性.

2.1 分析模型及流场计算方法

采用 CFD 软件求解二维非定常 RANS 方程以获取二维 1.5 级流场数值解并分析其时空分布特征. 转静干涉流场分析采用单级 Aachen 涡轮模型并复制其静子叶片排组成 1.5 级模型, 其中几何参数如表 1 所示.

表 1 Aachen 涡轮几何参数

Table 1 Aachen turbine geometric parameters

geometric parameter	stator blade	rotor blade
number of blades	36	41
chord length /m	0.062	0.06
blade width /m	0.044 25	0.054
aspect ratio	0.887	0.917
blade pitch /m	0.047 6	0.041 8
tip diameter /m	0.6	0.6
rotation speed /(r/min)	0	3 500

为了获得不同的上下游叶片通过频率, 从而有效辨识上下游流场所带来的激励成分, 通过修改动叶、静叶数量和按比例改变栅距实现叶栅流道的约化, 采用叶片数量为 1:1:1 和 6:7:7 的流道模型进行对比. 其中 1:1:1 模型将静子叶片数目修改为 41 片, 6:7:7 模型将转子叶片和第 3 排静子叶片数目修改为 42 片. 在网格无关性分析中, 我们对比了如表 2 所示的多种网格密度.

表 2 网格无关性验证

Table 2 Mesh-independent verification

mesh scheme	number of meshes	minimum mesh edge length/m
mesh A	448 263	2.292×10^{-4}
mesh B	501 563	1.779×10^{-4}
mesh C	654 499	1.146×10^{-4}

通过分析特征截面的压力变化趋势, 由图 1 可以看出, mesh B 方案已满足收敛性要求, 考虑计算效率最终确定了采用的网格边长为 1.779×10^{-4} m, 流体网格如图 2 所示.

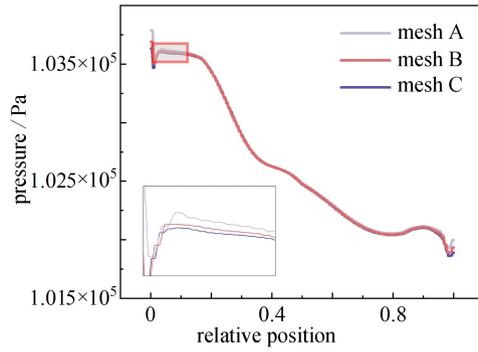


图1 不同网格特征截面压力对比

Fig. 1 Comparison of pressures in characteristic sections of different meshes

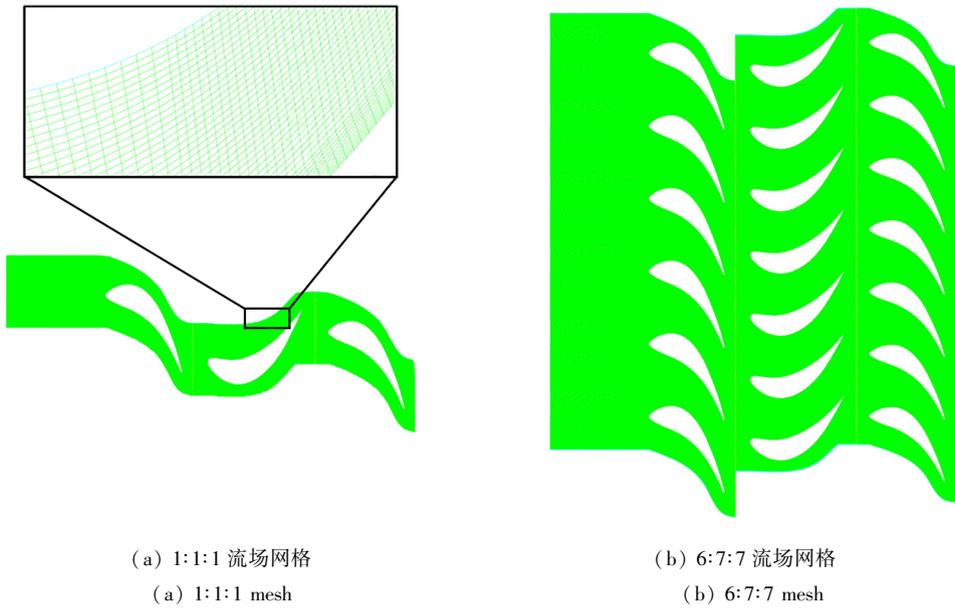
(a) 1:1:1 流场网格
(a) 1:1:1 mesh(b) 6:7:7 流场网格
(b) 6:7:7 mesh

图2 1.5级二维叶栅模型网格

Fig. 2 The 1.5-stage 2D cascade mesh grid

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同。

使用 FLUENT 软件进行非定常计算分析,湍流模型采用基于 $k-\omega$ 的 shear stress transport 模型,选取 7 个转子通道通过周期为一个计算周期,每个计算周期分为 490 个时间步,对应的物理时间步长为 $5.971\ 43 \times 10^{-6}$ s。进口总压为 120 kPa,进口总温为 300 K,出口静压按 90 kPa 给定。

2.2 转静干涉流场流动模态分解和重构

我们以 1:1:1 流场为例,利用数值仿真获得二维非定常流场。为了确保计算结果达到稳定状态,以稳态计算结果作为非定常计算的初场以加速收敛,并在每个时间周期内检测压力的变化,如图 3 所示。在计算 2 个周期后,监测点压力基本处于周期性变化,可以认为处于计算稳定的状态。

我们提取计算稳定后的 1 个周期,共 490 个时间步长的瞬态压力场组成快照矩阵,分别进行 POD 和 DMD 分析。

2.2.1 POD 模态分解和流场重构

通过 1.1 小节的 POD 模态分解方法,对流场进行特征分解。利用式(8)计算各阶模态在流动结构中的能量占比可得,转子区域流场的第 1 阶模态占比为 99.999 6%。这是因为叶轮机械设计的主要目的便是使流场中的流动尽可能地提高效率、减少流动损失,那就要求流动结构中尽量减少流动分离。从流动模态的角度来看,第 1 阶模态能量占比高表明转静干涉引发的涡轮叶栅流动中的非定常脉动能量相较于稳定流动能量分量较低,其表征的流动结构正是叶轮机械中效率最高、成分最多的流场结构,而后续模态则代表着流场中占

比不同的各类非定常脉动成分。

为分析转静干涉对流动的影响,排除时均流动的干扰,应更加关注第 2 阶到更高阶的模式分布.这里计算第 2 阶到第 9 阶模态对应的能量分布,第 2、3 阶模态对应能量占排除第 1 阶后总能量的 98.02%。如图 4 所示,非定常流动的主要能量集中在第 2、3 阶,后续流场结构的能量占比快速下降。

由于叶轮机转静干涉本身空间和时间上的周期特征,相邻两阶模态能量相近,模态的空间分布也呈现出正交性,如后文(见 3.2.1 小节图 8)表示的压强模态所示.这一性质与叶盘结构重频所对应的振动模态类似。

