

磁电弹性材料含纳米尺度唇口次生 两不对称裂纹的反平面问题*

姜丽娟^{1,2}, 刘官厅^{1,3}, 高媛媛¹, 王程颜¹, 郭怀民⁴

- (1. 内蒙古师范大学 数学科学学院, 呼和浩特 010022;
2. 包头师范学院 教育科学学院, 内蒙古 包头 014030;
3. 内蒙古自治区应用数学中心, 呼和浩特 010022;
4. 包头师范学院 数学科学学院, 内蒙古 包头 014030)

摘要: 基于 Gurtin-Murdoch 表面弹性理论和磁电弹性(MEE)理论,利用解析函数的保角映射技术,研究了反平面机械载荷和面内电磁载荷作用下,MEE 材料中含有纳米尺度唇口次生两不对称裂纹的断裂行为,给出了缺陷(裂纹和唇口孔)周围广义 MEE 应力场和裂纹尖端 MEE 场强度因子以及能量释放率的解析解.在特殊条件下,所得结果退化为已有结果或者给出新的结果.数值算例揭示了缺陷表面效应对裂纹尖端 MEE 场强度因子的影响与纳米圆孔半径、唇口孔的大小、唇口次生裂纹大小,以及外加的机-电-磁载荷有关,也揭示了考虑表面效应时,无量纲能量释放率随唇口宽度、无穷远处机械载荷、电载荷和磁载荷的变化而变化.

关键词: 磁电弹性材料; 表面效应; 唇口次生两不对称裂纹; 场强度因子; 能量释放率
中图分类号: O346.1 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.450180

An Antiplane Problem of Magnetoelastic Materials With Nanoscale Lip-Shaped Orifice With 2 Asymmetric Cracks

JIANG Lijuan^{1,2}, LIU Guanting^{1,3}, GAO Yuanyuan¹, WANG Ghengyan¹, GUO Huaimin⁴

(1. *College of Mathematics Science, Inner Mongolia Normal University, Hohhot 010022, P.R.China;*

2. *College of Educational Science, Baotou Teacher's College, Baotou, Inner Mongolia 014030, P.R.China;*

3. *Center for Applied Mathematics Inner Mongolia, Hohhot 010022, P.R.China;*

4. *College of Mathematics Science, Baotou Teacher's College, Baotou, Inner Mongolia 014030, P.R.China)*

* 收稿日期: 2024-06-19; 修订日期: 2024-07-28

基金项目: 国家自然科学基金(12162027);内蒙古自然科学基金重点项目(2024ZD21);内蒙古自治区高等学校科学技术研究自然科学重点项目(NJZZ22574);内蒙古自然科学基金(2023LHMS01017);内蒙古自治区高等学校科学技术研究自然科学一般项目(NJZY23089)

作者简介: 姜丽娟(1990—),女,讲师,博士生(E-mail: 1530284866@qq.com);
刘官厅(1966—),男,博士(通讯作者. E-mail: guantingliu@imnu.edu.cn).

引用格式: 姜丽娟, 刘官厅, 高媛媛, 王程颜, 郭怀民. 磁电弹性材料含纳米尺度唇口次生两不对称裂纹的反平面问题[J]. 应用数学和力学, 2024, 45(10): 1332-1344.

Abstract: Based on the Gurtin-Murdoch surface elasticity theory and the magnetoelasticity (MEE) theory, the fracture behaviors of MEE materials containing nanoscale lip-shaped orifice with 2 asymmetric cracks under anti-plane mechanical loads and in-plane electromagnetic loads were investigated with the analytic function conformal mapping technique. Analytical solutions for the generalized MEE stress fields around defects (the lip-shaped orifice and cracks), as well as the crack tip MEE intensity factors and energy release rates, were given. Under special conditions, the obtained results would degenerate into existing results or offer new insights. Numerical examples reveal that, the defect surface effects on the MEE intensity factors are dependent on the radii of nano-sized circular holes, the size of the lip-shaped orifice, the size of secondary cracks originating from the lip-shaped orifice, and the applied MEE loads. Under the surface effect, the dimensionless energy release rate varies with the lip width, the infinity mechanical load, the infinity electrical load and the infinity magnetic load.

Key words: magnetoelastic material; surface effect; lip-shaped orifice with 2 asymmetric cracks; field intensity factor; energy release rate

0 引 言

电磁弹性(MEE)材料是一种具有压电、压磁和磁电耦合效应的新型功能结构材料,能实现磁场和电场的相互转换以及能量转换,广泛应用于传感器、执行器和能量收集等^[1-2],MEE材料具有压电和压磁两种特性,可以发挥各种特性的综合优势.因此,MEE材料比单一压电或压磁材料具有更高的磁电耦合性能.由于MEE材料固有的脆性,所制成的设备在加工和服务过程中容易产生各种缺陷(夹杂物、孔洞和裂纹)^[3-4],通过理论和数值方法,对于MEE材料中具有宏观缺陷的MEE耦合断裂力学问题的研究取得了重大进展^[5-8].

经典的MEE理论没有考虑缺陷的尺寸效应.但是当缺陷的尺寸达到纳米级时,材料的机械和物理性能的尺寸效应将非常明显.原因是:当MEE材料的缺陷尺寸为纳米级时,其表面与体积比值非常大,随着缺陷尺寸的变小,缺陷表面的原子数量增加,导致表面原子变得高度活跃和极不稳定,从而影响纳米材料的MEE场和强度特性^[9-10].目前,许多学者采用原子尺度离散模型和连续介质模型对纳米材料的力学行为进行了广泛的研究.Gurtin-Murdoch表面弹性理论^[11-13]是被广泛应用于纳米材料表面效应的连续介质模型之一,与表面原子论一致,其有效性可以通过原子模拟和分子动力学模拟进行验证.

Gurtin-Murdoch表面弹性理论被广泛应用于纳米裂纹MEE问题的断裂特征研究,最新的研究成果如下:Xiao等^[5]利用椭圆函数理论、保角映射技术和解析函数边值理论,研究了在反平面机械载荷、面内电载荷和面内磁载荷作用下,周期性裂纹和刚性线夹杂削弱MEE材料的断裂性能,得到了MEE非均质材料的解析解.Dineva等^[14]讨论了纳米裂纹梯度MEE材料的动态断裂性能.Yang和Liu^[15-16]基于Gurtin-Murdoch表面/界面模型和复势理论,通过构造新的保角映射,研究了考虑表面效应的MEE材料中 $4n$ -多边形纳米孔洞产生的四个纳米裂纹和三角形纳米孔产生的三个纳米裂纹的反平面断裂问题.Xiao等^[17-18]研究了考虑表面效应的MEE材料中周期性分布径向裂纹和椭圆孔边裂纹的断裂行为.Guo等^[19]在远场机械、电和磁载荷下,研究了嵌入无限MEE基质中的增强(涂层)纳米椭圆腔或纳米裂纹的断裂性能,利用保角映射技术和复变函数方法对该问题进行了解析处理,导出了增强层和基体中的应力、电位移和磁感应的精确解.Liu等^[20]基于Gurtin-Murdoch表面/界面模型,提出了具有表面效应的MEE材料中磁电不渗透性纳米椭圆孔或纳米裂纹的反平面剪切问题,通过使用复变函数,利用保角映射技术和方法,得到了纳米椭圆孔缩小为纳米裂纹时裂纹尖端附近的应力、电位移和磁感应强度因子的精确解.Xiao等^[21]基于MEE效应的广义自一致模型,对多层纳米复合材料的有效MEE进行了理论研究.Wu等^[22]基于Gurtin-Murdoch表面/界面模型和复势理论,通过构造新的保角映射函数,研究了 n -多边形孔产生的 n 个纳米裂纹在远场反平面机械载荷、平面电载荷和磁载荷作用下的断裂行为.Xiao等^[23-24]利用MEE理论和复变弹性理论研究了MEE材料中含有纳米尺度孔边任意位置贯穿裂纹和纳米级圆孔边缘任意位置径向裂纹的解析解,推导了贯穿裂纹、纳米孔和纳米裂纹的MEE场表达式,以及应力强度因子和电位移强度因子的解析解.

