

# 驻极体薄膜揉皱变形理论及类挠曲电响应研究\*

刘曜华, 李俊, 冯晓满, 马建华, 王炳雷

(山东大学 工程力学系, 济南 250061)

**摘要:** 现有挠曲电俘能器存在俘能方式单一、机电耦合系数偏小,且仅在微观尺度显著等问题,难以在宏观尺度上实现高效的能量转换.驻极体作为一种内嵌电荷的介电材料,其非均匀变形可诱导显著的类挠曲电响应.薄膜揉皱作为一种双向收缩的复杂变形,其高应变梯度为宏观尺度下高效俘能提供了新方式.该文将驻极体宏观尺度下的强力电耦合特性与揉皱的高应变梯度优势相结合,建立了驻极体薄膜揉皱变形理论,基于该模型分析了不同电荷密度、支撑杯半径、薄膜厚度、放缩尺度下揉皱驻极体的类挠曲电响应及能量俘获特性.结果表明,对于厚度为 1 mm 的驻极体薄膜,当电荷密度  $q = -0.2 \text{ mC}\cdot\text{m}^{-2}$  时,有效类挠曲电强度相比纯聚二甲基硅氧烷(PDMS)薄膜的本征挠曲电效应高了近两个数量级.

**关键词:** 驻极体薄膜; 揉皱变形; 类挠曲电响应; 能量俘获

**中图分类号:** O343 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.450195

## Study on the Electret Film Crumpling Deformation Theory and Flexoelectric-Like Responses

LIU Yaohua, LI Jun, FENG Xiaoman, MA Jianhua, WANG Binglei

(Department of Engineering Mechanics, Shandong University, Jinan 250061, P.R.China)

**Abstract:** The flexoelectric energy harvesters face such challenges as the monotonous energy harvesting mode, the low electromechanical coupling coefficient, the only prominent effect on microscales, and the limited energy conversion efficiency on macroscales. The electret, as a dielectric material with embedded charges, exhibits significant flexoelectric-like responses induced by non-uniform deformation. The crumpled film in complex bidirectional contraction, provides a novel efficient energy harvesting approach due to high strain gradients on macroscales. Herein the strong macroscopic electromechanical coupling properties of electrets were combined with the advantageous high strain gradients of crumpling, to establish a deformation theory for crumpled flexoelectret films. Based on this model, the flexoelectric-like responses and energy harvesting characteristics of crumpled flexoelectret films were analyzed for different charge densities, supporting cup radii, film thicknesses, and scales. The results indicate that, for a 1 mm thick flexoelectret film, the effective flexoelectric-like intensity is 2 orders higher than that of the intrinsic flexoelectric effect of the pure PDMS film, with the charge density  $q = -0.2 \text{ mC}\cdot\text{m}^{-2}$ .

**Key words:** electret film; crumpling deformation; flexoelectric-like response; energy harvesting

\* 收稿日期: 2024-07-02; 修订日期: 2024-08-19

基金项目: 黄河流域协同科技创新项目(YDZX2023025)

作者简介: 刘曜华(2001—),男(E-mail: lyzh2001@163.com);

王炳雷(1980—),男,副教授,博士,博士生导师(通讯作者. E-mail: bwang@sdu.edu.cn).

引用格式: 刘曜华, 李俊, 冯晓满, 马建华, 王炳雷. 驻极体薄膜揉皱变形理论及类挠曲电响应研究[J]. 应用数学和力学, 2024, 45(11): 1392-1404.

## 0 引 言

挠曲电效应<sup>[1-4]</sup>是存在于电介质中的一种特殊的机电耦合机制.这种效应通过将介电材料中的应变梯度和极化进行耦合,使所有介电材料都可以产生电响应,常见的例子是一张揉皱的纸.然而,挠曲电效应存在明显的尺寸效应<sup>[2]</sup>,该效应的强度会随着材料尺寸的减小而增加,而且只在大应变梯度的纳米尺度上才会表现显著<sup>[5-8]</sup>.此外,经典弹性理论中的应变梯度有一个应变所不具备的特性,即随特征尺寸减小而急剧增大.由于上述尺寸效应的限制,挠曲电响应目前主要应用于纳米尺度的结构,如纳米尺度的传感器和致动器<sup>[9-12]</sup>、能量收集<sup>[8,10,13]</sup>、挠曲电半导体<sup>[14]</sup>,以及生物膜<sup>[15-16]</sup>等.