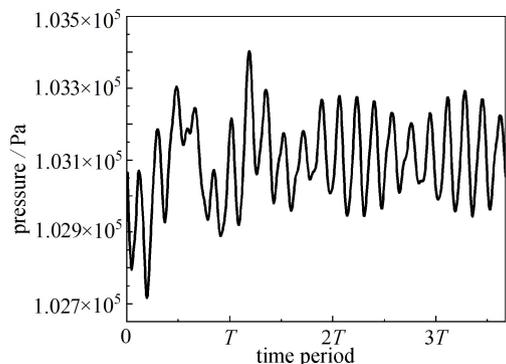


图 3 非定常计算监测点压力变化

Fig. 3 Pressure changes at the monitoring point during calculation

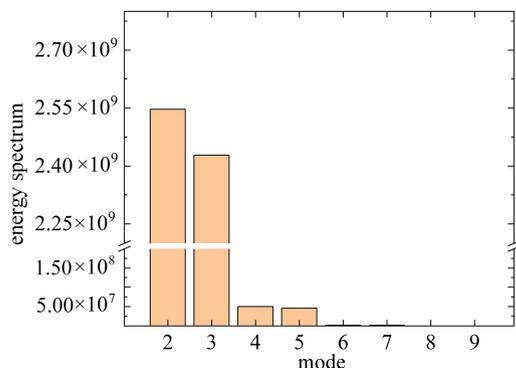


图 4 第 2 至 9 阶 POD 模态能量分布

Fig. 4 Energy distribution of the 2nd to 9th modes of POD

图 5 给出了某一时刻通过前 9 阶模态重构成的流场压力场与原始流场对比和该时刻重构模型的误差分布云图.重构误差计算如下,定义误差 η :

$$\eta = \frac{\mathbf{P}_{\text{POD}} - \mathbf{P}_{\text{FM}}}{\mathbf{P}_{\text{FM}}} \times 100\%, \quad (21)$$

其中 \mathbf{P}_{POD} 表示由 POD 模态重构得到的压力场值, \mathbf{P}_{FM} 表示非定常 CFD 计算出的数值解。

前 9 阶 POD 模态重构的模型误差在 -0.050% 到 0.086% 之间,说明前 9 阶模态已经包含了流场数据的绝大部分信息.同时从图 5(c) 中可以看出,重构流场的误差主要集中在转子流道与静叶的前后交界处和叶盆前缘受尾迹影响部分,说明被舍去的高阶非定常成分主要来自于上游的尾迹和下游的势流,并且上游的影响占比相较于下游更大。

为了进一步说明 POD 模态对流场特征提取的精确和有效,图 5(d) 给出了动叶表面压力系数 CFD 解和 POD 重构值的对比.压力系数 C_p 通过下式得到:

$$C_p = \frac{p - p_0}{\frac{1}{2} \rho V_0^2}, \quad (22)$$

其中 p 为表面静压, p_0 为远场静压, ρ 为流体密度, V_0 为远场流速。

可以发现,POD 方法重构获得的叶片表面压力分布与数值计算结果比较吻合,即使在压力变化剧烈的扰动处也能较好地贴合计算结果.综上,利用 POD 方法进行全场和局部特征描述均非常有效。

2.2.2 DMD 模态分解和流场重构

利用相同的快照矩阵,基于 1.2 小节的 DMD 分解方法进行分析.结合式(20)计算了 DMD 各阶模态相对能量,并对其进行排序,可以发现转子区域流场的第 1 阶模态占比为 99.999 8%。这是由于 DMD 方法所提取出的第 1 阶模态为静态模态,接近平均流场.而该算例中相较于非定常成分而言,时均流的占比较大,故与 POD 方法获得的模态能量分布类似,第 1 阶模态由主导流动的平均流场所构成.同样排除时均流动的影响,计算第 2 阶到第 9 阶模态对应的能量分布,第 2、3 阶模态对应能量占排除第 1 阶后总能量的 97.85%。如图 6 所示,非定常流动结构的能量同样集中在第 2、3 阶,后续流场结构的能量占比快速下降。

在 DMD 模态能量分布中,也出现了类似 POD 方法分解周期性流场形成的相邻模态能量相似的分布情况,但其原理并不相同.由线性代数理论可知,对于构成快照矩阵的实数数据集,DMD 算法产生的非实数特

征值为成对的共轭复数,其对应的相邻模态具备相似的动态特性,仅其频率相位不同。

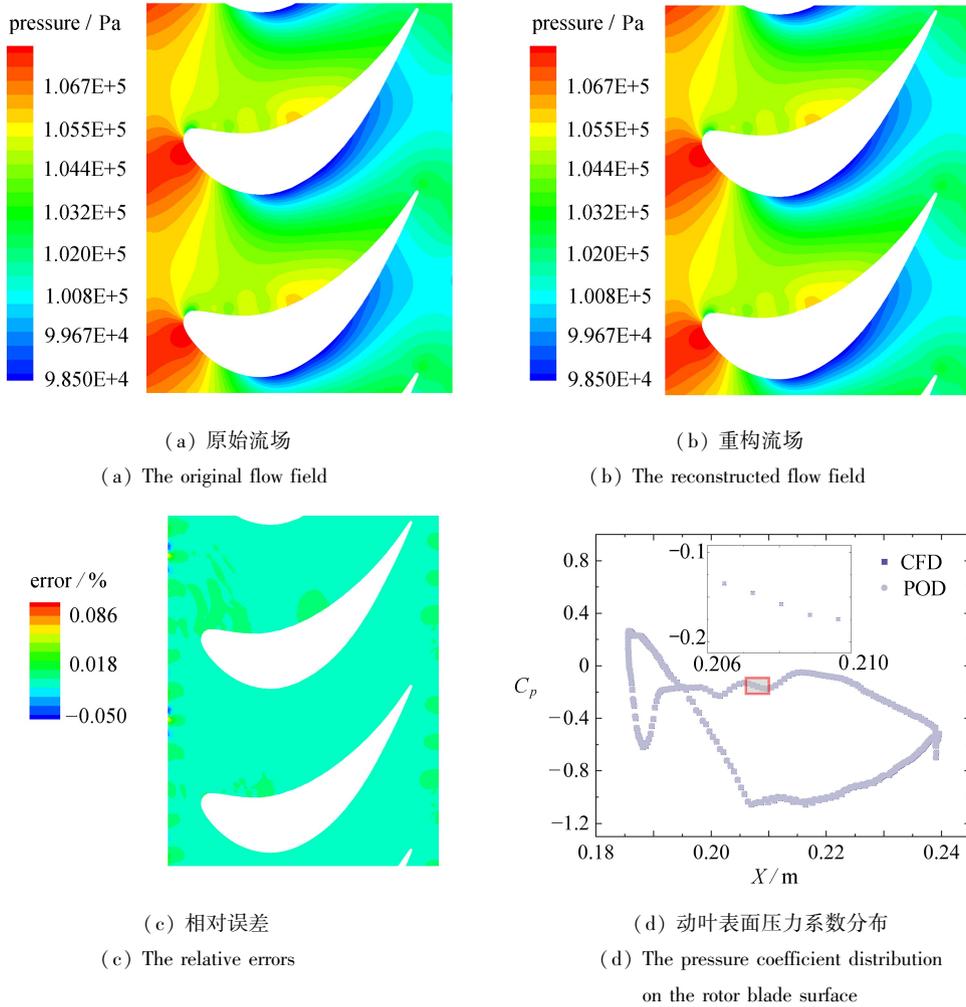


图5 某时刻转子压力场 POD 重构模型

Fig. 5 The reconstruction POD model for the rotor pressure field

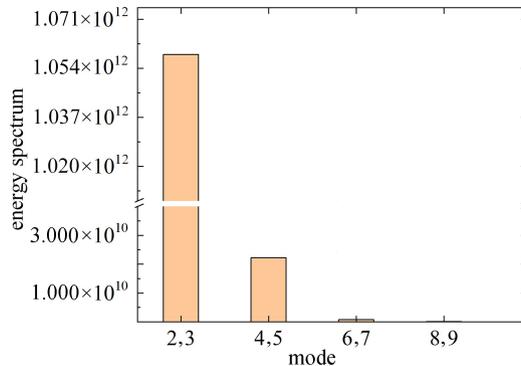


Fig. 6 Energy distribution of the 2nd to 9th modes of DMD

参照式(21)对DMD模态流场重构误差进行计算,发现其前9阶模态重构流场的相对误差在 -0.054% 到 0.098% 之间.从图7给出的重构流场及相对误差分布的对比可知,与POD模态重构类似,对比相同的原始流场,大部分的误差同样集中在受上下游扰动影响的转静交界面和叶盆处.图7(c)展示了动叶表面压力系数CFD解和DMD重构值的对比,可以看出,其对于局部流场扰动的描述误差稍大于POD方法,但整体对叶片表面压力系数的表征仍然相当准确。