在一些工程问题中,缺陷并不总是二维问题中的线状裂纹,而常常由一些曲边多角形所构成,范天佑^[25]

指出, 电站大型锻件的缺陷以及汽车发电机转子轴身部分的缺陷均可被视为穿透性唇形裂纹. 对于含唇形裂纹模型的研究, 匡震邦^[26]最先构造了唇形裂纹的共形映射函数, 利用 Muskhelishvili 的二维各向同性弹性理论的方法, 研究了唇形裂纹的平面问题并给出了应力及位移的解析表达式, 求得了裂纹尖端处的应力强度因子. 刘鑫等^[27]等运用 Stroh 型公式和保角映射方法, 研究了 MEE 材料中唇形裂纹反平面问题, 推出了裂纹尖端场强度因子和能量释放率的解析表达式. Guo 等^[28]利用 Muskhelishvili 方法和扰动技巧研究了 MEE 介质中穿透唇形裂纹与螺型位错的相互作用, 推导出了 MEE 材料中由位错和唇形裂纹引起的 MEE 场的解析解. 郭怀民等^[29]利用复变函数法和 Stroh 型公式, 研究了反平面载荷作用下一维六方准晶压电材料中唇口次生裂纹的断裂问题, 首次构造了唇口次生两不对称裂纹的缺陷力学模型, 这种缺陷模型较以往的唇形裂纹模型更符合实际工程中的情况. 目前, 对于 MEE 材料中含纳米尺度唇口次生两不对称裂纹的反平面问题尚未见有报道.

本文基于表面弹性理论、MEE 理论和保角映射技术, 提出了在 MEE 耦合载荷下唇口次生两不对称裂纹的微观力学模型, 研究了 MEE 材料中唇口次生两不对称裂纹周围广义 MEE 应力场的解析解和裂纹尖端 MEE 场强度因子以及能量释放率. 通过数值算例, 讨论了纳米缺陷(裂纹和唇口孔)尺寸以及施加多物理场载荷对无量纲 MEE 场强度因子和无量纲能量释放率的影响. 研究结果揭示了 MEE 材料中纳米级缺陷的断裂特征, 可进一步完善 MEE 材料中纳米级缺陷的断裂理论.

1 模型与基本方程

图 1 为 MEE 材料中纳米尺度唇口次生两不对称裂纹示意图, 缺陷(唇口与裂纹)沿磁电极化方向穿透, 远场受机械载荷 σ_{zy}^∞ 、电载荷 D_y^∞ 和磁载荷 B_y^∞ 作用. 假设唇口次生纳米裂纹长度分别为 L_1 和 L_2 , Ω_c 表示唇口区域, Ω_m 表示基体区域, Ω_s 表示缺陷表面. 下标 c、s、m 分别表示纳米孔、纳米孔表面和基体.

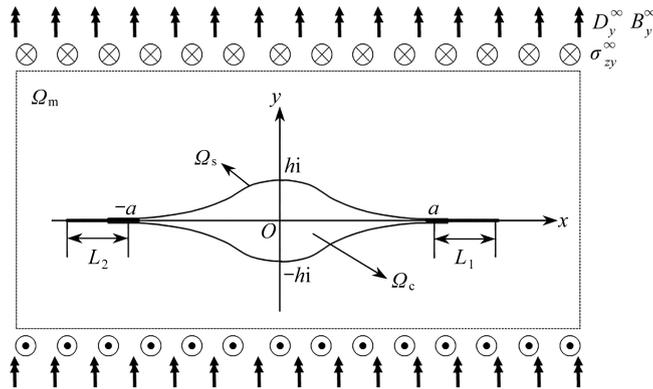


图 1 MEE 材料含纳米尺度唇口次生两不对称裂纹示意图

Fig. 1 Schematic diagram of the magneto-electro-elastic material containing a nanoscale lip with asymmetric cracks

在空间直角坐标系中, 取 xOy 平面为各向同性平面, z 轴与 xOy 平面垂直且为电极化方向, 本构方程为

$$[\sigma_{zj} \quad D_j \quad B_j]^T = A[\gamma_{zj} \quad -E_j \quad -H_j]^T, \quad (1)$$

其中非奇异材料矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} c_{44} & e_{15} & q_{15} \\ e_{15} & -\kappa_{11} & -\alpha_{11} \\ q_{15} & -\alpha_{11} & -\mu_{11} \end{bmatrix},$$

几何方程为

$$\gamma_{zj} = u_{z,j}, \quad E_j = -\varphi_{,j}, \quad H_j = -\psi_{,j}, \quad (2)$$

不考虑体力和电荷密度, MEE 材料的静态平衡方程为

$$\sigma_{zj,j} = 0, \quad D_{j,j} = 0, \quad B_{j,j} = 0, \quad (3)$$

其中 $j = x, y$; σ_{zj}, γ_{zj} 和 u_z 分别为应力、应变和位移; D_j, E_j 和 φ 分别为电位移、电场和电势; B_j, H_j 和 ψ 分别为磁感应强度、磁场和磁势; $c_{44}, \kappa_{11}, \mu_{11}$ 分别为弹性刚度张量、介电常数、磁通量张量; $e_{15}, q_{15}, \alpha_{11}$ 分别为压电、

压磁、磁电耦合系数.

根据式(1)、(2)和(3),可以得到该问题的控制方程为

$$\nabla^2 \mathbf{u} = 0, \quad (4)$$

其中 $\mathbf{u} = [u_z \quad \varphi \quad \psi]^T$ 表示广义位移, $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ 是 Laplace 运算符.

方程(4)为调和方程,由复变函数理论可知, u_z, φ 和 ψ 可表示为三个解析函数 $F_1(z), F_2(z), F_3(z)$ 的实部或虚部.假定

$$\mathbf{u} = [u_z \quad \varphi \quad \psi]^T = \text{Re}[F_1(z) \quad F_2(z) \quad F_3(z)]^T = \text{Re} \mathbf{F}, \quad (5)$$

其中 $z = x + iy$, $\text{Re}(\cdot)$ 表示解析函数的实部.

由于 $F_i(z) (i = 1, 2, 3)$ 是解析函数,故有

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{F}', \quad \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} = i\mathbf{F}', \quad (6)$$

其中 $\mathbf{F}' = d\mathbf{F}/dz$.

根据以上结果,可得

$$\Sigma_x - i\Sigma_y = \mathbf{A}\mathbf{F}', \quad (7)$$

$$\Sigma_r - i\Sigma_\theta = e^{i\theta} \mathbf{A}\mathbf{F}', \quad (8)$$

其中 $\Sigma_j = [\sigma_{zj} \quad D_j \quad B_j]^T$ 表示广义应力.

2 磁电非渗透边界条件下的解析解

假设纳米缺陷为磁电不可通条件,基于 Gurtin-Murdoch 表面弹性理论^[11-13],材料基体中纳米缺陷的非经典位移和应力边界条件如下:

$$\mathbf{u}_c(t) = \mathbf{u}_m(t), \quad t \in S, \quad (9)$$

$$-\Sigma_r^m = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Sigma_\theta^s}{\partial \theta}, \quad t \in S, \quad (10)$$

$$\Sigma_\theta^s = \mathbf{A}^s \mathbf{Z}_\theta^s. \quad (11)$$

纳米缺陷的表面常数矩阵为

$$\mathbf{A}^s = \begin{bmatrix} c_{44}^s & e_{15}^s & q_{15}^s \\ e_{15}^s & -\kappa_{11}^s & -\alpha_{11}^s \\ q_{15}^s & -\alpha_{11}^s & -\mu_{11}^s \end{bmatrix},$$

其中广义应变为 $\mathbf{Z}_i = [\gamma_{zi} \quad -E_i \quad -H_i]^T$, 上标 s 的系数为式(2)中各系数所对应的表面弹性系数.