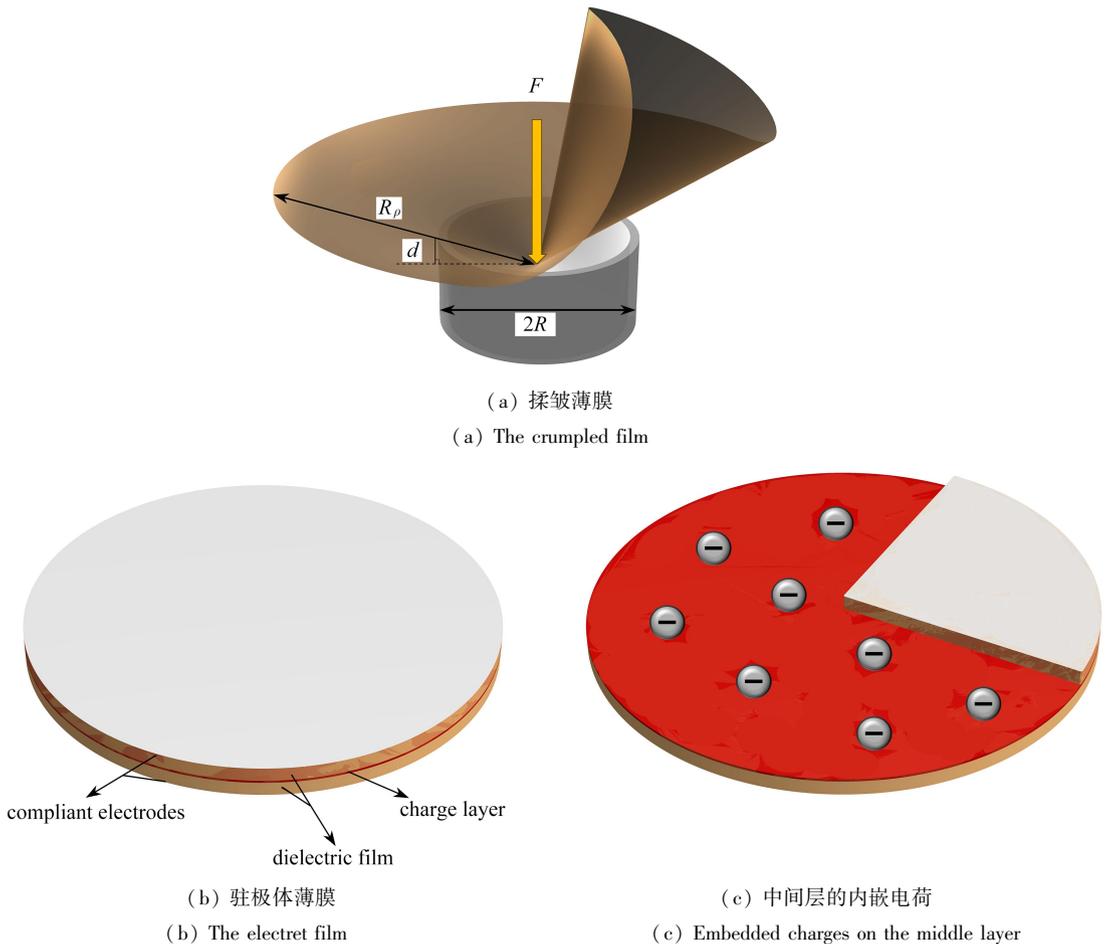


图 1 揉皱驻极体薄膜示意图

Fig. 1 Schematic of the crumpled electret film

产生挠曲电效应的一个例子便是揉皱变形.揉皱是一种具有较大曲率的变形,在日常生活中普遍存在,如图 1(a)所示.折叠的纸、衣服的凸起等,都属于揉皱变形.在早期的研究中,揉皱被认为是纯粹的力学和几何问题<sup>[17]</sup>.而随着研究的深入,人们越来越关注由揉皱引起的机电耦合效应.近期,Kodali 等<sup>[18]</sup>提出了可穿戴电子产品中聚合物压电材料的揉皱发电,并通过实验证实了电压的产生.Wang 等<sup>[19]</sup>建立了介质薄膜揉皱的理论模型,发现了机电耦合机制的规律,证明了揉皱聚合物压电薄膜中产生的电主要来源于挠曲电,并最终表明在亚微米尺度上,可以实现显著的挠曲电响应.