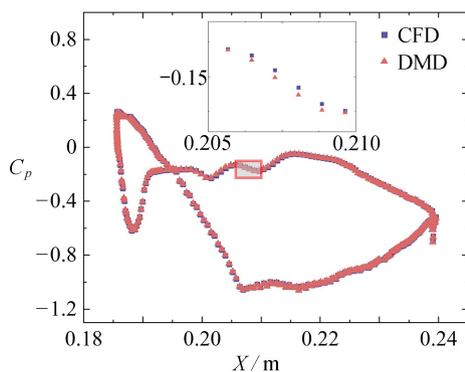
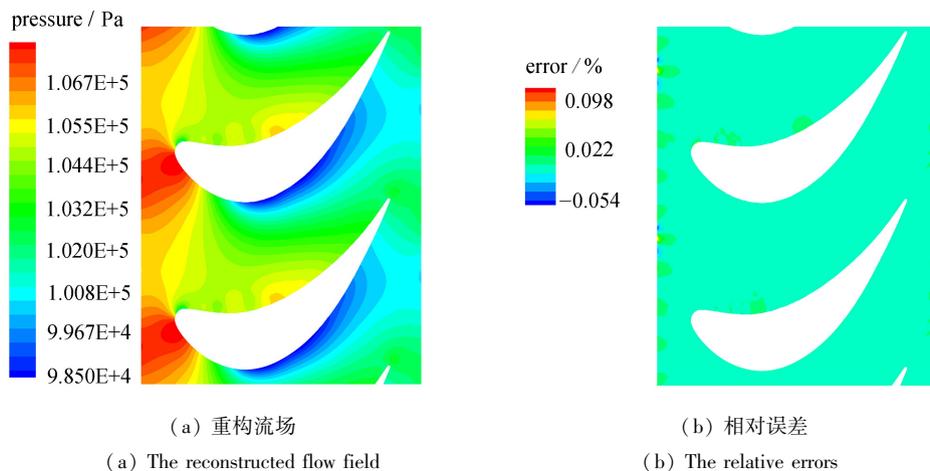


图 7 某时刻转子压力场 DMD 重构模型

Fig. 7 The reconstruction DMD model for the rotor pressure field

2.2.3 两种模态分解方法对比

POD 和 DMD 两种模态分解方法虽然在技术上有相似之处,但是由于两者在结果上有所不同,故应用于耦合振动分析时各有侧重。

从模态结果来看:POD 模态的优点是通过能量排序能快速识别流场中主导的流动形态,同时计算成本相对较低;其缺点是单个模态可能包含多个频率成分,在耦合共振分析时应提取主要频率。DMD 模态的优点是可以获得单一频率的模态和对应的增长特征,在耦合共振分析时更清晰直观;其缺点是模态按各单一频率成分的振幅排序,主要流动结构可能被分离为更多的模态。

从计算效率来看,模态分析方法的计算成本主要在于分解效率,即从快照样本到获得模态的时间消耗。利用高性能计算平台(AMD EPYC 3.5 GHz 16 核 32 线程处理器,512 GB 内存)运行模态分解程序分析同样数量的样本,POD 方法获得模态需要 7.88 s,而 DMD 方法需要 284.83 s。究其原因是 DMD 算法中为了获取各阶模态排序,写入循环计算了各阶模态振幅,而 POD 方法对模态进行排序使用的是其特征值,无需额外的计算时间。

综合上述优缺点,当需要有效地降低数据维度和快速获取流场中突出的激励来源时,应用 POD 方法更合适;而当需要详细解析流场的动态特性、预测流场未来状态或分析系统响应时,可以选用 DMD 方法作为分析工具。

3 基于模态分解的转静干涉流场时空分布特征分析

这里仍以 1.5 级涡轮叶栅为例,通过对流场模态、时间系数以及频谱的分析进一步探究非定常流场的时空分布特征,获得叶盘振动分析中的频率和激励阶次等重要信息。

3.1 叶轮机机械流固耦合共振条件

复杂的叶轮机机械内流场使得叶盘的流固耦合分析变得困难,在流致振动分析中,我们希望能够探究流体激励下流场在结构振动中所起的贡献.根据线性振动理论,叶盘发生耦合共振需要满足“三重点”条件^[45-46],即当系统的激振力频率等于叶盘固有频率,且激励阶次等于叶盘振型节径数时,将会激起叶盘共振.因此在叶轮机机械流固耦合问题中,当需要对流场激励特征进行分析时,一方面需要确定流场激励的频率,另一方面需要识别流场激励阶次.

激励阶次是描述激励空间分布的重要参数.首先给出其定义,叶盘结构各扇区简化的激励形式可认为是幅值相等且存在一个固定相位差的行波激励 $\mathbf{F}(t)$:

$$\mathbf{F}(t) = A e^{i\omega t} \{ 1 \quad e^{iE\theta} \quad \dots \quad e^{i(N-1)E\theta} \}^T, \quad (23)$$

其中 A 为激励幅值, $\theta = 2\pi/N$ 为扇区所对应的角度, i 是虚数单位, E 为激励阶次.

需要特别说明的是,一般在叶盘流固耦合分析时,利用传统的 FFT 分析方法仅能获得流场中各点孤立的频率成分和节径成分,而流场在各处的流动结构多样、成分复杂,使得各点获得的频率成分混杂、激励阶次片面,无法对流场激励特征解耦,从而无法准确全面地利用“三重点”条件进行共振判断.在后文中,将详细论证利用模态分解方法识别流场激励频率和激励阶次.

3.2 非定常流场时空特征分析

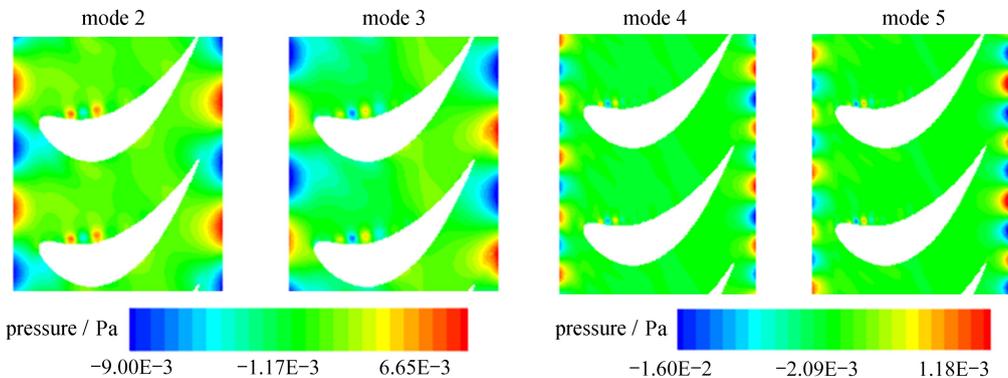
分别对 1:1:1 流场和 6:7:7 流场的数值计算结果组成快照矩阵进行 POD 和 DMD 分析.基于模态能量分布和重构误差对重构流场进行表征和评估,选取代表性模态对非定常流场的时空特征进行分析.