为了解决该边值问题,基于文献[29]中的缺陷力学模型,首次推出了含唇口次生两不对称裂纹的无限大区域到半径为 R 的圆外部区域的保角变换公式:

$$z = \omega(\zeta) = \frac{a\rho}{2} \left\{ u(\zeta) - \frac{m}{u(\zeta)} + \frac{u(\zeta)}{\rho^2(u^2(\zeta) - m)} \right\}, \quad (12)$$

其中

$$u(\zeta) = \left\{ \varepsilon_1(\zeta + R)^2 + \varepsilon_2(\zeta - R)^2 + [(\varepsilon_1^2 - 1)(\zeta + R)^4 + 2(\varepsilon_1\varepsilon_2 + 1)(\zeta^2 - R^2)^2 + (\varepsilon_2^2 - 1)(\zeta - R)^4]^{1/2} \right\} / (4R\zeta), \quad (13)$$

$$\varepsilon_i = \frac{(1 + l_i)^2 + b^2 + b + (1 + l_i) \sqrt{l_i^2 + 2l_i + b^2}}{(1 + b)(1 + l_i + \sqrt{l_i^2 + 2l_i + b^2})}, \quad i = 1, 2, \quad (14)$$

$$m = \frac{b - 1}{b + 1}, \quad \rho = \frac{1}{1 - m}, \quad 0 \leq m < 1. \quad (15)$$

式(12)将物理 z 平面上唇口次生两不对称裂纹外部区域保角映射到数学 ζ 平面上半径为 R 的圆的外部区域,且

$$\omega(R) = a + L_1 = \frac{a}{2} \left(1 + l_1 + \frac{1}{1 + l_1} \right), \quad \omega(-R) = -(a + L_2) = -\frac{a}{2} \left(1 + l_2 + \frac{1}{1 + l_2} \right). \quad (16)$$

将解析函数 $F_i(z)$ ($i = 1, 2, 3$) 在数学 ζ -平面上 Laurent 展开为

$$F_i(\zeta) = a_i^* \ln \zeta + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{ik} \zeta^k, \quad i = 1, 2, 3, \quad (17)$$

其中 a_i^* 和 a_{ik} 是待定的复常数. 选择有限项级数形式^[30] 可得:

在 ζ -平面上圆内

$$\mathbf{F}^c(\zeta) = \begin{pmatrix} F_1^c(\zeta) \\ F_2^c(\zeta) \\ F_3^c(\zeta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{pmatrix} \zeta; \quad (18)$$

在 ζ -平面上圆外

$$\mathbf{F}^m(\zeta) = \begin{pmatrix} F_1^m(\zeta) \\ F_2^m(\zeta) \\ F_3^m(\zeta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D \\ E \\ F \end{pmatrix} \zeta + \begin{pmatrix} D_{-1} \\ E_{-1} \\ F_{-1} \end{pmatrix} \frac{1}{\zeta}, \quad (19)$$

其中 $A_1, B_1, C_1, D, E, F, D_{-1}, E_{-1}$ 和 F_{-1} 都是待定的复常数.

基于远场力、电和磁载荷边界条件, 由式(7)和(18)可得

$$\begin{pmatrix} D \\ E \\ F \end{pmatrix} = -i \frac{a\rho(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{4R} \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_{zy}^\infty \\ D_y^\infty \\ B_y^\infty \end{pmatrix}. \quad (20)$$

由纳米尺度位移和应力边界公式(9)和(10)得待定复常数之间的关系如下:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D \\ E \\ F \end{pmatrix} - \frac{1}{R^2} \begin{pmatrix} D_{-1} \\ E_{-1} \\ F_{-1} \end{pmatrix}, \quad (21)$$

$$\frac{\mathbf{A}^s}{R} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \left[\begin{pmatrix} D \\ E \\ F \end{pmatrix} + \frac{1}{R^2} \begin{pmatrix} D_{-1} \\ E_{-1} \\ F_{-1} \end{pmatrix} \right]. \quad (22)$$

由式(20)–(22)可得

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{pmatrix} = -2i \left(\mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^s}{R} \right)^{-1} \begin{pmatrix} \sigma_{zy}^\infty \\ D_y^\infty \\ B_y^\infty \end{pmatrix}, \quad (23)$$

$$\begin{pmatrix} D_{-1} \\ E_{-1} \\ F_{-1} \end{pmatrix} = i \frac{a\rho(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{4R} R^2 \mathbf{A}^{-1} \left(\mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^s}{R} \right)^{-1} \left(\mathbf{A} - \frac{\mathbf{A}^s}{R} \right) \begin{pmatrix} \sigma_{zy}^\infty \\ D_y^\infty \\ B_y^\infty \end{pmatrix}. \quad (24)$$

将式(19)、(20)和(23)代入式(7)可得

$$\Sigma_y + i\Sigma_x = \frac{a\rho(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{4R\omega'(\zeta)} \left[\mathbf{E} + \frac{R^2}{\zeta^2} \mathbf{A} \left(\mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^s}{R} \right)^{-1} \left(\mathbf{A} - \frac{\mathbf{A}^s}{R} \right) \mathbf{A}^{-1} \right] \begin{pmatrix} \sigma_{zy}^\infty \\ D_y^\infty \\ B_y^\infty \end{pmatrix}. \quad (25)$$

3 裂纹尖端 MEE 场强度因子

3.1 裂纹尖端 MEE 场强度因子

定义 z 平面裂纹尖端点处的应力强度因子、电位移强度因子和磁感应强度因子^[31]:

$$\begin{pmatrix} K_{\text{III}}^\sigma \\ K_{\text{III}}^D \\ K_{\text{III}}^B \end{pmatrix} = \lim_{z \rightarrow z_0} (\boldsymbol{\Sigma}_y + i\boldsymbol{\Sigma}_x) \sqrt{2\pi(z - z_0)}, \quad (26)$$

其中 $z_0 = a + L_1$, 式(12)将 z 平面 $z = z_0$ 处映射到 ζ 平面 $\zeta = R$ 处,将式(25)代入式(26),使用 L'Hôpital 法则得

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} K_{\text{III}}^\sigma \\ K_{\text{III}}^D \\ K_{\text{III}}^B \end{pmatrix} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{a\rho(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \sqrt{2\pi(z - z_0)}}{4R\omega'(\zeta)} \left[\mathbf{E} + \mathbf{A} \left(\mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^s}{R} \right)^{-1} \left(\mathbf{A} - \frac{\mathbf{A}^s}{R} \right) \mathbf{A}^{-1} \right] \begin{pmatrix} \sigma_{zy}^\infty \\ D_y^\infty \\ B_y^\infty \end{pmatrix} = \\ &= \frac{\sqrt{\pi} a\rho(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{4R\sqrt{\omega''(R)}} \left[\mathbf{E} + \mathbf{A} \left(\mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^s}{R} \right)^{-1} \left(\mathbf{A} - \frac{\mathbf{A}^s}{R} \right) \mathbf{A}^{-1} \right] \begin{pmatrix} \sigma_{zy}^\infty \\ D_y^\infty \\ B_y^\infty \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (27)$$

这里 $\omega'(R) = 0$,

$$\begin{aligned} \omega''(R) &= \frac{a\rho}{4R^2} \left\{ 1 + \frac{m}{(\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1^2 - 1})^2} - \frac{(\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1^2 - 1})^2 + m}{\rho^2 [(\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1^2 - 1})^2 - m]^2} \right\} \times \\ &= \frac{(\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1^2 - 1})(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{\sqrt{\varepsilon_1^2 - 1}}. \end{aligned} \quad (28)$$

式(27)可改写为

$$\begin{pmatrix} K_{\text{III}}^\sigma \\ K_{\text{III}}^D \\ K_{\text{III}}^B \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{\pi} a\rho(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{4R\sqrt{\omega''(R)}} \begin{pmatrix} K_\sigma^* \\ K_D^* \\ K_B^* \end{pmatrix}, \quad (29)$$