此外,大多数材料的本征挠曲电系数非常小,这一特性也限制了挠曲电的宏观行为.为实现大应变梯度,学者们一直试图通过设计具有不同厚度或梯度的弹性模量材料<sup>[20]</sup>、层合材料<sup>[21-22]</sup>等方式来增强挠曲电效应.驻极体是一种永久保持电荷或电偶极矩的介电材料,通过在材料内黏结电晕的聚四氟乙烯 (PTFE),进而将电荷嵌入并固定.最简单的驻极体是通过在两层相同的介电材料的内表面上沉积一定密度的净电荷得到的<sup>[23-24]</sup>,如图 1(b)和 1(c)所示.驻极体具有广泛的应用,其中最具代表性的就是“挠曲驻极体<sup>[25]</sup>”,本文通

过在介电材料中嵌入电荷和偶极子来获得驻极体.与传统的挠曲电极为相似,当驻极体发生非均匀变形(如弯曲变形)时,由净电荷引起的电荷层上下已经存在的极化不能相互抵消,导致了净极化(或有效极化)的产生,并且净极化强度随着弯曲程度(即应变梯度)的增加而增加.因此,这种力电耦合效应也被称为类挠曲电响应.Wen等<sup>[25]</sup>的实验已经证明,在宏观尺度下,单向弯曲的挠曲驻极体的有效挠曲电系数可提高两个数量级.

基于挠曲驻极体在宏观尺度下的力电耦合效应强、电荷储存稳定性高的特性,本文采用挠曲驻极体薄膜代替传统的纯介电薄膜产生揉皱变形,以提高宏观尺度上的类挠曲电响应的强度.本文第1节推导了驻极体薄膜的揉皱变形理论,包括求解有效类挠曲电系数、应变张量和曲率张量、薄膜变形内能以及薄膜的极化相关参数;第2节研究了不同电荷密度、支撑杯半径、薄膜厚度、放缩尺度下,揉皱驻极体薄膜的类挠曲电响应及其能量俘获特性.

## 1 驻极体薄膜揉皱变形理论

### 1.1 有效类挠曲电系数

揉皱变形的驻极体薄膜如图1(a)所示,薄膜半径为 $R_p$ ,尖端挠度为 $d$ ,厚度为 $H$ ,嵌入电荷密度为 $q$ ,支撑杯口半径为 $R$ .本小节为简化计算,以标量的形式描述电介质的物理量.且该部分采用球坐标描述物理量,其他部分则采用柱坐标.揉皱驻极体薄膜分为外层、内层,如图2(a)所示, $D_1, e_1, P_1$ 和 $D_2, e_2, P_2$ 分别为驻极体薄膜外层和内层的电位移、电场强度和电极化大小,而内外层电极的电极化方向分别由薄膜表面指向中间电荷层<sup>[25]</sup>.采用薄膜表面的电势均为0V的接地状态,即短路边界条件.变形前,外、内层电极的初始电荷密度分别为 $q_1$ 和 $q_2$ .