3.2.1 基于 POD 方法的时空特征分析

除去代表时间的平均流场的第 1 阶模态,第 2 阶和第 3 阶作为对称结构的相邻模态,其空间模态分布也具有相似性.在 POD 分解中,空间模态代表了组集的数据矩阵中关键空间特征,它捕捉了数据中不同“能量”占比的成分,并且由于彼此正交,确保了每个模态提供独立的信息.在流场分析中,模态结构对应流场的主要流动结构或扰动模式,具有直观的物理解释.

图 8 给出了 1:1:1 模型第 2 到 5 阶空间模态分布.1:1:1 模型转子区域所受的上游尾迹和下游势流带来的非定常扰动在空间模态分布中体现为分布在前、后转静交界面的周期性流动结构.同时,在同一阶模态中,由于前后排静子叶片数量相同,转子区域中流场所受上下游转静干涉非定常扰动特征一致、特征成分的占比相近,故在同阶模态中,上游交界面和下游交界面的空间分布特征相似.图 8(c) 给出了在各阶模态中沿叶片旋转方向采样后获得的空间分布.可以看出在模态能量相近的相邻阶次,如第 2、3 阶、第 4、5 阶之间,POD 流动模态幅值相近,流动形态相似,相邻模态正交而使得模态空间分布的相位角相差 90° .

另一方面,POD 分解还可获得各个模态对应的时间系数.时间系数代表了每个空间模态随时间的变化,结合模态能量的排序能够获得占据非定常流场主要成分的模态所对应的频率成分,为后续的流致振动分析提供支持.

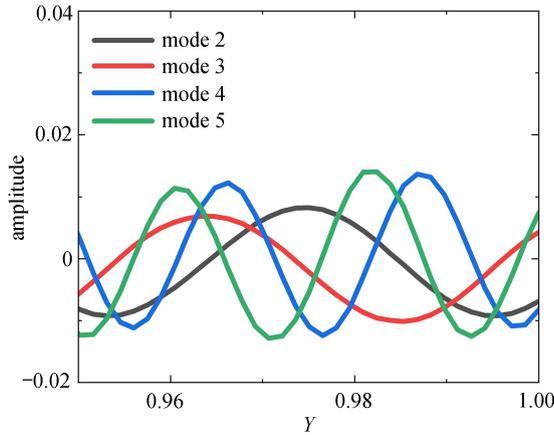


(a) 第 2、3 阶空间模态

(a) The 2nd and 3rd spatial modes

(b) 第 4、5 阶空间模态

(b) The 4th and 5th spatial modes



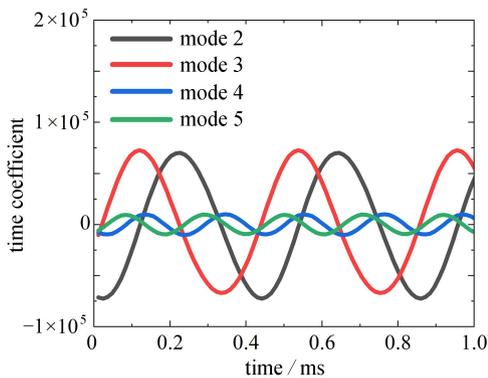
(c) 模态空间分布

(c) The modal spatial distribution

图 8 1:1:1 模型第 2 至 5 阶 POD 模态空间分布

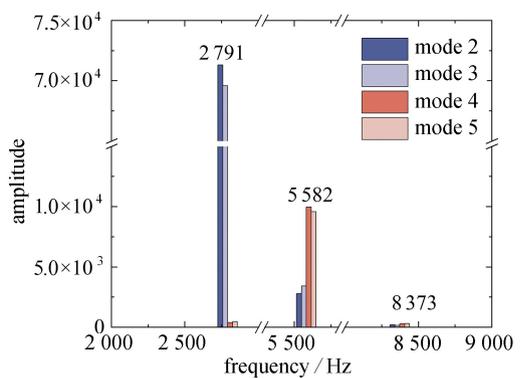
Fig. 8 The 2nd to 5th POD modes of the 1:1:1 model

结合图 9 所展示的 1:1:1 模型第 2 到 5 阶模态分布的时间系数变化和其所包含的频率,可以发现第 4、5 阶模态在空间分布上呈现出上下游交界面的流动特征的数量是第 2、3 阶模态的 2 倍,而在时间分布上其主要频率也是低阶模态频率的 2 倍.这是由于转静干涉流场的非线性性,使得其 POD 分解的流动模态在时间和空间上出现类似非线性振动系统中“倍频”的现象.而通过对时间系数和其主要频率的分析可以得知,1:1:1 模型第 2、3 阶模态频率主要成分为上下游叶片通过频率,也包含一定的 2 倍频成分;第 4、5 阶模态频率主要为第 2、3 阶模态的 2 倍频,同时也包括一定的基频和 3 倍频.由频率分析可知,在单个 POD 模态中会包含多个频率成分.



(a) 模态时间系数

(a) The modal temporal coefficients



(b) 模态频率成分

(b) The modal frequency components

图 9 1:1:1 模型第 2 至 5 阶 POD 模态时间系数和频率成分

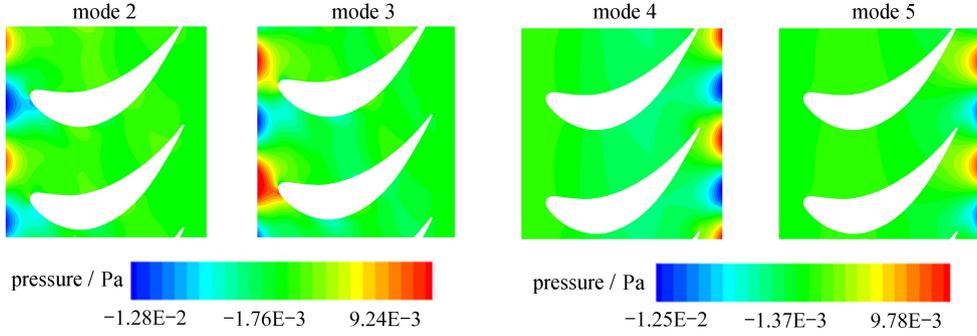
Fig. 9 Time coefficients and frequencies of the 2nd to 5th POD modes of the 1:1:1 model

图 10 给出了 6:7:7 叶栅第 2 到 5 阶空间模态分布.与 1:1:1 模型所区别的是,6:7:7 叶栅由于上下游静叶数量不一致,上下游扰动频率的分离使得 POD 方法能将不同来源的扰动分解至各阶模态的空间分布中,从而表征不同激励的空间分布特征.其中第 2、3 阶表征了来自上游的尾迹对非定常流场的贡献,第 4、5 阶则表征了来自下游的势流对流场的影响.从各阶空间模态能量分布的角度出发,也说明了存在于前两阶流场模态空间分布中的上游尾迹,相较于下游势流对流场的影响更大.图 11 展示了 6:7:7 模型各模态时间系数和其频率,第 2、3 阶模态频率主要成分为上游叶片通过频率,第 4、5 阶模态频率为下游叶片通过频率.

