

基于 PINN 方法的 KdV 类方程新孤子解的研究*

邱天威, 魏光美, 宋禹欣, 王振

(北京航空航天大学 数学科学学院, 北京 100191)

摘要: 该文采用物理信息神经网络 (physics-informed neural network, PINN) 方法结合广义 Miura 变换, 深入研究了三个 KdV 类方程, 获得了一系列新的孤子解. 具体而言, 研究成果包括: 基于改进的 PINN 方法, 获得了 mKdV 方程的扭结-钟形解的解析形式; 通过 Miura 变换, 发现了 KdV 方程的新单孤子解; 结合广义 Miura 变换与 PINN 方法, 预测出非线性较强的 KdV 类方程的暗孤子解. 通过将 PINN 方法的数值结果与理论分析结果进行对比可以得知, 基于广义 Miura 变换的 PINN 方法是发现偏微分方程新数值解的有效途径, 同时对理论研究具有重要的启示意义.

关键词: PINN 方法; Miura 变换; KdV 类方程; 孤立子; 可积系统

中图分类号: O241 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.450122

Novel Soliton Solutions to KdV-Type Equations Based on Physics-Informed Neural Networks

QIU Tianwei, WEI Guangmei, SONG Yuxin, WANG Zhen

(School of Mathematical Sciences, Beihang University, Beijing 100191, P.R.China)

Abstract: Physics-informed neural networks (PINNs) were applied in combination with generalized Miura transformations to investigate 3 KdV-type equations. Several novel soliton solutions, including the kink-bell solution of the mKdV equation, were derived analytically with the improved PINN method; a single-soliton-like solution of the KdV equation, was achieved through the Miura transformation; and a dark-soliton solution of a strongly nonlinear KdV equation, was obtained by means of both the generalized Miura transformation and the PINN methods. Comparison of the numerical results obtained under the PINN framework with the exact solutions from theoretical analysis shows that, the proposed algorithm effectively uncovers new numerical solutions of partial differential equations and offers valuable insights for theoretical research.

Key words: physics-informed neural networks; Miura transformation; KdV-type equation; soliton; integrable system

0 引言

非线性发展方程 (NLEEs), 是数学物理中包含一个“时间变量 t ”的一类特殊的偏微分方程, 可以描述

* 收稿日期: 2024-04-30; 修订日期: 2024-06-04

基金项目: 国家自然科学基金(面上项目)(52171251)

作者简介: 邱天威(2002—), 男, 硕士生(E-mail: qiutw2002@163.com);

魏光美(1967—), 女, 副教授, 博士, 硕士生导师(通讯作者. E-mail: gmwei@buaa.edu.cn);

王振(1981—), 男, 教授, 博士, 博士生导师(E-mail: wangzmath@163.com).

引用格式: 邱天威, 魏光美, 宋禹欣, 王振. 基于 PINN 方法的 KdV 类方程新孤子解的研究[J]. 应用数学和力学, 2025, 46(1): 105-113.

流体力学、光学、量子力学等领域中大量的非线性现象^[1].在非线性领域中,孤立子(soliton)的研究解释了非线性效应与色散效应的联系,因而受到广泛的重视.1895年,Korteweg 指导学生 de Vries 提出了 Korteweg-de Vries 方程(简称 KdV 方程)并得到了孤立波解,首次在理论上证明了 Russell 在 1834 年发现的孤立波的存在^[2].1965年,Kruskal 和 Zabusky 发现了 FPU 问题与 KdV 方程的联系,并通过研究发现了孤波“在碰撞前后保持波高不变,仅仅是波的相位发生偏离”的性质,于是引入“孤立子”的概念来描述这类具有粒子性质的孤波^[3].在后续研究中,基于 KdV 方程及其与其他物理系统的关联,KdV 类方程的研究成果被进一步深化,形成了更为广泛的理论与实践应用^[4-5].

在非线性数学物理领域中,常用的经典方法有:齐次平衡法、Painlevé 分析、逆散射变换、Bäcklund 变换、Hirota 双线性方法、Lie 群分析、Darboux 变换等^[6-12].Miura 变换方法是非线性领域研究中构造可积系统的一个经典方法.通过分析 KdV 方程