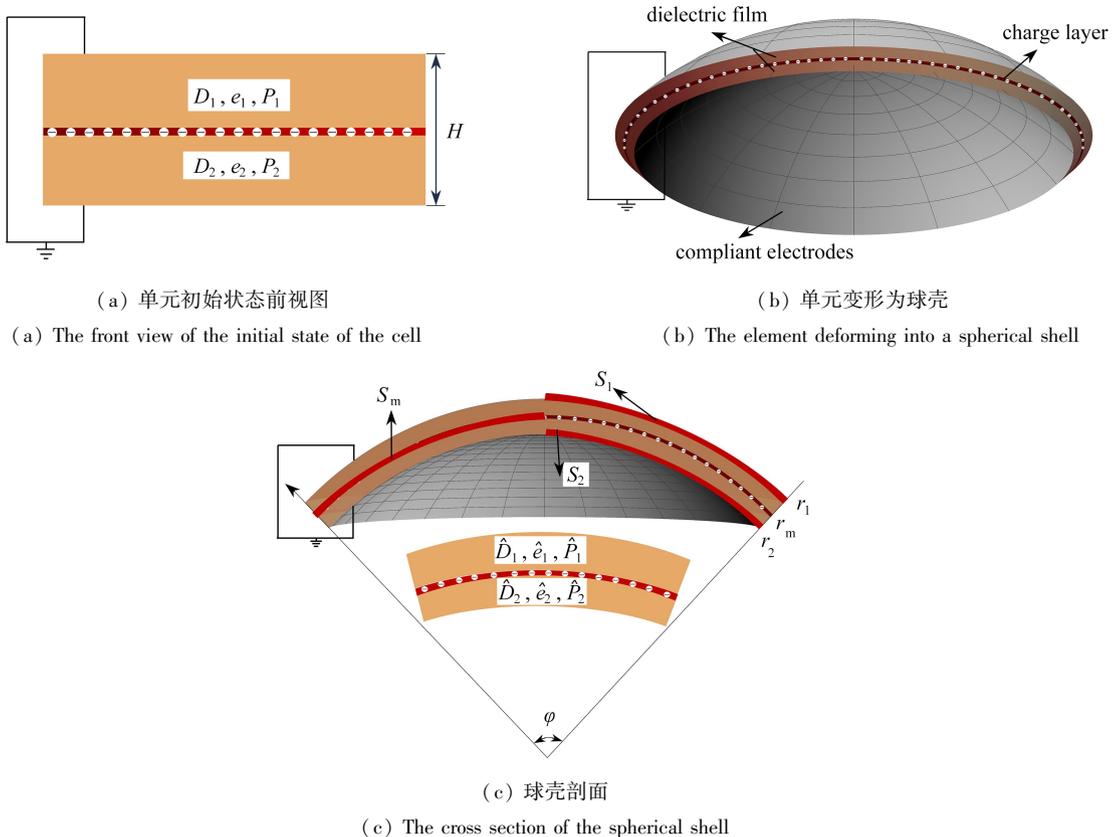


图2 驻极体薄膜无穷小元件的变形示意图

Fig. 2 Schematic of the deformed electret element

根据电位移与电场强度的数量关系、Gauss定律以及短路边界条件,可得两电极电荷密度为 $q_1 = q_2 = -q/2$ ,进而得到其对应的总电荷量为 $Q_1 = Q_2 = -q\pi R_p^2/2$ .为简化分析,本文对揉皱后的微元做出如下假设:

- 1) 一个无穷小的单元发生双向弯曲变形后形成理想球壳结构,如图 2(b)所示;
- 2) 揉皱后,中间层内的电荷密度仍然等于  $q$ ;
- 3) 球壳当前构型用中间层的平均曲率  $K$  来表示,即

$$K = \frac{1}{2} (\kappa_{\rho\rho} + \kappa_{\theta\theta}), \quad (1)$$

式中  $\kappa_{\rho\rho}$  和  $\kappa_{\theta\theta}$  分别是无穷小变形单元在两个主轴方向上的曲率。

在揉皱状态下,  $r_m, r_1$  和  $r_2$  分别表示中间层和外、内层电极的平均曲率半径;  $\hat{q}_1$  和  $2S_1$  分别表示外电极揉皱后的电荷密度和弧长;  $\hat{D}_1, \hat{e}_1$  和  $\hat{P}_1$  分别表示揉皱后外层电极的电位移、电场强度、电极化大小,如图 2(c)所示。

曲率半径、弧长、角度之间有如下几何关系:

$$S_m = \frac{r_m\varphi}{2}, S_1 = \frac{r_1\varphi}{2}, S_2 = \frac{r_2\varphi}{2}, S = \frac{r\varphi}{2}, K = \frac{1}{r_m}, \quad (2)$$

其中  $S_m, S_1$  和  $S_2$  分别为中间层弧长、外层电极弧长和内层电极弧长。假设电位移和电场间的线性关系为

$$\hat{D}_1(r) = \varepsilon \hat{e}_1(r), \hat{D}_2(r) = \varepsilon \hat{e}_2(r), \quad (3)$$

其中  $\varepsilon$  代表材料的介电常数。

基于 Gauss 定律,揉皱微元的电荷密度与电位移之间的关系可以用下列方程表示:

$$\begin{cases} \hat{q}_1 r_1^2 = -\hat{D}_1(r) r^2, & r_m < r < r_1, \\ \hat{q}_2 r_2^2 = \hat{D}_2(r) r^2, & r_2 < r < r_m, \\ \hat{q}_1 r_1^2 + \hat{q}_2 r_2^2 + q r_m^2 = 0. \end{cases} \quad (4)$$

在接地状态下,即薄膜的外、内层电压差为零,则有

$$\int_{r_2}^{r_m} \hat{e}_2(r) dr + \int_{r_m}^{r_1} \hat{e}_1(r) dr = 0. \quad (5)$$

根据式(1)–(5),外层、内层两个电极的电荷密度分别为

$$\hat{q}_1 = \frac{-q(1/r_2 - K)}{r_1^2 K^2 (1/r_2 - 1/r_1)}, \hat{q}_2 = \frac{-q(1/r_1 - K)}{r_2^2 K^2 (1/r_2 - 1/r_1)}. \quad (6)$$