3.2.2 基于 DMD 方法的时空特征分析

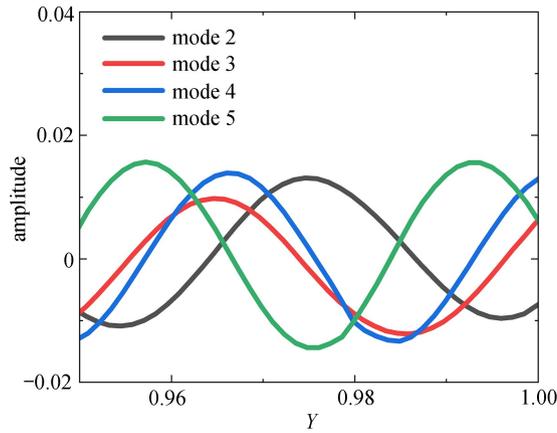
对流场快照矩阵按前文所述 DMD 方法分解并按“模态能量”排序,获得各阶 DMD 模态.由于 DMD 方法所获得第 1 阶模态为静态模态,其空间分布与时均流场一致;后续相邻模态特征值为共轭复数,其相邻模态

空间分布完全一致,故 DMD 空间模态仅展示单个复模态的空间分布.DMD 方法的模态时间系数根据文献 [47]定义第 i 时刻为 $(\mu_j)^{i-1} \alpha_j$.



(a) 第 2,3 阶空间模态
(a) The 2nd and 3rd spatial modes

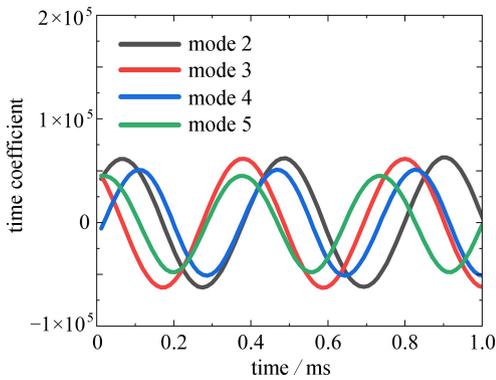
(b) 第 4,5 阶空间模态
(b) The 4th and 5th spatial modes



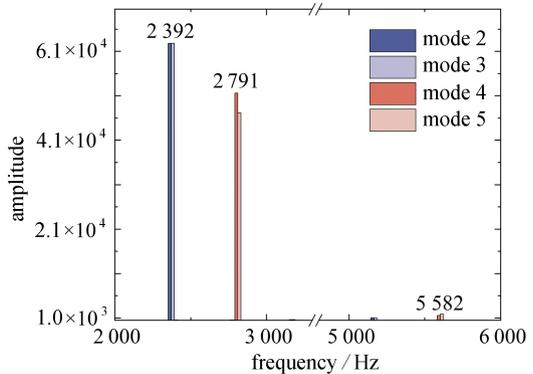
(c) 模态空间分布
(c) The modal spatial distribution

图 10 6:7:7 模型第 2 至 5 阶 POD 模态空间分布

Fig. 10 The 2nd to 5th POD modes of the 6:7:7 model



(a) 模态时间系数
(a) The modal temporal coefficients



(b) 模态频率成分
(b) The modal frequency components

图 11 6:7:7 模型第 2 至 5 阶 POD 模态时间系数和频率成分

Fig. 11 Time coefficients and frequencies of the 2nd to 5th POD modes of the 6:7:7 model

图 12 展示了 1:1:1 模型第 2 至 5 阶 DMD 空间模态,能够看到与 POD 分解相同,能量占比最高模态所捕捉到的非定常流动结构是来自上下游的转静干涉.第 4、5 阶模态在空间分布上也呈现出相同的上下游交界面的流动特征的倍数.

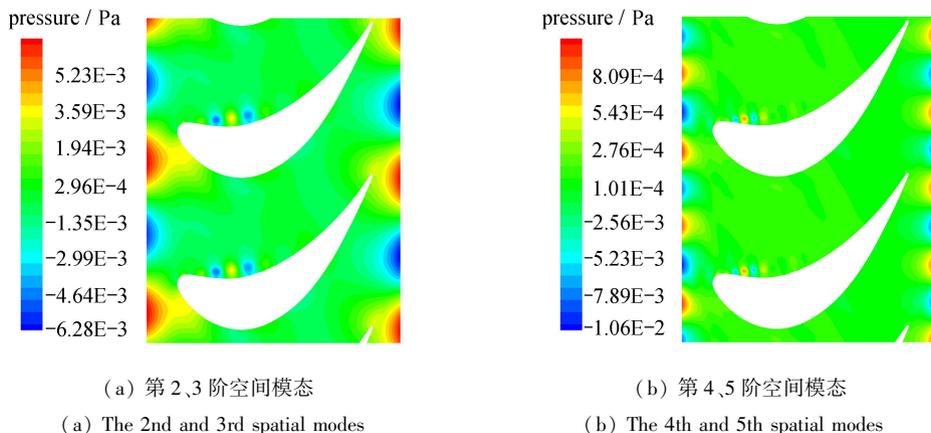


图 12 1:1:1 模型第 2 至 5 阶 DMD 模态空间分布

Fig. 12 The 2nd to 5th DMD modes of the 1:1:1 model

DMD 各模态增长率和缩减频率如表 3 所示.相较于 POD 方法,DMD 分解更侧重于解析物理场的动态发展趋势.从表中能够看到,由于数据集来源为计算收敛的稳定流场,故各模态的增长率均很小,排除数值误差的影响可以认为趋近于零.各模态的缩减频率与转静干涉的基频和倍频一致,与 POD 分析结果也吻合.

表 3 前 5 阶 1:1:1 模型 DMD 模态增长率和缩减频率

Table 3 Growth rates and reduced frequencies of the 1st 5 DMD modes of the 1:1:1 model

mode	growth rate	reduced frequency/Hz
1	3.00×10^{-8}	0
2,3	-1.95×10^{-5}	2 791
4,5	6.57×10^{-5}	5 582

为了剖析 POD 和 DMD 在频域分解上的不同,将 DMD 模态系数进行 FFT 分析(图 13),进一步观察各个模态对应频率可以发现,每个 DMD 模态仅对应一个频率.相较于 POD 各阶模态频率分析时包含多个频率成分,DMD 模态可以避免复杂激励下多样的频率成分带来的干扰,例如 POD 分析中转静干涉的高阶倍频混杂在相近的模态中.单一的模态和其对应频率有助于简化流固耦合振动分析,通过模态能量排序获得主要模态后分别按照激励频率和激励阶次进行耦合共振的判断.

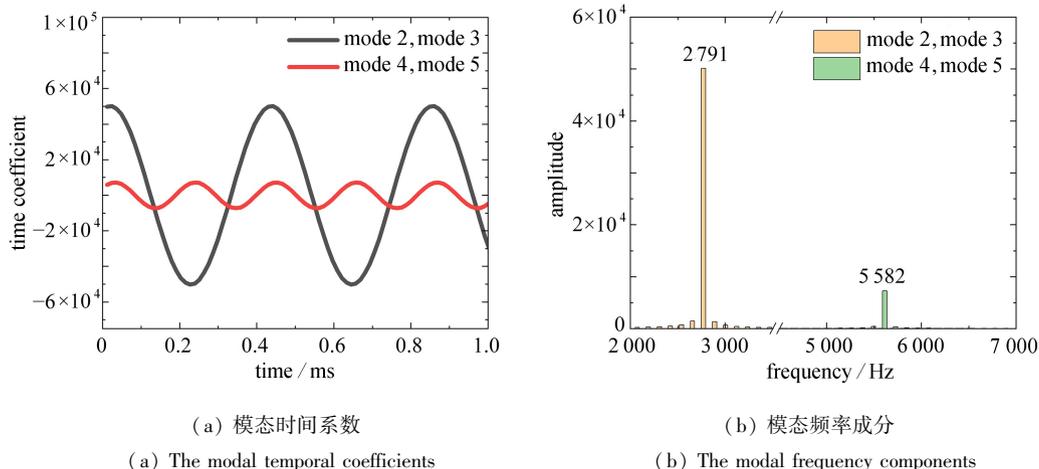


图 13 1:1:1 模型第 2 至 5 阶 DMD 模态时间系数和频率成分

Fig. 13 Time coefficients and frequencies of the 2nd to 5th DMD modes of the 1:1:1 model

为了在相同条件下比较不同干涉频率经 DMD 分解后的差异,我们在 6:7:7 和 1:1:1 模型的 DMD 分析中选择相同的阶次.6:7:7 模型非定常流场经 DMD 方法分解后,如图 14、图 15 所示,上下游扰动频率的分离同样使得 DMD 方法能将其分解至不同空间分布特征,与 POD 方法结果一致.同时其单一的频率成分也与前文结论一致,此处不再赘述.