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (1)$$

与 mKdV 方程

$$v_t - 6v^2v_x + v_{xxx} = 0 \quad (2)$$

在守恒律等方面的相似性,Miura^[13]推测两个方程的解可能密切相关,并在 1968 年提出了 Miura 变换这个经典的非线性变换:

$$u = v_x - v^2. \quad (3)$$

随着人工智能领域的发展,基于深度学习方法求解非线性发展方程成为了一个新兴的研究热点.Raissi 等^[14-15]提出了物理信息神经网络(PINN),用于实现非线性发展方程的数值求解、参数反演、模型发现等功能.2023年,文献[16]提出了基于 Miura 变换的 PINN 方法,用于探索偏微分方程尚未被传统方法发现的新解,并求得 mKdV 方程的一类新数值解:扭结-钟形解.在以往的实验观测与理论研究中,mKdV 方程的扭结-钟形解尚未得到证实.然而,基于深度学习方法的发现揭示了这一类局域波解的存在.数值实验结果表明,mKdV 方程的扭结-钟形解可能与 KdV 方程的单孤子解在 Miura 变换下存在对应关系.因此,深入研究扭结-钟形解的解析表达式,并进一步探讨其与 KdV 方程解在 Miura 变换下的关系,具有重要的科学意义.

本文的主要研究内容如下:在第 1 节中,对文献[16]中提出的基于广义 Miura 变换的 PINN 方法进行了简要概述;在第 2 节中,求出了 mKdV 方程的扭结-钟形解的解析表达式,并将传统理论方法求解 Miura 变换原像的结果与扭结-钟形解进行了对比,然后利用 Miura 变换,分析了扭结-钟形解与 KdV 方程单孤子解的对应关系;在第 3 节中,将基于 Miura 变换的 PINN 方法进一步扩展至广义 Miura 变换,分析了 mKdV 方程及一个非线性程度较强的 KdV 类方程,研究了其尚未被传统方法发现的新孤子解.

1 基于广义 Miura 变换的 PINN 方法

经典的 PINN 方法基于偏微分方程初边值条件的数据,预测非线性方程的数值解^[14].然而,给定初边值条件往往代表着确定了方程解的唯一性,我们难以通过这样的方法来探索方程的新解.Miura 变换作为一个非线性变换,具有原像不一定唯一的性质,通过结合 PINN 方法与 Miura 变换,文献[16]设计了应用于探索方程新解的算法,以下将简要概述基于广义 Miura 变换的 PINN 方法.

1.1 广义 Miura 变换的定义

假设 $v = v(t, x)$ 满足偏微分方程

$$G(t, x, v) = 0, \quad (4)$$

其中 $G(t, x, v)$ 是 t, x, v 和 v 的各阶导数的函数.若有映射

$$\mu: v \mapsto u = T(t, x, v) \quad (5)$$

使得 $u = T(t, x, v)$ 满足偏微分方程

$$F(t, x, u) = 0, \quad (6)$$

其中 $T(t, x, v)$ 是 t, x, v 和 v 的各阶导数的函数, $F(t, x, u)$ 是 t, x, u 和 u 的各阶导数的函数,则如上定义的 μ 被称为广义 Miura 变换.便捷起见,记

$$M(t, x, u, v) := u - T(t, x, v). \quad (7)$$

1.2 具体算法

首先,考虑方程(4)的一个已知解,利用 Miura 变换等式(5)可以确定方程(6)的一个解,从而为方程(6)设定初边值条件.接下来,使用 PINN 对方程组(4)、(6)的解进行预测,以确保所得到的结果满足 Miura 变换等式(5).由于 Miura 变换原像不一定唯一,符合上述条件的方程(4)的解可能多个.因此,通过 PINN 方法,可以获得不同于方程(4)已知解的新数值解.

本算法采用经典 PINN 方法的前馈神经网络架构,通过 L-BFGS 优化器对神经网络的参数进行优化以接近方程初边值条件的训练数据,并满足式(4)–(6)所定义的结构.设方程(6)的边界上的数据点为 $\{t_u^i, x_u^i, u^i\}_{i=1}^{N_u}$, 边界内部的取点为 $\{t_f^i, x_f^i\}_{i=1}^{N_f}$.将神经网络迭代过程中输出的数值解分别记作 \hat{u} 和 \hat{v} , 则 \hat{u}, \hat{v} 对应的方程算子记作

$$f_1 := F(t, x, \hat{u}), \quad (8)$$

$$f_2 := G(t, x, \hat{v}), \quad (9)$$

$$f_3 := M(t, x, \hat{u}, \hat{v}). \quad (10)$$

我们综合考虑边界上的数值误差以及区域内部的物理损失,采用均方误差作为损失函数.将损失函数记作 Θ , 则损失函数可以被表示为如下形式:

$$\Theta = \Theta_u + \Theta_{f_1} + \Theta_{f_2} + \Theta_{f_3}, \quad (11)$$

其中

$$\Theta_u = \frac{1}{N_u} \sum_{i=1}^{N_u} |\hat{u}(t_u^i, x_u^i) - u^i|^2, \quad (12)$$

$$\Theta_{f_1} = \frac{1}{N_f} \sum_{i=1}^{N_f} |f_1(t_f^i, x_f^i)|^2, \quad (13)$$

$$\Theta_{f_2} = \frac{1}{N_f} \sum_{i=1}^{N_f} |f_2(t_f^i, x_f^i)|^2, \quad (14)$$

$$\Theta_{f_3} = \frac{1}{N_f} \sum_{i=1}^{N_f} |f_3(t_f^i, x_f^i)|^2. \quad (15)$$