其中

$$\begin{pmatrix} K_\sigma^* \\ K_D^* \\ K_B^* \end{pmatrix} = \left[\mathbf{E} + \mathbf{A} \left(\mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^s}{R} \right)^{-1} \left(\mathbf{A} - \frac{\mathbf{A}^s}{R} \right) \mathbf{A}^{-1} \right] \begin{pmatrix} \sigma_{zy}^\infty \\ D_y^\infty \\ B_y^\infty \end{pmatrix}. \quad (30)$$

定义裂纹尖端无量纲场强度因子为

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} K_{\cdot\sigma} \\ K_{\cdot D} \\ K_{\cdot B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{K_{\text{III}}^\sigma}{\sqrt{\pi L'} \sigma_{zy}^\infty} \\ \frac{K_{\text{III}}^D}{\sqrt{\pi L'} D_y^\infty} \\ \frac{K_{\text{III}}^B}{\sqrt{\pi L'} B_y^\infty} \end{pmatrix}, \quad (31)$$

其中 $L' = (2a + L_1 + L_2)/2$ 是等效裂纹长度, $K_{\cdot\sigma}, K_{\cdot D}$ 和 $K_{\cdot B}$ 分别表示裂纹尖端无量纲应力强度因子、裂纹尖端无量纲电位移强度因子和裂纹尖端无量纲磁感应强度因子。

3.2 特殊情况

① MEE 材料含唇口次生两不对称裂纹

当纳米缺陷表面常数矩阵 $\mathbf{A}^s = \mathbf{0}$ 时,式(27)退化为

$$\begin{pmatrix} K_{\text{III}}^\sigma \\ K_{\text{III}}^D \\ K_{\text{III}}^B \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{\pi} a\rho(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{2R\sqrt{\omega''(R)}} \begin{pmatrix} \sigma_{zy}^\infty \\ D_y^\infty \\ B_y^\infty \end{pmatrix}. \quad (32)$$

式(32)表示 MEE 材料含唇口次生两不对称裂纹尖端的 MEE 场强度因子。

② MEE 材料含唇口裂纹

当 $L_1 = 0, L_2 = 0, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1, \omega(-1) = -a, \omega(1) = a, \omega(i) = -\frac{2ma}{1-m^2}i, \omega(-i) = \frac{2ma}{1-m^2}i$ 和 $R = 1$ 时,

式(32)求极限可得

$$\begin{pmatrix} K_{\text{III}}^\sigma \\ K_{\text{III}}^D \\ K_{\text{III}}^B \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{\pi a}(1-\beta + \sqrt{\beta^2 + 1})}{2} \begin{pmatrix} \sigma_{zy}^\infty \\ D_y^\infty \\ B_y^\infty \end{pmatrix}, \quad (33)$$

其中 $\beta = \frac{h}{a} = \frac{2m}{1-m^2}$ 。式(33)表示 MEE 材料含唇口裂纹尖端的 MEE 场强度因子,与文献[27]结果一致。

③ 弹性材料含纳米尺度唇口次生两不对称裂纹

当 $e_{15} = 0, q_{15} = 0, \kappa_{11} = 0, \alpha_{11} = 0$ 和 $\mu_{11} = 0$ 时,式(24)退化为

$$K_{\text{III}}^\sigma = \frac{\sqrt{\pi} a \rho (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{4R \sqrt{\omega''(R)}} \left(1 + \frac{C_{44}^s - C_{44}R}{C_{44}^s + C_{44}R} \right) \sigma_{yz}^\infty. \quad (34)$$

式(34)表示弹性材料含纳米尺度唇口次生两不对称裂纹尖端的应力强度因子。

④ MEE 材料含纳米尺度唇口次生右侧裂纹

当 $L_2 = 0, \varepsilon_2 = 1$ 时,式(27)退化为

$$\begin{pmatrix} K_{\text{III}}^\sigma \\ K_{\text{III}}^D \\ K_{\text{III}}^B \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{\pi} a \rho (1 + \varepsilon_1)}{4R \sqrt{\omega''(R)}} \left[\mathbf{E} + \mathbf{A} \left(\mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^s}{R} \right)^{-1} \left(\mathbf{A} - \frac{\mathbf{A}^s}{R} \right) \mathbf{A}^{-1} \right] \begin{pmatrix} \sigma_{zy}^\infty \\ D_y^\infty \\ B_y^\infty \end{pmatrix}, \quad (35)$$

其中

$$\omega''(R) = \frac{a\rho}{4R^2} \left\{ 1 + \frac{m}{(\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1^2 - 1})^2} - \frac{(\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1^2 - 1})^2 + m}{\rho^2 [(\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1^2 - 1})^2 - m]^2} \right\} \times \frac{(\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1^2 - 1})(\varepsilon_1 + 1)}{\sqrt{\varepsilon_1^2 - 1}}. \quad (36)$$

式(35)表示 MEE 材料含纳米尺度唇口次生右侧裂纹尖端的 MEE 场强度因子。

⑤ MEE 材料含 Griffith 纳米裂纹

当 $L_1 = 0, L_2 = 0, h = 0$ 和 $m = 0$ 时,式(27)退化为

$$\begin{pmatrix} K_{\text{III}}^\sigma \\ K_{\text{III}}^D \\ K_{\text{III}}^B \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{\pi} a}{2} \left[\mathbf{E} + \mathbf{A} \left(\mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^s}{R} \right)^{-1} \left(\mathbf{A} - \frac{\mathbf{A}^s}{R} \right) \mathbf{A}^{-1} \right] \begin{pmatrix} \sigma_{zy}^\infty \\ D_y^\infty \\ B_y^\infty \end{pmatrix}. \quad (37)$$

式(37)表示 MEE 材料含 Griffith 纳米裂纹尖端的 MEE 场强度因子。

4 能量释放率

根据文献[31],能量释放率公式可表示为

$$J = \frac{1}{2} [K_{\text{III}}^\sigma \quad K_{\text{III}}^D \quad K_{\text{III}}^B] \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} K_{\text{III}}^\sigma \\ K_{\text{III}}^D \\ K_{\text{III}}^B \end{pmatrix}. \quad (38)$$

将式(27)代入式(38),可得

$$J = \frac{\pi a^2 \rho^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2}{32 R^2 \omega''(R)} \begin{pmatrix} \sigma_{zy}^\infty \\ D_y^\infty \\ B_y^\infty \end{pmatrix}^T \mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \begin{pmatrix} \sigma_{zy}^\infty \\ D_y^\infty \\ B_y^\infty \end{pmatrix}, \quad (39)$$

其中

$$\mathbf{B} = \left[\mathbf{E} + \mathbf{A} \left(\mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^s}{R} \right)^{-1} \left(\mathbf{A} - \frac{\mathbf{A}^s}{R} \right) \mathbf{A}^{-1} \right]. \quad (40)$$

当 $\mathbf{A}^s = 0$ 时, 可得不考虑表面效应时, MEE 材料中含唇口次生两不对称裂纹的能量释放率公式:

$$J_0 = \frac{\pi a^2 \rho^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2}{8 R^2 \omega''(R)} \cdot \frac{\Pi}{\det \mathbf{A}}, \quad (41)$$

其中

$$\begin{aligned} \Pi = & (\kappa_{11} \mu_{11} - \alpha_{11}^2) (\sigma_{zy}^\infty)^2 - (q_{15}^2 + c_{44} \mu_{11}) (D_y^\infty)^2 - (e_{15}^2 + c_{44} \kappa_{11}) (B_y^\infty)^2 + \\ & 2(e_{15} \mu_{11} - q_{15} \alpha_{11}) \sigma_{zy}^\infty D_y^\infty + 2(\kappa_{11} h_{15} - \alpha_{11} e_{15}) \sigma_{zy}^\infty B_y^\infty + 2(c_{44} \alpha_{11} + e_{15} q_{15}) D_y^\infty B_y^\infty. \end{aligned} \quad (42)$$

5 数值算例

取 MEE 材料作为基体材料^[20], 常数见表 1, 纳米缺陷(唇口孔和裂纹)的表面常数见表 2^[19,32].