两电极的电荷改变量可以表示为

$$\begin{cases} \Delta Q_1 = \hat{Q}_1 - Q_1 = \frac{\pi q \varphi^2 (2K - 1/r_2 - 1/r_1)}{8K^2 (1/r_2 - 1/r_1)}, \\ \Delta Q_2 = \hat{Q}_2 - Q_2 = -\frac{\pi q \varphi^2 (2K - 1/r_2 - 1/r_1)}{8K^2 (1/r_2 - 1/r_1)}. \end{cases} \quad (7)$$

定义沿厚度方向的有效极化为

$$P_{\text{eff}} = \frac{\Delta Q}{A_m}, \quad (8)$$

式中  $A_m = \frac{\pi \varphi^2}{4K^2}$  表示中间层的面积。

定义沿厚度方向的有效极化与中间层曲率之比为有效类挠曲电系数  $\mu_{\text{eff}}^{[25]}$ 。根据式(2)、(7)和(8),有效类挠曲电系数可以表示为

$$\mu_{\text{eff}} = \frac{P_{\text{eff}}}{K} = \frac{q(2K - 1/r_2 - 1/r_1)}{2K(1/r_2 - 1/r_1)}. \quad (9)$$

不可压缩材料有如下几何关系:

$$\frac{A_1 + A_m}{2} (r_1 - r_m) = \frac{A_m + A_2}{2} (r_m - r_2) = \frac{HA_m}{2}, \quad (10)$$

其中  $A_1 = \frac{\pi r_1^2 \varphi^2}{4}$  和  $A_2 = \frac{\pi r_2^2 \varphi^2}{4}$  约为两个电极变形后的面积. 定义

$$r_1 = r_m + a, r_2 = r_m + b. \tag{11}$$

式(10)可写为

$$\begin{cases} K^3 a^3 + 2Ka^2 + 2a = H, \\ K^3 b^3 + 2Kb^2 + 2b = -H. \end{cases} \tag{12}$$

忽略高阶项  $K^3 a^3$  和  $K^3 b^3$  的贡献, 式(12)可写为

$$\begin{cases} a = \frac{\sqrt{1+2KH} - 1}{2K} = \frac{1 + KH - \frac{1}{8}(2KH)^2 + o((2KH)^2) - 1}{2K}, \\ b = \frac{\sqrt{1-2KH} - 1}{2K} = \frac{1 - KH - \frac{1}{8}(2KH)^2 + o((2KH)^2) - 1}{2K}. \end{cases} \tag{13}$$

当  $KH \ll 1$  时, 有

$$a = \frac{H}{2} - \frac{KH^2}{4}, b = -\frac{H}{2} - \frac{KH^2}{4}. \tag{14}$$

将式(11)和(14)代入到式(9), 不可压缩条件下的有效类挠曲电系数可以表示为

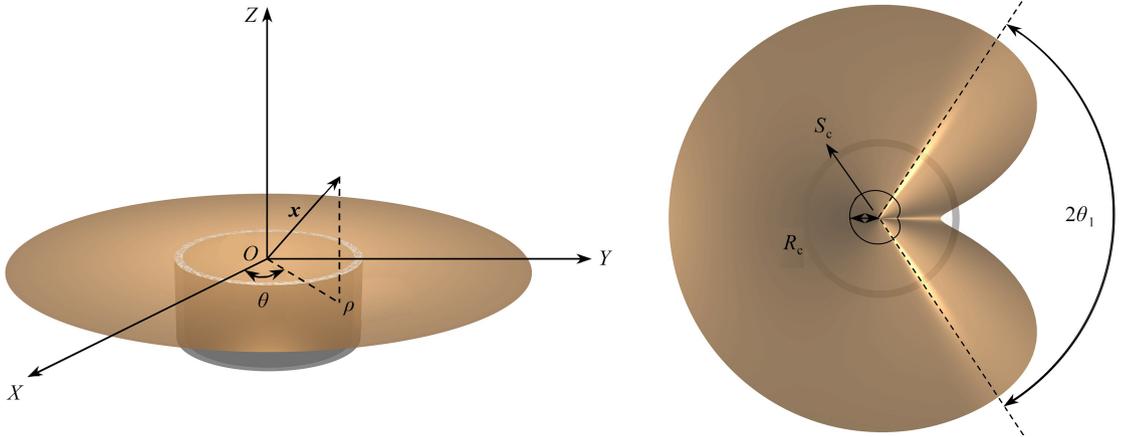
$$\mu_{\text{eff}} \approx -\frac{qH}{2}. \tag{15}$$