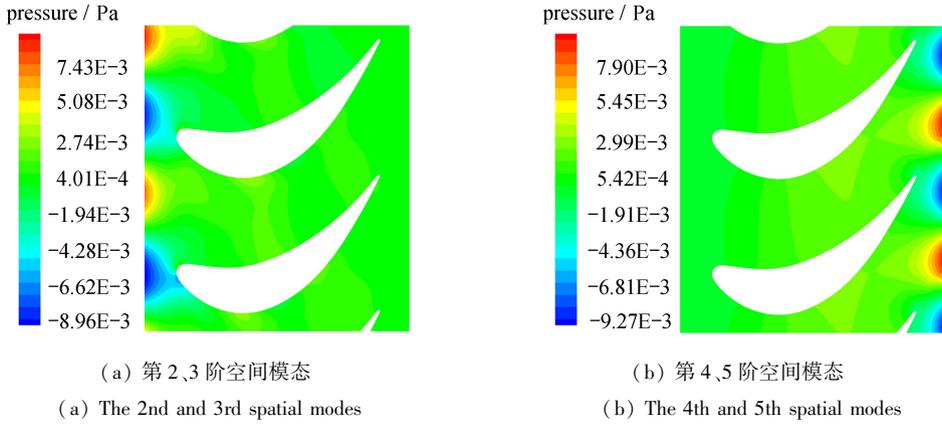


图14 6:7:7模型第2至5阶DMD模态空间分布

Fig. 14 The 2nd to 5th DMD modes of the 6:7:7 model

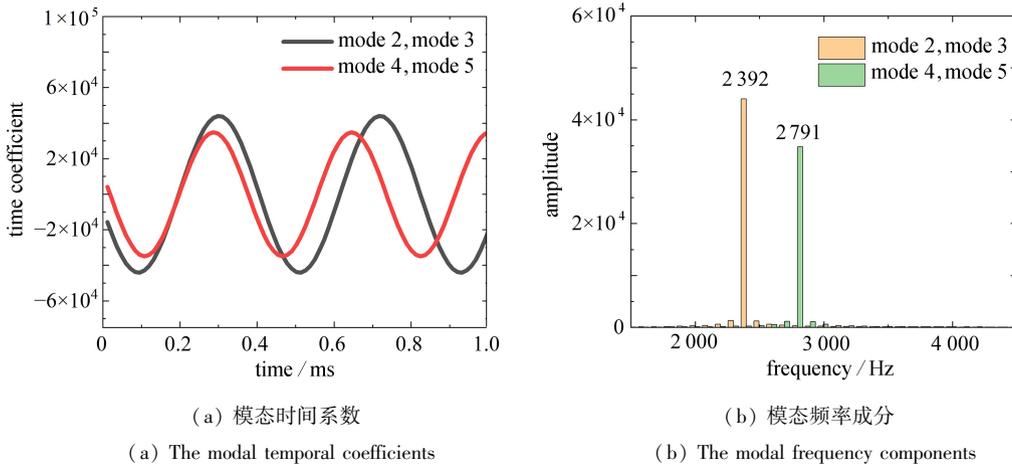


图15 6:7:7模型第2至5阶DMD模态时间系数和频率成分

Fig. 15 Time coefficients and frequencies of the 2nd to 5th DMD modes of the 6:7:7 model

相较于传统的对原始流场 FFT,通过 POD 和 DMD 方法获取模态时间系数进行 FFT,可以得到与空间分布和能量阶次相对应的流场频率成分,说明了模态分解方法不仅能够提取流场主要模态、准确辨识流场结构,而且在流场中可实现激励特征的剥离,针对不同流动模态所对应的不同激励源识别其激励的频率成分.而不同模态对于流致振动的贡献便可通过模态分解方法分解后,结合其不同的频率和激励阶次逐一讨论,可以用于更快速和高效地模拟流场响应,对于复杂流动系统和耦合分析具有实际应用价值.

3.3 非定常流场激励阶次分析

为了获得非定常流场的激励阶次,本文通过原始流场时间历程相位分析和模态分解后空间频谱分析两种方式分别计算并分析了两种流场模型的非定常激励阶次.

通过对流场中各扇区依次取点进行 FFT,可将各扇区流场激励的时间历程转换为频谱数据.在频谱中通过计算其对应频率的相位差,便可获得与频率相对应的激励阶次.表4列举了两种模型中几阶主要频率的激励阶次.尽管通过散点 FFT 的方法可以获得流场各频率对应的激励阶次,但由于频率成分的幅值取决于采样点的位置,因此从中无法分辨占据主导地位的频率分量和激励阶次;另一方面,仅从频率分布上也无法准确地分辨流场激励是来源于何种流动结构.

而为了能直观地辨识流致振动问题中的主导激励源,基于模态分解方法,将流场的流动特征分解为不同占比的空间特征模态,结合上节中指出的流场时空特征能量占比和空间分布,便可以快速识别占比较大的模态分布.对模态空间分布进行空间 Fourier 分析,便可以获得其激励阶次.再结合上节中获得的激励频率和能量排序,便可实现对叶盘结构共振与否的判断和激励影响的评估.

表 4 两种模型流体激励阶次
Table 4 Engine orders of 2 models

1:1:1 model		6:7:7 model	
F/Hz	engine order	F/Hz	engine order
2 791	0	2 392	1
5 582	0	2 791	0
8 373	0	4 784	2
11 164	0	5 582	0

另一种获取流场激励阶次的方式是通过模态分解,获得流动的空间模态分布后对各阶进行空间 Fourier 频谱分析而获得,由前述可知,POD 方法和 DMD 方法在本例中获得模态空间分布相似,各阶模态和其对应的主要频率相同,故后文进行空间模态节径谱分析时以 POD 模态为例,不再另行分析.图 16(a)给出了 1:1:1 模型对应的流体激励阶次,显然各阶模态对应的激励阶次集中在 $E = 0$.结合前文对流体激励频率的分析可以明确,在 1:1:1 模型中上下游叶片数与转子叶片数一致,同相位的激励使得各阶模态的流体激励阶次 $E = 0$.

图 16(b)给出了 6:7:7 模型不同阶次的 POD 模态所包含的流体激励阶次.从图中可以看到,来自流场上下游的激励成分与 POD 模态空间特征分布一致,第 1 阶平均流场不包含非定常成分,激励阶次为 $E = 0$.来自上下游的非定常激励成分按来源两两成组,来自流场上游的激励阶次以 $E = 1, 2$ 为主,而来自下游静叶的激励阶次以 $E = 0$ 为主.在 6:7:7 模型中由于上游叶片数与转子叶片数的差异,形成的流体阶次成分复杂,而下游叶片数与转子叶片数一致,下游的行波激励与转子叶片旋转同相位,故来自下游的流体激励阶次 $E = 0$.