本文所有数值实验的代码都是基于 PYTHON 3.8 和 PYTORCH 1.12 编写的,并且所有数值实验均是在拥有 1.0 GHz Intel Core i5 CPU 和 16 GB 内存的电脑上进行的.

2 在经典 Miura 变换中的应用

2.1 mKdV 方程的扭结-钟形解

基于经典 Miura 变换,文献[16]使用 PINN 方法发现了 mKdV 方程的扭结-钟形解.对于方程(2)的扭结解

$$v(t, x) = k \tanh(kx + 2k^3 t), \quad (16)$$

由 Miura 变换(3)得到方程(1)的单孤子解

$$u(t, x) = 2k^2 \operatorname{sech}^2(kx + 2k^3 t) - k^2. \quad (17)$$

取 $k = 1$ 以及合适的神经网络架构,通过训练可以得到方程(2)的扭结解、钟形解和扭结-钟形解的数值结果^[16].由 PINN 方法数值结果得到的启发,扭结-钟形解可能为正钟形解与负钟形解的组合.接下来,我们将用理论方法研究 mKdV 方程中扭结-钟形解的解析形式.

文献[17]给出了方程(2)的一类钟形解:

$$v(t, x) = \pm \frac{Kr}{2\sqrt{r^2 - p}} \pm \frac{2K\sqrt{r^2 - p}}{2r + pe^{-(Kx - \omega t + c)} + e^{Kx - \omega t + c}}, \quad (18)$$

其中, $\omega = \frac{K^3(2p + r^2)}{2(p - r^2)}$, $r^2 > p > 0, K > 0$.经计算可得,振幅 A 和波速 V 分别为

$$A = \frac{K\sqrt{r^2 - p}}{r + \sqrt{p}}, \quad (19)$$

$$V = \frac{\omega}{K} = \frac{K^2(2p + r^2)}{2(p - r^2)}. \quad (20)$$

mKdV 方程(2)的扭结-钟形解可以由两个关于原点中心对称且相切的钟形解构造得到。

令

$$v_1(t, x) = -\frac{Kr}{2\sqrt{r^2 - p}} + \frac{2K\sqrt{r^2 - p}}{2r + pe^{-(Kx - \omega t - c)} + e^{Kx - \omega t - c}}, \quad (21)$$

$$v_2(t, x) = \frac{Kr}{2\sqrt{r^2 - p}} - \frac{2K\sqrt{r^2 - p}}{2r + pe^{-(Kx - \omega t + c)} + e^{Kx - \omega t + c}}, \quad (22)$$

其中, $c \geq 0$. 这两个孤立波的波速相同, 利用孤立子的性质只需计算 $t = 0$ 时刻的相切情况, 得到扭结-钟形解表达式为

$$\begin{cases} v(t, x) = v_2(t, x), & x \leq Vt, \\ v(t, x) = v_1(t, x), & x > Vt, \end{cases} \quad (23)$$

其中参数满足

$$\frac{1}{2r + pe^c + e^{-c}} + \frac{1}{2r + pe^{-c} + e^c} = \frac{r}{2(r^2 - p)}. \quad (24)$$

特别地, 当 $p = 1$ 时, 方程(24)可以化简为

$$c = \operatorname{arccosh} \frac{r^2 - 2}{r}. \quad (25)$$

取 $K = 2, r = 5$, 可以得到方程(2)的扭结-钟形解如图 1 所示。

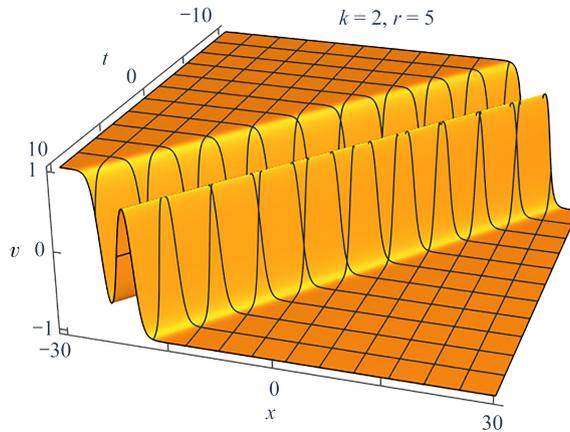


图 1 mKdV 方程的扭结-钟形解(23)