表 1 基体材料的 MEE 常数

Table 1 Magnetoelastic constants of the base material

c_{44} / Pa	$e_{15} / (\text{C} \cdot \text{m}^{-2})$	$\kappa_{11} / (\text{C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2})$	$q_{15} / (\text{N} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{m}^{-1})$	$\alpha_{11} / (\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{C}^{-1})$	$\mu_{11} / (\text{N} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{C}^{-2})$
4.53×10^{10}	11.6	8×10^{-9}	550	5×10^{-12}	5.9×10^{-4}

表 2 纳米缺陷的表面常数

Table 2 Surface constants of nanodefects

$c_{44}^s / (\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	$e_{15}^s / (\text{N} \cdot \text{A}^{-1})$	$\kappa_{11}^s / (\text{C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2})$	$q_{15}^s / (\text{N} \cdot \text{A}^{-1})$	$\alpha_{11}^s / (\text{N} \cdot \text{A}^{-1})$	$\mu_{11}^s / (\text{N} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{C}^{-2})$
6	3.3×10^{-7}	5×10^{-17}	3×10^{-11}	6×10^{-21}	0

图 2 给出了经典弹性理论和考虑表面效应时, 裂纹尖端无量纲应力强度因子 K_{σ} 、裂纹尖端无量纲电位移强度因子 K_D 和裂纹尖端无量纲磁感应强度因子 K_B 随纳米孔半径 R 的变化趋势, 令 $\sigma_{zy}^\infty = 6 \text{ MPa}$, $D_y^\infty = 3 \times 10^{-3} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$, $B_y^\infty = 2 \times 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$, $a = 10 \text{ nm}$, $h = 2.5 \text{ nm}$, $L_1 = 2.5 \text{ nm}$, $L_2 = 5 \text{ nm}$, 在经典弹性理论中, K_{σ} , K_D 和 K_B 分别只与机械载荷、电载荷和磁载荷有关, 且三者数值始终相等, 而从图中可看出在纳米尺度下, K_{σ} , K_D 和 K_B 均受到机械载荷、电载荷和磁载荷的影响, 说明表面效应会使磁、电、弹性场耦合。从图中还可以看出, 当 $R = 0 \text{ nm}$ 时, K_{σ} , K_D 和 K_B 均趋于 0, 随着孔洞半径 R 的增加, K_{σ} 和 K_D 均逐渐增加, 而 K_B 随着孔洞半径 R 的增加迅速增加, 最终趋于经典弹性理论中的结果, 说明随孔洞半径 R 的逐渐增加表面效应的影响开始逐渐减小, 最终趋于经典弹性理论中的结果。

图 3—6 给出了经典弹性理论和考虑表面效应时裂纹尖端无量纲应力强度因子 K_{σ} 、裂纹尖端无量纲电位移强度因子 K_D 和裂纹尖端无量纲磁感应强度因子 K_B 分别随 a/h , h/a , L_1/a 和裂纹相对长度 L_2/L_1 的变化趋势。在图 3—6 中, 取远场反平面载荷 $D_y^\infty = 3 \times 10^{-3} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$, $B_y^\infty = 2 \times 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$, $\sigma_{zy}^\infty = 6 \text{ MPa}$ 和 $R = a$ 。图 3 中令 $h = 2.5 \text{ nm}$, $L_1 = 2.5 \text{ nm}$, $L_2 = 5 \text{ nm}$ 。由图 3 可知在经典准晶弹性理论下, 当唇口高度 $h = 2.5 \text{ nm}$ 时, 随着唇口宽度 a 增加, K_{σ} , K_D 和 K_B 数值始终相等, 然而当考虑表面效应时, K_{σ} , K_D 和 K_B 三者数值明显不同, K_{σ} 和 K_D 随着唇口宽度 a 的增加逐渐增加, 增加的速度不同, 具有明显尺寸依赖效应, 最终趋于经典准晶弹性理论结果, 而 K_B 在纳米尺度下受到的影响很小。图 4 中令 $a = 10 \text{ nm}$, $L_1 = 5 \text{ nm}$, $L_2 = 10 \text{ nm}$ 。由图 4 可知在经典准晶弹性理论下, 当唇口宽度 $a = 10 \text{ nm}$ 时, 随着唇口高度 h 增加, K_{σ} , K_D 和 K_B 三者数值相同, 无论是否考虑表面效应, K_{σ} , K_D 和 K_B 均随唇口高度 h 的增加逐渐减小最终趋于稳定。图 5 中令 $a = 10 \text{ nm}$, $h = 5 \text{ nm}$, $L_2 = 10 \text{ nm}$ 。由图 5 可知在经典准晶弹性理论下, 当唇口宽度 $a = 10 \text{ nm}$ 时, 随着唇口右侧裂纹 L_1 增加, K_{σ} , K_D 和 K_B 三者数值相同, 经典弹性理论和考虑表面效应时, K_{σ} 和 K_B 均随唇口右侧裂纹尺寸 L_1 增加, 先逐渐增加至最大值后趋于稳定, 而 K_D 缓慢增加最终也趋于稳定。图 6 中令 $a = 10 \text{ nm}$, $L_1 = 5 \text{ nm}$,

$h = 10 \text{ nm}$. 由图 6 可知, 当右侧裂纹 $L_1 = 5 \text{ nm}$ 时, 随着唇口左侧裂纹 L_2 增加, 无论是否考虑表面效应, K_{σ} , K_D 和 K_B 均随左侧裂纹尺寸的增大而递减. 从图 4—6 中还可以看出, 考虑表面效应时裂纹尖端无量纲应力强度因子和裂纹尖端无量纲电位移强度因子小于不考虑表面效应, 而裂纹尖端无量纲磁感应强度因子在纳米尺度下受到的影响较小.