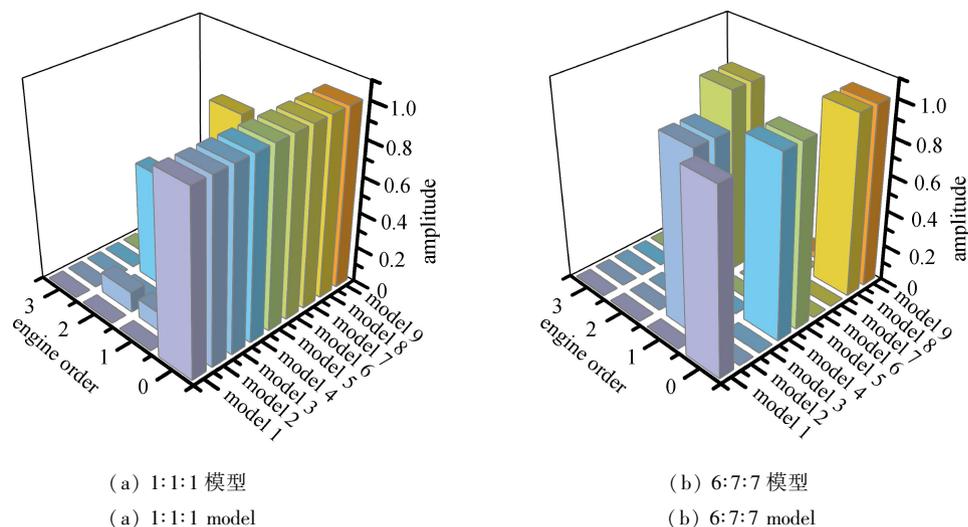


图 16 不同模型各阶 POD 模态激励阶次分布
Fig. 16 Engine order distributions of POD modes of 2 different models

4 结 论

本文通过数值仿真和 POD、DMD 两类模态分解方法,对转静干涉作用下二维叶栅非定常流场进行了研究,对比其空间模态分布和频域特征变化,得到了以下一些结论:

1) POD 模态通过能量排序能快速识别流场中主导的激振频率,但单个模态可能包含多个频率成分,在耦合共振分析时应提取主要频率;DMD 模态可以获得单一频率的模态和对应的增长特征,在耦合共振分析时更清晰直观.

2) 在 6:7:7 模型转静干涉流场中,转子叶片所受的非定常激励主要受上游静子尾迹被转子叶片前缘切割所形成的压力脉动和下游静子叶片的势场形成的势流影响,其中分布在叶片前缘的上游尾迹的影响起主导作用.

3) 传统 FFT 方法可以获得流场激励阶次,但其主要频率分量和激励阶次取决于采样点的位置,也无法

准确地分辨流场激励是来源于何种流动结构,而通过模态分解方法可以提取非定常流场的主要结构并识别其主导的激振频率和激励阶次,为叶盘耦合振动快速分析提供帮助。

参考文献(References):

- [1] 李其汉,王延荣.航空发动机结构强度设计问题[M].上海:上海交通大学出版社,2014.(LI Qihan, WANG Yanrong. *The Design Problem of Aero-Engine Structure Strength*[M]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University Press, 2014. (in Chinese))
- [2] MAILACH R, VOGELER K. Aerodynamic blade row interactions in an axial compressor, part II: unsteady profile pressure distribution and blade forces[J]. *Journal of Turbomachinery*, 2004, **126**(1): 45-51.
- [3] 周正贵,胡骏.轴流压气机动静叶片排非定常气动力分析[J].航空动力学报,2003, **18**(1): 46-50.(ZHOU Zhenggui, HU Jun. The analysis of unsteady blade force in a rotor/stator axial compressor[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2003, **18**(1): 46-50.(in Chinese))
- [4] 王英锋,胡骏,王志强.转静干涉对叶片非定常表面压力的影响[J].推进技术,2010, **31**(2): 198-203.(WANG Yingfeng, HU Jun, WANG Zhiqiang. Effect of stator-rotor interactions on the blades surface pressure[J]. *Journal of Propulsion Technology*, 2010, **31**(2): 198-203.(in Chinese))
- [5] 杨彤,王松涛,姜斌.弯曲叶片造型对涡轮叶栅作用力影响的非定常数值研究[J].推进技术,2013, **34**(6): 760-767.(YANG Tong, WANG Songtao, JIANG Bin. Unsteady numerical study of effects on turbine blade forces for the bowed blade[J]. *Journal of Propulsion Technology*, 2013, **34**(6): 760-767.(in Chinese))
- [6] 张小博,王延荣,黄钟山,等.转静干涉下转子叶片的非定常压力频谱[J].航空动力学报,2016, **31**(7): 1695-1703.(ZHANG Xiaobo, WANG Yanrong, HUANG Zhongshan, et al. Frequency spectrum of unsteady pressure on rotor blade with rotor-stator interaction[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2016, **31**(7): 1695-1703.(in Chinese))
- [7] LI H D, HE L. Blade aerodynamic damping variation with rotor-stator gap: a computational study using single-passage approach[J]. *Journal of Turbomachinery*, 2005, **127**(3): 573-579.
- [8] MONK D J, KEY N L, FULAYTER R D. Reduction of aerodynamic forcing through introduction of stator asymmetry in axial compressors[J]. *Journal of Propulsion and Power*, 2016, **32**(1): 134-141.
- [9] MAILACH R, MÜLLER L, VOGELER K. Rotor-stator interactions in a four-stage low-speed axial compressor, part II: unsteady aerodynamic forces of rotor and stator blades[J]. *Journal of Turbomachinery*, 2004, **126**(4): 519-526.
- [10] JIA H, XI G, MÜLLER L, et al. Unsteady blade loading with clocking in multistage axial compressors, part 1 [J]. *Journal of Propulsion and Power*, 2010, **26**(1): 25-36.
- [11] FURTH F, VOGT D M, BLADH R, et al. Unsteady forcing vs. efficiency: the effect of clocking on a transonic industrial compressor[C]//*Proceedings of the ASME 2013 Fluids Engineering Division Summer Meeting*. Incline Village, Nevada, USA: ASME, 2013.
- [12] LIU J, QIAO W Y, DUAN W H. Investigation of unsteady aerodynamic excitation on rotor blade of variable geometry turbine[J]. *International Journal of Rotating Machinery*, 2019, **2019**: 4396546.
- [13] TYLER J M, SOFRIN T G. Axial flow compressor noise studies[R]. 1962.
- [14] ADAMCZYK J. Model equation for simulating flows in multistage turbomachinery: NASA-TM-86869[R]. 1985.
- [15] LENGANI D, SELIC T, SPATARO R, et al. Analysis of the unsteady flow field in turbines by means of modal decomposition[C]//*Proceedings of the ASME Turbo Expo 2012; Turbine Technical Conference and Exposition*. Copenhagen, Denmark: ASME, 2012.
- [16] COURTIADÉ N, OTTAVY X, GOURDAIN N. Modal decomposition for the analysis of the rotor-stator interactions in multistage compressors[J]. *Journal of Thermal Science*, 2012, **21**(3): 276-285.
- [17] SCHRAPE S, GIERSCH T, NIPKAU J, et al. Tyler-Sofrin modes in axial high pressure compressor forced response analyses [C]//*Proceedings of the 14th International Symposium on Unsteady Aerodynamics, Aeroacoustics & Aeroelasticity of Turbomachines*. Stockholm, Sweden, 2015.
- [18] FIGASCHEWSKY F, KÜHHORN A, BEIROW B, et al. Analysis of mistuned forced response in an axial high-