Fig. 1 Kink-bell solution (23) to the mKdV equation

注 为了解释图中的颜色, 读者可以参考本文的电子网页版本, 后同。

2.2 本方法与传统理论方法的对比

通过经典 Miura 变换(3), 可以得到 KdV 方程(1)和 mKdV 方程(2)之间的可积系统^[13]

$$v_x = v^2 + u, \quad (26)$$

$$v_t = -2u^2 - 2vu_x - 2v^2u - u_{xx}. \quad (27)$$

对于给定的 $u = 2\operatorname{sech}^2(x + 2t) - 1$, 考虑方程(26)的特解 $v = \tanh(x + 2t)$, 做变量替换 $\hat{v} = v - \tanh(x + 2t)$ 得到

$$\hat{v}_x = 2\tanh(x + 2t)\hat{v} + \hat{v}^2; \quad (28)$$

再做变量替换 $w = \frac{1}{v}$ 得到

$$w_x + 2 \tanh(x + 2t)w = -1. \quad (29)$$

解得

$$w = \operatorname{sech}^2(x + 2t) \left(C_1(t) - \frac{1}{4} \sinh(2x + 4t) - \frac{1}{2} x \right). \quad (30)$$

于是有

$$v = \frac{\cosh^2(x + 2t)}{C_1(t) - \frac{1}{4} \sinh(2x + 4t) - \frac{1}{2} x} + \tanh(x + 2t). \quad (31)$$

类似地,求解式(27)可得到

$$v = \frac{\cosh^2(x + 2t)}{C_2(x) - \frac{1}{4} \sinh(2x + 4t) + 3t} + \tanh(x + 2t). \quad (32)$$

因此,我们得到了 mKdV 方程(2)的解:

$$v(t, x) = \frac{\cosh^2(x + 2t)}{c - \frac{1}{4} \sinh(2x + 4t) - \frac{1}{2} x + 3t} + \tanh(x + 2t), \quad (33)$$

其中, c 为任意常数.

图 2(a) 为 $t = 0$ 时刻, 取 $c = 10, 100, \dots, 100\,000$, 解(33)的曲线族图像; 图 2(b) 为 $t = 0$ 时刻, 取 $c = -100, 100$, 解(33)的图像, 这与 2.1 小节中构造出的扭结-钟形解相类似. 然而, 对于任意的实数 a , $v(t, x; c = a)$ 与 $v(t, x; c = -a)$ 不相切, 因此我们无法通过这样的方法得到连续的扭结-钟形解.

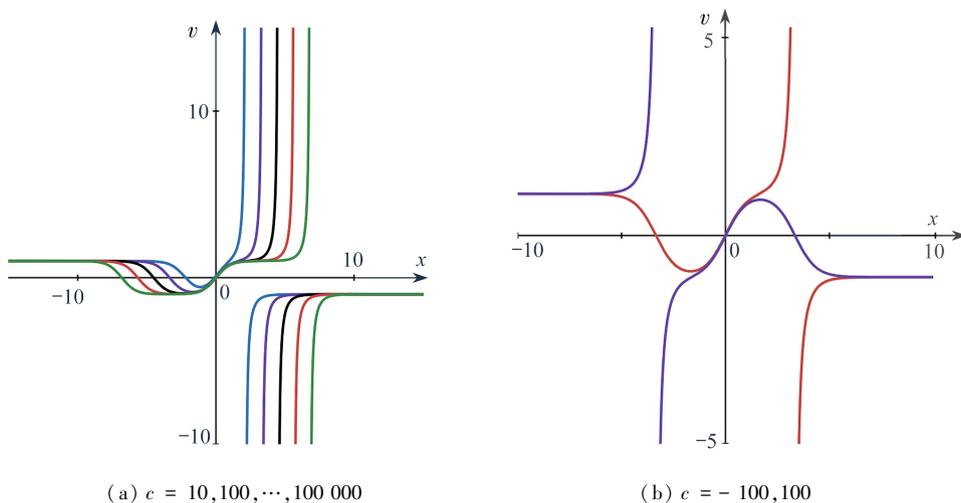


图 2 $t = 0$ 时刻, mKdV 方程的解(33)

Fig. 2 Solution (33) to the mKdV equation for $t = 0$

传统的理论方法要求解的绝对精确性, KdV 方程单孤子解在 Miura 变换(3)下的原像不存在 mKdV 方程的扭结-钟形解, 因此我们无法通过这类演绎式推理得到 2.1 小节中所构造的解(23). 基于 Miura 变换的 PINN 方法作为一种基于数值模拟的实验方法, 利用可积系统的优势, 在误差容许的范围内可以找到更多具有实际意义的数值结果, 有助于精确解的进一步研究.