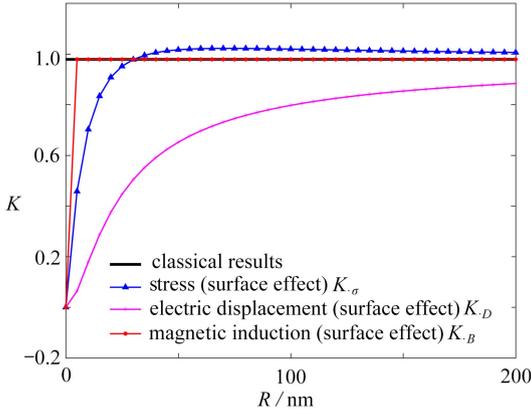


图 2 K 随 R 的变化曲线

Fig. 2 The curves of K with R

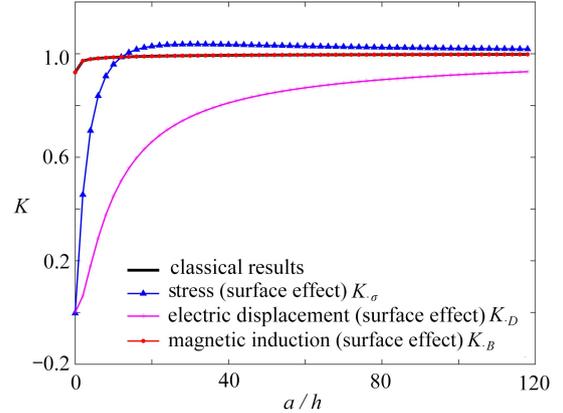


图 3 K 随 a/h 的变化曲线

Fig. 3 The curves of K with a/h

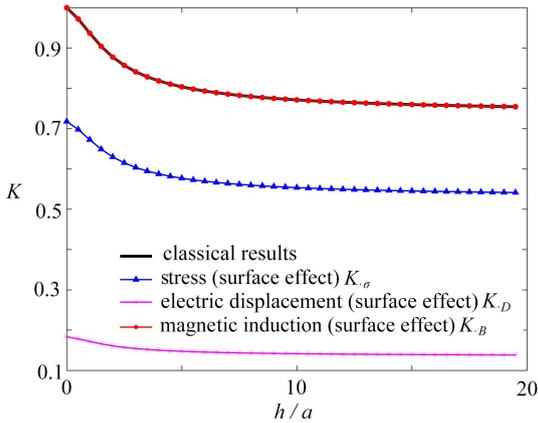


图 4 K 随 h/a 的变化曲线

Fig. 4 The curves of K with h/a

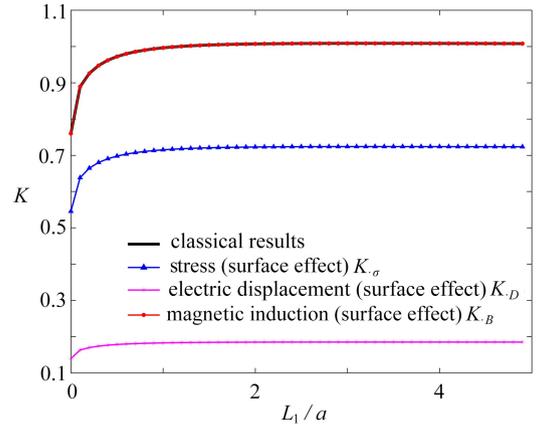


图 5 K 随 L_1/a 的变化曲线

Fig. 5 The curves of K with L_1/a

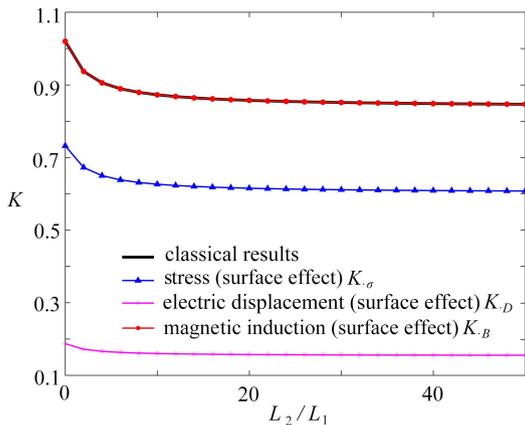


图 6 K 随 L_2/L_1 的变化曲线

Fig. 6 The curves of K with L_2/L_1

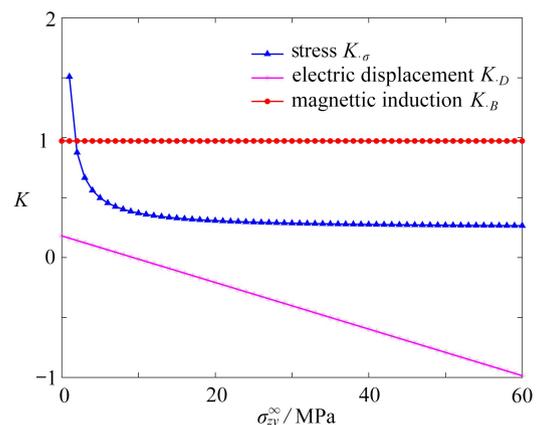


图 7 K 随 σ_{zy}^{∞} 的变化曲线

Fig. 7 The curves of K with σ_{zy}^{∞}

注 为了解释图中的颜色, 读者可以参考本文的电子网页版本, 后同.

图 7—9 分别给出了机械载荷、电载荷和磁载荷对裂纹尖端无量纲应力强度因子 K_{σ} 、裂纹尖端无量纲电位移强度因子 K_D 和裂纹尖端无量纲磁感应强度因子 K_B 的影响规律。图 7 中令 $a = 5 \text{ nm}$, $L_1 = 2.5 \text{ nm}$, $h = 2.5 \text{ nm}$, $L_2 = 5 \text{ nm}$, $D_y^\infty = 3 \times 10^{-3} \text{ C}\cdot\text{m}^{-2}$, $B_y^\infty = 2 \times 10^{-2} \text{ N}\cdot\text{A}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$ 和 $R = a$ 。由图 7 可知, 机械载荷 σ_{zy}^∞ 对 K_{σ} , K_D 和 K_B 有不同的影响, K_{σ} 随着 σ_{zy}^∞ 的增加单调减少后趋于稳定, K_D 随着 σ_{zy}^∞ 的增加呈线性减少, K_B 随着 σ_{zy}^∞ 的增加变化很小, 说明 σ_{zy}^∞ 的增加对 K_B 的影响很小。图 8 中令 $a = 5 \text{ nm}$, $L_1 = 2.5 \text{ nm}$, $h = 0.5 \text{ nm}$, $L_2 = 5 \text{ nm}$, $\sigma_{zy}^\infty = 6 \text{ MPa}$, $B_y^\infty = 2 \times 10^{-2} \text{ N}\cdot\text{A}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$ 和 $R = a$ 。由图 8 可知, 电载荷 D_y^∞ 对 K_{σ} , K_D 和 K_B 有不同的影响, 随着 D_y^∞ 的增加, K_{σ} 呈线性增加, K_D 单调增加后趋于稳定值, K_B 变化很小, 说明 D_y^∞ 的增加对 K_B 的影响很小。图 9 中令 $a = 5 \text{ nm}$, $h = 2.5 \text{ nm}$, $L_1 = 2.5 \text{ nm}$, $L_2 = 5 \text{ nm}$, $\sigma_{zy}^\infty = 6 \text{ MPa}$, $D_y^\infty = 3 \times 10^{-3} \text{ C}\cdot\text{m}^{-2}$ 和 $R = a$ 。由图 9 可知, 随着 B_y^∞ 的增加, K_{σ} , K_D 和 K_B 变化较小, 说明 B_y^∞ 的增加对 K_{σ} , K_D 和 K_B 的影响很小。在经典准晶弹性理论中, K_{σ} , K_D 和 K_B 三者数值相等且与无穷远处机械载荷、电载荷和磁载荷的变化无关。而从图 7—9 中还可以看出, 考虑表面效应时, K_{σ} , K_D 和 K_B 三者数值明显不同, 且随着无穷远处机械载荷、电载荷和磁载荷的变化而变化, 这与经典准晶弹性理论是不同的。

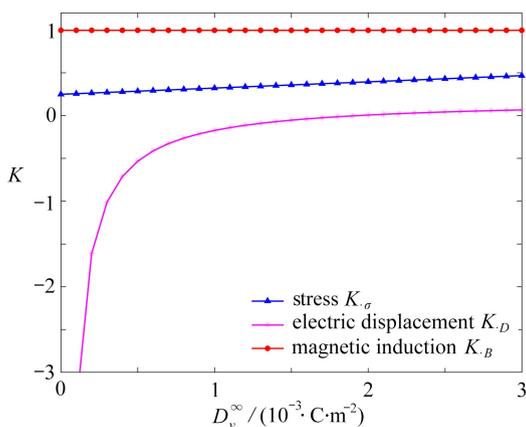


图 8 K 随 D_y^∞ 的变化曲线

Fig. 8 The curves of K with D_y^∞

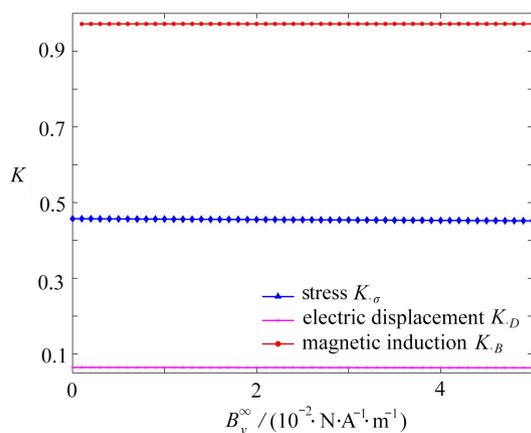


图 9 K 随 B_y^∞ 的变化曲线

Fig. 9 The curves of K with B_y^∞

图 10 给出了无量纲能量释放率 J/J_0 随唇口宽度 a 的变化趋势, J_0 表示不考虑表面效应 MEE 材料中含唇口次生两不对称裂纹的能量释放率。令 $h = 0.5a$, $L_1 = 0.5a$, $L_2 = a$, $R = a$, $\sigma_{zy}^\infty = 6 \text{ MPa}$, $D_y^\infty = 3 \times 10^{-3} \text{ C}\cdot\text{m}^{-2}$, $B_y^\infty = 2 \times 10^{-2} \text{ N}\cdot\text{A}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$ 。由图 10 可知, 经典准晶弹性理论时, J/J_0 与缺陷尺寸无关, 而考虑表面效应时, J/J_0 有明显的尺寸依赖效应, 且随着唇口宽度 a 的增加迅速增大后减小, 最后趋于经典准晶弹性理论。