- pressure compressor rig with focus on Tyler-Sofrin modes[J]. *The Aeronautical Journal*, 2019, **123**(1261): 356-377.
- [19] SIROVICH L. Turbulence and the dynamics of coherent structures, part I: coherent structures[J]. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1987, **45**(3): 561-571.
- [20] 陈刚, 李跃明. 非定常流场降阶模型及其应用研究进展与展望[J]. 力学进展, 2011, **41**(6): 686-701.(CHEN Gang, LI Yueming. Advances and prospects of the reduced order model for unsteady flow and its application [J]. *Advances in Mechanics*, 2011, **41**(6): 686-701.(in Chinese))
- [21] BENNER P, GUGERCIN S, WILLCOX K. A survey of projection-based model reduction methods for parametric dynamical systems[J]. *SIAM Review*, 2015, **57**(4): 483-531.
- [22] 王金城, 齐进, 吴锤结. 含压力基 Navier-Stokes 方程最优动力系统建模和分析[J]. 应用数学和力学, 2020, **41**(8): 817-833.(WANG Jincheng, QI Jin, WU Chuijie. Modelling and analysis of optimal dynamical systems of incompressible Navier-Stokes equations with pressure base functions[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, **41**(8): 817-833.(in Chinese))
- [23] SCHMID P J. Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2010, **656**: 5-28.
- [24] 王建明, 明晓杰, 王涵, 等. 方柱/板结合部马蹄涡流动结构的动力学模态分解[J]. 应用数学和力学, 2018, **39**(1): 64-76.(WANG Jianming, MING Xiaojie, WANG Han, et al. Dynamic mode decomposition of horseshoe vortex flow structures around square prism-plate junctions[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(1): 64-76.(in Chinese))
- [25] EPUREANU B I, HALL K C, DOWELL E H. Reduced-order models of unsteady viscous flows in turbomachinery using viscous-inviscid coupling[J]. *Journal of Fluids and Structures*, 2001, **15**(2): 255-273.
- [26] EPUREANU B I. A parametric analysis of reduced order models of viscous flows in turbomachinery[J]. *Journal of Fluids and Structures*, 2003, **17**(7): 971-982.
- [27] LI T, DENG S, ZHANG K, et al. A nonintrusive parametrized reduced-order model for periodic flows based on extended proper orthogonal decomposition[J]. *International Journal of Computational Methods*, 2021, **18**(9): 2150035.
- [28] LI T, PAN T, ZHOU X, et al. Non-intrusive reduced-order modeling based on parametrized proper orthogonal decomposition[J]. *Energies*, 2023, **17**(1): 146.
- [29] WEI H, CAO Z, LI T, et al. Parametric modelling of unsteady load for turbine cascade and its application in clocking effect optimization and load-reduction[J]. *Aerospace Science and Technology*, 2022, **127**: 107669.
- [30] KOU J, ZHANG W. Dynamic mode decomposition with exogenous input for data-driven modeling of unsteady flows[J]. *Physics of Fluids*, 2019, **31**(5): 057106.
- [31] HU C, QIAO T, ZHENG S, et al. Improved prediction of coherent structure in an intermediate turbine duct [J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2023, **256**: 108497.
- [32] CLARK S T, BESEM F M, KIELB R E, et al. Developing a reduced-order model of nonsynchronous vibration in turbomachinery using proper-orthogonal decomposition methods[J]. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 2015, **137**(5): 052501.
- [33] CIZMAS P G A, PALACIOS A. Proper orthogonal decomposition of turbine rotor-stator interaction[J]. *Journal of Propulsion and Power*, 2003, **19**(2): 268-281.
- [34] ROCHUON N, TRÉBINJAC I, BILLONNET G. An extraction of the dominant rotor-stator interaction modes by the use of proper orthogonal decomposition (POD)[J]. *Journal of Thermal Science*, 2006, **15**(2): 109-114.
- [35] 王磊, 高丽敏, 茅晓晨, 等. 基于 POD 方法的对转压气机叶顶非定常流场分析[J/OL]. 航空动力学报, 2023 [2024-09-04]. <https://doi.org/10.13224/j.cnki.jasp.20220896>.(WANG Lei, GAO Limin, MAO Xiaochen, et al. Analysis of tip unsteady flow field in a counter-rotating compressor based on POD method[J/OL]. *Journal of Aerospace Power*, 2023[2024-09-04]. <https://doi.org/10.13224/j.cnki.jasp.20220896>.(in Chinese))
- [36] QIAO T, YANG C, HU C. Analysis of interaction between leakage flow and upstream wake by proper orthogonal decomposition applied[J]. *Journal of Physics: Conference Series*, 2023, **2569**(1): 012028.
- [37] SUZUKI T. Spiral flow instability between a rotor and a stator in high-speed turbomachinery and its relation to

- fan noise[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2023, **966**: A1.
- [38] LIU X, WU Z, SI C, et al. Role of unsteady tip leakage flow in acoustic resonance inception of a multistage compressor[J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2023, **36**(10): 165-181.
- [39] SONG M R, YANG B. Analysis on the unsteady flow structures in the tip region of axial compressor[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers (Part A): Journal of Power and Energy*, 2021, **235**(6): 1272-1287.
- [40] DE ALMEIDA V B C, TÜZÜNER E, ECK M, et al. Numerical characterization of pre-stall disturbances in a compressor stage[J]. *Journal of Turbomachinery*, 2024; **146**(8): 081009.
- [41] TAIRA K, BRUNTON S L, DAWSON S T M, et al. Modal analysis of fluid flows: an overview[J]. *AIAA Journal*, 2017, **55**(12): 4013-4041.
- [42] TU J H, ROWLEY C W, LUCHTENBURG D M, et al. On dynamic mode decomposition: theory and applications[J]. *Journal of Computational Dynamics*, 2014, **1**(2): 391-421.
- [43] ROWLEY C W, MEZIĆ I, BAGHERI S, et al. Spectral analysis of nonlinear flows[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2009, **641**: 115-127.
- [44] JOVANOVIĆ M R, SCHMID P J, NICHOLS J W. Sparsity-promoting dynamic mode decomposition[J]. *Physics of Fluids*, 2014, **26**(2): 024103.
- [45] 宋兆泓. 航空燃气涡轮发动机强度设计[M]. 北京: 北京航空学院出版社, 1988. (SONG Zhaohong. *Strength Design of Aviation Gas Turbine Engine*[M]. Beijing: Beijing Aviation Institute Press, 1988. (in Chinese))
- [46] 尹泽勇. 航空发动机设计手册: 第18册, 叶片轮盘及主轴强度分析[M]. 北京: 航空工业出版社, 2001. (YIN Zeyong. *Aero-Engine Design Manual: Vol 18, Strength Analysis of Blade Rotor and Spindle*[M]. Beijing: Aviation Industry Press, 2001. (in Chinese))
- [47] 寇家庆, 张伟伟, 高传强. 基于POD和DMD方法的跨声速抖振模态分析[J]. 航空学报, 2016, **37**(9): 2679-2689. (KOU Jiaqing, ZHANG Weiwei, GAO Chuanqiang. Modal analysis of transonic buffet based on POD and DMD method[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2016, **37**(9): 2679-2689. (in Chinese))