2.3 KdV 方程的类单孤子解

文献[16]通过 PINN 方法的数值研究得出了 mKdV 方程的钟形解与 KdV 方程的单孤子解在 Miura 变换下具有对应关系. 但数值结果无法严格证明是否严格满足 Miura 变换的关系, 以下将从解析解角度对此进行研究.

对于钟形解(21),为便捷计算取 $p = 1$, 可以化简为

$$v(t, x) = -\frac{Kr}{2\sqrt{r^2-1}} + \frac{K\sqrt{r^2-1}}{r + \cosh(Kx - \omega t - c)}. \quad (34)$$

利用 Miura 变换(3),可以得到 KdV 方程的类单孤子解

$$\tilde{u}(t, x) = -\frac{K^2}{4(r^2-1)} \left(r - \frac{2(r^2-1)}{r + \cosh(Kx - \omega t - c)} \right)^2 - \frac{K^2\sqrt{r^2-1} \sinh(Kx - \omega t - c)}{(r + \cosh(Kx - \omega t - c))^2}. \quad (35)$$

特别地,取 $c = \operatorname{arccosh} \frac{r^2-2}{r}$, $K = 2k$, 此时有类单孤子的波速 $V = \frac{2k^2(2+r^2)}{1-r^2} \rightarrow -2k^2 \sim (r \rightarrow +\infty)$ 和 $\tilde{u}(0, 0) = \frac{k^2 r \sqrt{r^2-4}}{r^2-1} \rightarrow k^2 \sim (r \rightarrow +\infty)$. 更进一步地,当 $r \rightarrow +\infty$ 时,类单孤子解 $\tilde{u}(t, x)$ 逐点收敛于单孤子解

$$u(t, x) = 2\operatorname{sech}^2(x + 2t) - 1, \quad (36)$$

令 $K = 2$ 和 $r = 100$, 类单孤子解与单孤子解的对比见图 3(b), 黄色曲面为单孤子解, 蓝色曲面为类单孤子解.

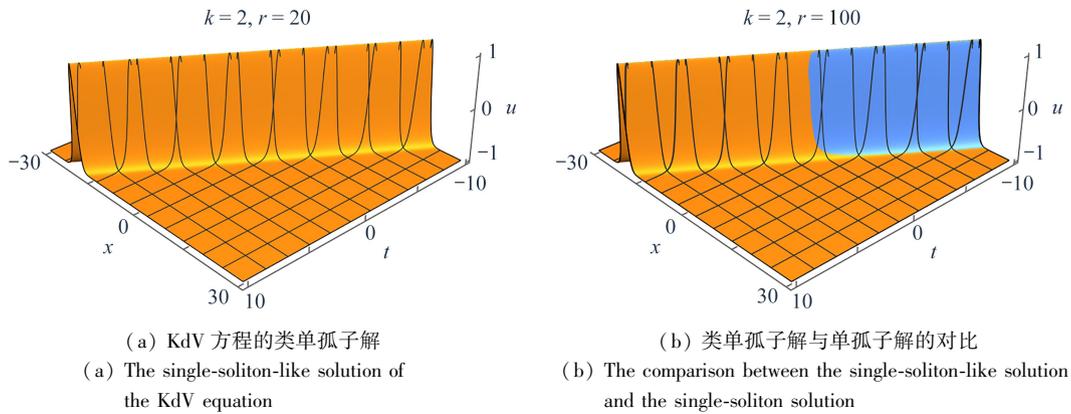


图 3 KdV 方程的类单孤子解与单孤子解的对比

Fig. 3 The comparison between the single-soliton-like solution and the single-soliton solution of the KdV equation

通过以上分析可以发现,基于 Miura 变换的 PINN 方法所获得的数值结果,在大多数情况下并未严格遵循 Miura 变换关系.然而,在误差允许范围内,这些结果仍可被视为具备 Miura 变换的对应特性.这一发现为我们探索偏微分方程尚未揭示的新解及其物理性质提供了全新的思路.此外, KdV 方程的类单孤子解展现出孤立子的特性,并且能够充分逼近单孤子解,因此此类解在实际应用中具有重要价值.