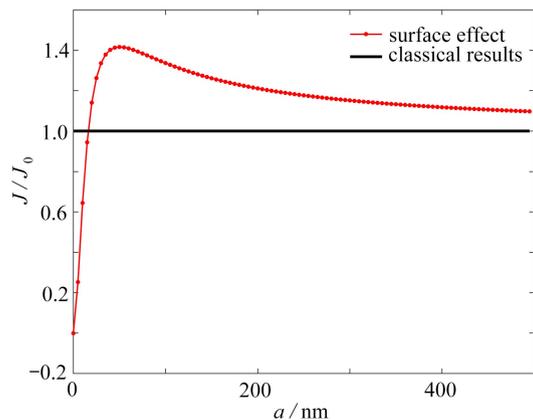


图 10 J/J_0 随 a 的变化曲线

Fig. 10 The curves of J/J_0 with a

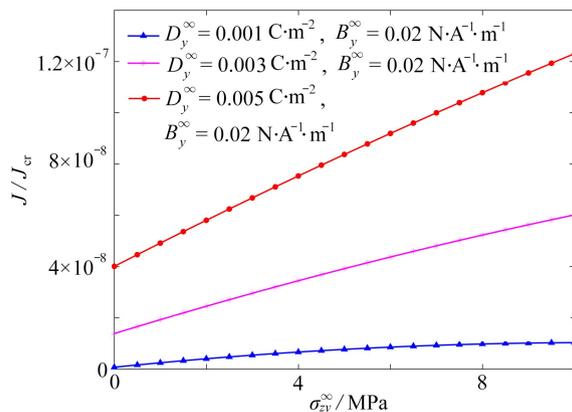


图 11 J/J_{cr} 随 σ_{zy}^∞ 的变化曲线

Fig. 11 The curves of J/J_{cr} with σ_{zy}^∞

图 11—13 分别给出了机械载荷 σ_{zy}^∞ 、电载荷 D_y^∞ 和磁载荷 B_y^∞ 对无量纲能量释放率 J/J_{cr} 的影响规律,其中 $h = a$, $L_1 = 2.5 \text{ nm}$, $L_2 = 3 \text{ nm}$, $R = a$, $J_{cr} = 5 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$. 图 11 中令 $a = 2 \text{ nm}$, $B_y^\infty = 0.02 \text{ N}\cdot\text{A}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$, 分别取 $D_y^\infty = 0.001 \text{ C}\cdot\text{m}^{-2}$, $D_y^\infty = 0.003 \text{ C}\cdot\text{m}^{-2}$, $D_y^\infty = 0.005 \text{ C}\cdot\text{m}^{-2}$. 由图 11 可知, J/J_{cr} 随着 σ_{zy}^∞ 增加而增加, 当 B_y^∞ 不变时, D_y^∞ 越大, J/J_{cr} 也越大. 图 12 中令 $a = 0.5 \text{ nm}$, $\sigma_{zy}^\infty = 6 \text{ MPa}$, 分别取 $B_y^\infty = 0.02 \text{ N}\cdot\text{A}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$, $B_y^\infty = 0.04 \text{ N}\cdot\text{A}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$, $B_y^\infty = 0.06 \text{ N}\cdot\text{A}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$. 由图 12 可知, J/J_{cr} 随着正电载荷 D_y^∞ 增加而增加, 随着负电载荷 D_y^∞ 增加先减小后增大. 当 σ_{zy}^∞ 不变时, B_y^∞ 越大, J/J_{cr} 也越小. 图 13 中令 $a = 2 \text{ nm}$, $\sigma_{zy}^\infty = 6 \text{ MPa}$, 分别取 $D_y^\infty = 0.001 \text{ C}\cdot\text{m}^{-2}$, $D_y^\infty = 0.003 \text{ C}\cdot\text{m}^{-2}$, $D_y^\infty = 0.005 \text{ C}\cdot\text{m}^{-2}$. 由图 13 可知, J/J_{cr} 随着 B_y^∞ 增加而减小, 当 σ_{zy}^∞ 不变时, 正电载荷 D_y^∞ 越大, J/J_{cr} 也越大.

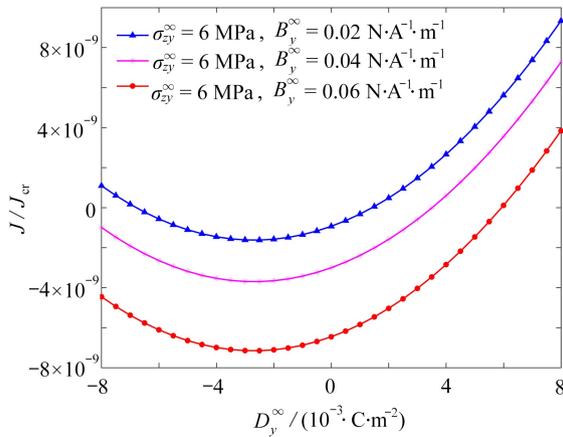


图 12 J/J_{cr} 随 D_y^∞ 的变化曲线

Fig. 12 The curves of J/J_{cr} with D_y^∞

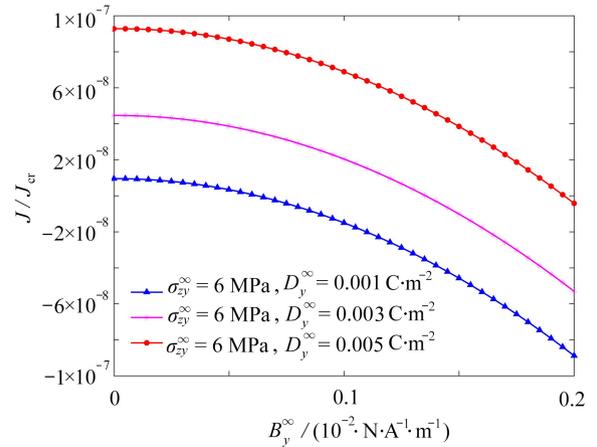


图 13 J/J_{cr} 随 B_y^∞ 的变化曲线

Fig. 13 The curves of J/J_{cr} with B_y^∞

6 结 论

本文基于表面弹性理论、保角映射技术和 MEE 耦合力学理论,研究了机械-电-磁载荷作用下纳米尺度唇口次生两不对称裂纹的断裂特征,利用复势函数理论,得到了裂纹尖端 MEE 强度因子的解析解和能量释放率,讨论了纳米圆孔半径、唇口孔的大小、唇口次生裂纹大小以及外加的机械-电-磁载荷对 MEE 场强因子的影响,所得结论如下:

1) 考虑表面效应时, K_{σ} , K_D 和 K_B 随缺陷尺寸的增加表面效应影响减小,当缺陷尺寸增加到一定程度时,结果趋于经典弹性理论.

2) 考虑表面效应时, K_{σ} 和 K_D 随唇口孔尺寸和裂纹尺寸的变化而变化,而 K_B 随唇口孔尺寸和裂纹尺寸的变化很小,说明 K_B 在纳米尺度下受到的影响很小.

3) 考虑表面效应时, K_{σ} , K_D 和 K_B 均随无穷远处机械载荷、电载荷和磁载荷的变化而变化,而磁载荷对其影响较小; K_B 随着机械载荷、电载荷和磁载荷增加变化很小.经典弹性理论下, K_{σ} , K_D 和 K_B 与无穷远处机械载荷、电载荷和磁载荷无关.

4) 考虑表面效应时,无量纲能量释放率 J/J_0 随唇口宽度的增加先增大后减小最终趋于经典弹性理论;无量纲能量释放率 J/J_{cr} 也随无穷远处机械载荷、电载荷和磁载荷的变化而变化.