3 在广义 Miura 变换中的应用与新解的探索

3.1 mKdV 方程与一个 KdV 类方程的可积系统

对于 mKdV 方程

$$u_t = \frac{3}{2} u^2 u_x + u_{xxx}, \quad (37)$$

以及非线性程度较强的一个 KdV 类方程

$$v_t = \frac{3}{2} v_x \sin^2 v + \frac{1}{2} v_x^3 + v_{xxx}, \quad (38)$$

它们之间有可积系统^[18]:

$$v_x = \sin v + u, \quad (39)$$

$$v_t = \sin v + u + \frac{1}{2} u^2 \sin v + \frac{1}{2} u^3 + u_x \cos v + u_{xx}, \quad (40)$$

其中式(39)为方程(37)与方程(38)之间的广义 Miura 变换.实际上,方程(38)是 Fokas 在文献[19]中得到方程族的一个特殊形式.

我们利用可积系统(39)、(40)求解方程的孤立波解.方程(37)具有如下形式的单孤子解:

$$u(t, x) = 2k \operatorname{sech}(kx + k^3t + c). \tag{41}$$

取单孤子解的 $k = 1$, 并考虑方程(38)具有 $\phi = x + t + c$ 形式的行波解.令

$$\frac{1}{2} u^2 \sin v + \frac{1}{2} u^3 + u_x \cos v + u_{xx} = 0, \tag{42}$$

利用方程(39)和(42)即可得到一类冲击波形式的特解

$$v(t, x) = 2n\pi - \arccos(\tanh(x + t + c)). \tag{43}$$

3.2 应用 PINN 方法得到方程(38)的钟形解

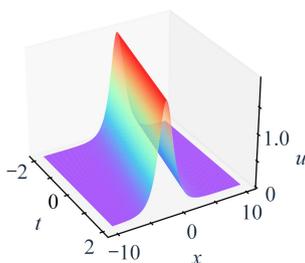
通过解析方法难以求出方程(38)的其他特解,因此,我们采用基于广义 Miura 变换的 PINN 方法探索方程(41)对应的方程(38)的其他解.两个方程的边界范围选取为 $(t, x) \in [-2, 2] \times [-10, 10]$, 并取定方程(37)的初边值条件如下:

$$\begin{cases} u_0(x) = 2 \operatorname{sech}(x - 2), \\ u(t, -10) = 2 \operatorname{sech}(-10 + t), \\ u(t, 10) = 2 \operatorname{sech}(10 + t). \end{cases} \tag{44}$$

此时,方程(37)具有唯一的单孤子解:

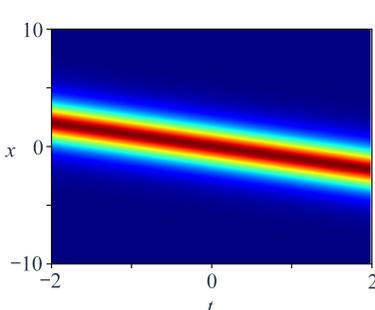
$$u(t, x) = 2 \operatorname{sech}(x + t). \tag{45}$$

我们构造了一个具有 4 层隐藏层、每层具有 16 个神经元的前馈神经网络,并且选取双曲正切函数 (\tanh) 作为神经网络的激活函数.使用 PYTHON 运行训练程序,并采用 L-BFGS 优化器迭代 2 397 次,方程(37)的损失函数 Θ_{f_1} 可以被迭代至 $1.762\ 549 \times 10^{-7}$,此时,我们得到了图 4 所示的单孤子解.图 4(a)、4(b)分别为方程(37)数值解的三维图像和热力图,其呈现显著的孤立子性质;图 4(c)为数值解与精确解的差值.同时,神经网络得到了方程(38)的一个新暗孤子解(如图 5(a)),其在时间上保持较好的孤立子性质;图 5(b)为方程(38)的已知解(43),这是一个随时间演化的冲击波.



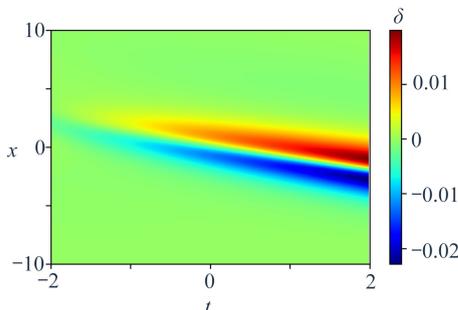
(a) 数值解的 3D 图

(a) The 3D plot of the numerical solution



(b) 数值解的密度图

(b) The density plot of the numerical solution



(c) 数值解与精确解的误差 δ

(c) The errors between the numerical solution and the exact solution

图 4 方程(37)的数值解和误差

Fig. 4 Numerical solutions and errors of the eq. (37)