致谢 本文作者衷心感谢内蒙古师范大学教育部重点实验室项目(无穷维哈密顿系统及其算法应用)(2023KFZD02)和包头师范学院科研项目(BSYKJ2021-ZY08)对本文的资助.

参考文献 (References):

- [1] SUCHTELEN J V. Product properties: a new application of composite materials[J]. *Philips Research Reports*, 1972, 27(1): 28-37.

- [2] VALENTE J, OU J Y, PLUM E, et al. A magneto-electro-optical effect in a plasmonic nanowire material[J]. *Nature Communications*, 2015, **6**: 7021.
- [3] LIU L L, FENG W J. Dugdale plastic zone model of a penny-shaped crack in a magneto-electroelastic cylinder under magneto-electroelastic loads[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2019, **89**(2): 291-305.
- [4] HU K Q, ZHONG Z, CHEN Z T. Interface crack between magneto-electroelastic and orthotropic half-spaces under anti-plane loading[J]. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2019, **99**: 95-103.
- [5] XIAO J H, XU Y L, ZHANG F C. Fracture analysis of magneto-electroelastic solid weakened by periodic cracks and line inclusions[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2019, **205**: 70-80.
- [6] AYATOLLAHI M, MONFARED M M, NOURAZAR M. Analysis of multiple moving mode-III cracks in a functionally graded magneto-electroelastic half-plane[J]. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2017, **28**(19): 2823-2834.
- [7] MA P, SU R K L, FENG W J. Moving crack with a contact zone at interface of magneto-electroelastic bimaterial[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2017, **181**: 143-160.
- [8] ZHAO M H, ZHANG Q Y, LI X F, et al. An iterative approach for analysis of cracks with exact boundary conditions in finite magneto-electroelastic solids[J]. *Smart Materials and Structures*, 2019, **28**(5): 055025.
- [9] XIAO J, XU Y, ZHANG F. Surface effects of electroelastic tip fields of multiple cracks emanating from a circular hole[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2020, **236**: 107219.
- [10] YANG Y, HU Z L, LI X F. Nanoscale mode-III interface crack in a bimaterial with surface elasticity[J]. *Mechanics of Materials*, 2020, **140**: 103246.
- [11] GURTIN M E, MURDOCH A I. A continuum theory of elastic material surfaces[J]. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1975, **57**(4): 291-323.
- [12] GURTIN M E, MURDOCH A I. Surface stress in solids[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1978, **14**(6): 431-440.
- [13] GURTIN M E, WEISSMÜLLER J, LARCHÉ F. A general theory of curved deformable interfaces in solids at equilibrium[J]. *Philosophical Magazine A*, 1998, **78**(5): 1093-1109.
- [14] DINEVA P, STOYNOV Y, RANGELOV T. Dynamic fracture behavior of nanocracked graded magneto-electroelastic solid[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2021, **91**(4): 1495-1508.
- [15] YANG D S, LIU G T. Anti-plane fracture problem of three nano-cracks emanating from a magneto-electrically permeable regular triangle nano-hole in magneto-electroelastic materials[J]. *Modern Physics Letters B*, 2021, **35**(7): 2150127.
- [16] 杨东升, 刘官厅. 电磁弹性材料中含有带四条纳米裂纹的正 $4n$ 边形纳米孔的反平面断裂问题[J]. *物理学报*, 2020, **69**(24): 181-190. (YANG Dongsheng, LIU Guanting. Anti-plane fracture problem of four nano-cracks emanating from a regular $4n$ -polygon nano-hole in magneto-electroelastic materials[J]. *Acta Physica Sinica*, 2020, **69**(24): 181-190. (in Chinese))
- [17] XIAO J H, FENG G Y, SU M Y, et al. Fracture analysis on periodic radial cracks emanating from a nano-hole with surface effects in magneto-electroelastic materials[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2021, **258**: 108115.
- [18] XIAO J H, XU B X, XU Y L, et al. Fracture analysis on a cracked elliptical hole with surface effect in magneto-electroelastic solid[J]. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2020, **107**: 102532.
- [19] GUO J H, HE L T, LIU Y Z, et al. Anti-plane analysis of a reinforced nano-elliptical cavity or nano-crack in a magneto-electroelastic matrix with surface effect[J]. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2020, **107**: 102553.
- [20] LIU Y Z, GUO J H, and ZHANG X Y. Surface effect on a nano-elliptical hole or nano-crack in magneto-electroelastic materials under antiplane shear[J]. *ZAMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **99**(7): e201900043.
- [21] XIAO J H, XU B X, XU Y L, et al. The generalized self-consistent micromechanics prediction of the magneto-electroelastic properties of multi-coated nanocomposites with surface effect[J]. *Smart Materials and Structures*, 2019, **28**(5): 055004.

- [22] WU Z L, LIU G T, YANG D S. Anti-plane fracture behavior of n nano-cracks emanating from a magnetoelastically semi-permeable regular n -polygon nano-hole in magnetoelectroelastic materials [J]. *International Journal of Modern Physics B*, 2024, **38**(14): 2450170.
- [23] XIAO J H, XIN Y Y. Fracture analysis of circular hole edge arbitrary position crack with surface effects in magnetoelectroelastic materials[J]. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2023, **28**(10): 2202-2214.
- [24] 肖俊华, 信玉岩. 电磁弹性体中纳米孔边任意位置贯穿裂纹的解析解[J]. 固体力学学报, 2024, **45**(1): 61-73. (XIAO Junhua, XIN Yuyan. Analytical solution of an arbitrary-location through crack emanating from a nano-hole in magneto-electro-elastic materials[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2024, **45**(1): 61-73. (in Chinese))
- [25] 范天佑. 断裂理论基础[M]. 北京: 科学出版社, 2003. (FAN Tianyou. *Foundation of Fracture Mechanics*[M]. Beijing: Science Press, 2003. (in Chinese))
- [26] 匡震邦. 只有尖点的平面曲边多角形缺陷的应力分析[J]. 力学学报, 1979, **15**(2): 118-128. (KUANG Zhenbang. Stress analysis for plane curved polygonal defects containing cusps only[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 1979, **15**(2): 118-128. (in Chinese))
- [27] 刘鑫, 郭俊宏, 于静. 磁电弹性材料中唇形裂纹反平面问题[J]. 内蒙古大学学报(自然科学版), 2016, **47**(1): 37-45. (LIU Xin, GUO Junhong, YU Jing. Anti-plane problem of a lip-shaped crack in a magneto-electro-elastic material[J]. *Journal of Inner Mongolia University (Natural Science Edition)*, 2016, **47**(1): 37-45. (in Chinese))
- [28] GUO H M, ZHAO G Z, JIANG L J. Screw dislocation interacting with lip-shaped crack in magnetoelectroelastic media[J]. *Chinese Journal of Computational Physics*, 2022, **39**(1): 33-40.
- [29] 郭怀民, 赵国忠, 刘官厅, 等. 含唇口次生两不对称裂纹的一维六方压电准晶体的反平面剪切问题[J]. 固体力学学报, 2024, **45**(1): 123-134. (GUO Huaimin, ZHAO Guozhong, LIU Guanting, et al. The anti-plane shear problem of a lip-shaped orifice with two asymmetric edge rips in the one-dimensional hexagonal piezoelectric quasicrystal material[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2024, **45**(1): 123-134. (in Chinese)).
- [30] МУСХЕЛИШВИЛИ Н И. 数学弹性力学的几个基本问题[M]. 赵惠元, 译. 北京: 科学出版社, 1958. (МУСХЕЛИШВИЛИ Н И. *Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity*[M]. ZHAO Huiyuan, transl. Beijing: Science Press, 1958. (in Chinese))
- [31] GUO J H, LU Z X. Anti-plane analysis of multiple cracks originating from a circular hole in a magnetoelectroelastic solid[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2010, **47**(14/15): 1847-1856.
- [32] CHEN T. Exact size-dependent connections between effective moduli of fibrous piezoelectric nanocomposites with interface effects[J]. *Acta Mechanica*, 2008, **196**(3): 205-217.