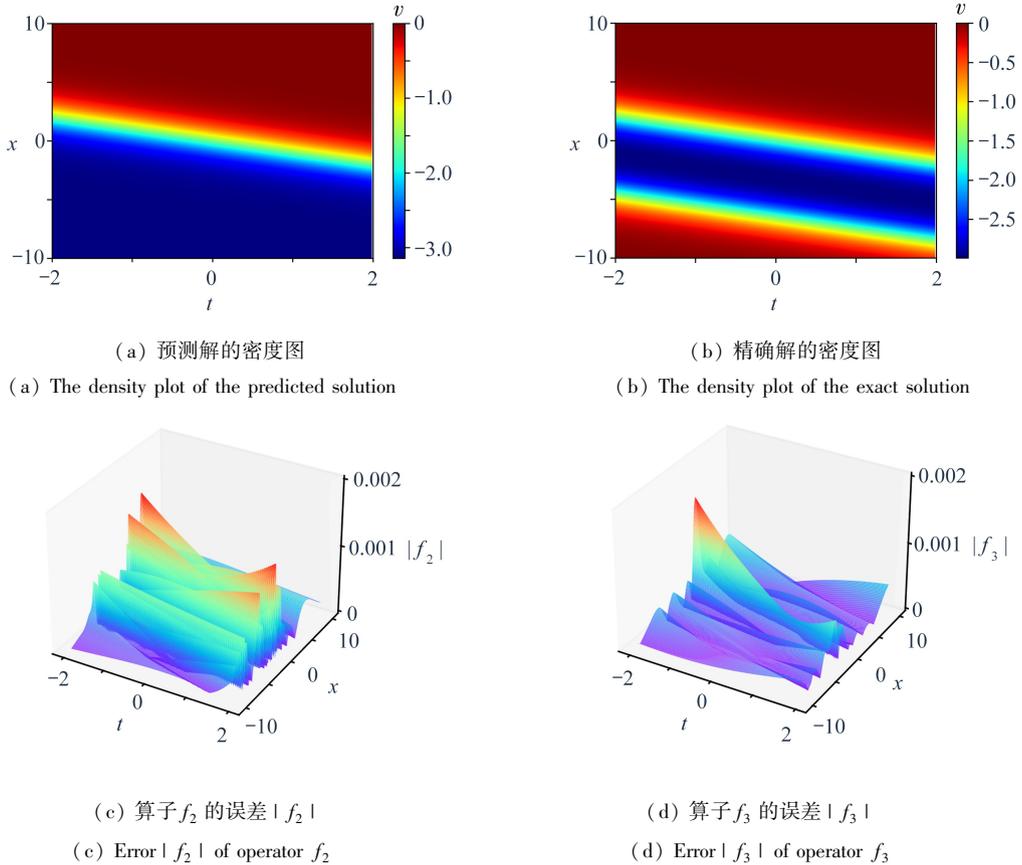


图5 方程(38)的预测解、精确解和误差

Fig. 5 The predicted solutions, exact solutions and errors of eq. (38)

为了探究预测解是否为方程(38)的数值解,我们对 f_2 与 f_3 的误差进行分析,得到的损失函数为 $\Theta_{f_2} = 1.728\ 164 \times 10^{-7}$, $\Theta_{f_3} = 6.090\ 592 \times 10^{-8}$.图5(c)为方程(38)算子 f_2 的误差三维图像,图5(d)为广义 Miura 变换算子 f_3 的误差三维图像.由误差的可视化图像可见,我们得到的暗孤子解可较为精确地满足方程(38),并且在误差允许的范围内经由广义 Miura 变换(39)对应于方程(37)的单孤子解(45).

4 结论与讨论

本文将 PINN 方法应用于几个 KdV 类方程,通过运用广义 Miura 变换等数学工具,得到了方程的新孤子解.本文的创新之处主要体现在以下几个方面:首先,以深度学习的数值结果为基础,启发了解析理论的研究,并成功推导出了扭结-钟形解的解析表达式;其次,通过分析在 Miura 变换下不同解之间的对应关系,认为文献[16]中提出的方法对于解析解的研究同样具有指导意义;最后,将基于 Miura 变换的 PINN 方法扩展应用于新的可积系统,得到了一类新的数值解,从而拓展了该方法的应用场景.

通过对 PINN 方法得到的数值结果进行深入的解析研究,我们总结了基于广义 Miura 变换的 PINN 方法的优势.该方法通过将广义 Miura 变换(5)纳入优化框架,能够在误差容许的范围内得到方程(6)的近似解,并在 Miura 变换约束下得到方程(4)的一个误差足够小的近似解.与传统理论方法相比,该方法能得到更多具有实际应用价值的数值解.此外,作为一种启发性的数值实验工具,基于 Miura 变换的 PINN 方法得到的数值结果不仅能推动解析解的理论研究,还能促进新解析解的发现.最后,基于广义 Miura 变换的 PINN 方法为研究可积系统解之间的关系提供了新的视角,有助于深入理解方程的性质.

致谢 本文作者衷心感谢北京航空航天大学敢为行动计划项目(JKF-20240582)对本文的资助.

参考文献(References):

- [1] 郭柏灵. 非线性演化方程[M]. 上海: 上海科技教育出版社, 1995. (GUO Boling. *Nonlinear Evolution Equa-*

- tions[M]. Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House, 1995. (in Chinese))
- [2] 陈登远. 孤子引论[M]. 北京: 科学出版社, 2006. (CHEN Dengyuan. *Introduction to Solitons*[M]. Beijing: Science Press, 2006. (in Chinese))
- [3] 王明亮. 非线性发展方程与孤子[M]. 兰州: 兰州大学出版社, 1990. (WANG Mingliang. *Nonlinear Evolution Equations and Solitons*[M]. Lanzhou: Lanzhou University Press, 1990. (in Chinese))
- [4] GUO Y, PU X. KdV limit of the Euler-Poisson system[J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 2014, **211**(2): 673-710.
- [5] RONG R, PENG Y. KdV-type equation limit for ion dynamics system[J]. *Communications on Pure and Applied Analysis*, 2021, **20**(4): 1699-1719.
- [6] 范恩贵, 张鸿庆. 非线性孤子方程的齐次平衡法[J]. 物理学报, 1998, **47**(3): 353-362. (FAN Engui, ZHANG Hongqing. The homogeneous balance method for solving nonlinear soliton equations[J]. *Acta Physica Sinica*, 1998, **47**(3): 353-362. (in Chinese))
- [7] WEISS J. The painlevé property for partial differential equations II: Bäcklund transformation, Lax pairs, and the Schwarzian derivative[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 1983, **24**(6): 1405-1413.
- [8] YANG J. *Nonlinear Waves in Integrable and Nonintegrable Systems*[M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2010.
- [9] ROGERS C, SCHIEF W K. *Bäcklund and Darboux Transformations: Geometry and Modern Applications in Soliton Theory*[M]. New York: Cambridge University Press, 2002.
- [10] HIROTA R. Exact solution of the korteweg-de vries equation for multiple collisions of solitons[J]. *Physical Review Letters*, 1971, **27**(18): 1192-1194.
- [11] BLUMAN G W, CHEVIAKOV A F. *Applications of Symmetry Methods to Partial Differential Equations*[M]. New York: Springer, 2010.
- [12] MATVEEV V B, SALL' M A. Scattering of solitons in the formalism of the Darboux transform[J]. *Journal of Soviet Mathematics*, 1986, **34**(5): 1983-1987.
- [13] MIURA R M. Korteweg-de Vries equation and generalizations I: a remarkable explicit nonlinear transformation[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 1968, **9**(8): 1202-1204.
- [14] RAISSI M, PERDIKARIS P, KARNIADAKIS G E. Physics-informed neural networks: a deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations[J]. *Journal of Computational Physics*, 2019, **378**: 686-707.
- [15] CUOMO S, DI COLA V S, GIAMPAOLO F, et al. Scientific machine learning through physics-informed neural networks: where we are and what's next[J]. *Journal of Scientific Computing*, 2022, **92**(3): 88.
- [16] LIN S, CHEN Y. Physics-informed neural network methods based on Miura transformations and discovery of new localized wave solutions[J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2023, **445**: 133629.
- [17] 石玉仁, 张娟, 杨红娟, 等. mKdV 方程的双扭结单孤子及其稳定性研究[J]. 物理学报, 2010, **59**(11): 7564-7569. (SHI Yuren, ZHANG Juan, YANG Hongjuan, et al. Single soliton of double kinks of the mKdV equation and its stability[J]. *Acta Physica Sinica*, 2010, **59**(11): 7564-7569. (in Chinese))
- [18] 徐传友. 非线性偏微分方程之间的 Miura 变换和精确解[J]. 阜阳师范学院学报(自然科学版), 2008, **25**(3): 1-4. (XU Chuanyou. The miura transformation between nonlinear partial differential equations and its exact solutions[J]. *Journal of Fuyang Teachers College (Natural Science)*, 2008, **25**(3): 1-4. (in Chinese))
- [19] FOKAS A S. A symmetry approach to exactly solvable evolution equations[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 1980, **21**(6): 1318-1325.