### 1.2 应变张量和曲率张量

为表征驻极体薄膜的揉皱变形特性, 定义其所占空间域为

$$\Omega = \{(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3: 0 \leq \rho \leq R_\rho, 0 \leq |\theta| \leq \pi, 0 \leq z \leq H\}, \tag{16}$$

其中  $(\rho, \theta, z)$  是以  $(e_\rho, e_\theta, e_z)$  为基底的圆柱坐标. 材料在柱坐标中的一点表示为  $\mathbf{x} = \rho e_\rho + z e_z \in \Omega$ .



(a) 圆柱坐标的薄膜 (a) The thin film in cylindrical coordinates (b) 揉皱区域沿线状脊的角度 (b) The angle of the folded area along fold line ridges

图3 揉皱膜示意图

Fig. 3 Schematic of a crumpled film

薄膜边界为

$$\partial\Omega = \partial\Omega_u \cup \partial\Omega_l \cup \partial\Omega_s, \tag{17}$$

上表面  $\partial\Omega_u$ 、下表面  $\partial\Omega_l$  和周围表面  $\partial\Omega_s$  分别由下式给出:

$$\begin{cases} \partial\Omega_u = \{\mathbf{x} \in \Omega: z = H\}, \\ \partial\Omega_l = \{\mathbf{x} \in \Omega: z = 0\}, \\ \partial\Omega_s = \{\mathbf{x} \in \Omega: \rho = R_\rho\}. \end{cases} \tag{18}$$

考虑中间层变形  $S = \{ \mathbf{x} \in \Omega; z = h/2 \}$ ,  $\mathbf{x} \in S$  处的材料点移动到  $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$  处后, 对应的位移矢量  $\mathbf{u}$ ;  $S \rightarrow \mathbb{R}^3$  可做如下分解:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_s + \mathbf{u}_\perp, \quad (19)$$

其中面内位移和面外挠度分别表示为

$$\mathbf{u}_s = u_\rho(\rho, \theta) \mathbf{e}_\rho + u_\theta(\rho, \theta) \mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{u}_\perp = w(\rho, \theta) \mathbf{e}_z. \quad (20)$$

定义平面内薄膜的应变张量为

$$\mathbf{E}_s = \frac{1}{2} [ \nabla_s \mathbf{u}_s + (\nabla_s \mathbf{u}_s)^T + \nabla_s w \otimes \nabla_s w ], \quad (21)$$

其中  $\nabla_s = \mathbf{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta}$  是二维梯度算子. 基于式 (20) 和 (21), 有

$$\mathbf{E}_s := \begin{bmatrix} \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial \rho} \right)^2 & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} - \frac{u_\rho}{\rho} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\rho}{\partial \theta} - \frac{u_\rho}{\rho} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) & \frac{u_\rho}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

定义薄膜的曲率张量为

$$\boldsymbol{\kappa} = - \nabla_s \nabla_s w(\rho, \theta). \quad (23)$$

根据式 (20) 和 (23) 可得应变张量表达式如下:

$$\boldsymbol{\kappa} := \begin{bmatrix} - \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} & - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial \rho \partial \theta} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \\ - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial \rho \partial \theta} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} & - \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \end{bmatrix}. \quad (24)$$

为模拟可展锥, 将薄膜中间层  $S$  分为如下两部分:

$$S^c = \{ \mathbf{x} \in S; 0 \leq \rho \leq R_c \}, \quad S^o = S \setminus S^c. \quad (25)$$

核心部分  $S^c$  是可展锥尖端的附近区域, 半径为  $R_c$  [26-27], 可展锥的外围部分用  $S^o$  表示.

在柱坐标下, 将式 (20) 中的面外挠度  $w(\rho, \theta)$  设为以下形式:

$$w(\rho, \theta) = \begin{cases} w^*(\rho, \theta), & \text{on } S^c, \\ \rho \alpha_1 \psi^*(\theta), & \text{on } S^o, \end{cases} \quad (26)$$

其中  $w^*(\rho, \theta)$  为核心部分的挠度,  $\alpha_1$  是薄膜尖端挠度  $d$  与支撑杯半径  $R$  的比值:

$$\alpha_1 = \frac{d}{R}. \quad (27)$$

函数  $\psi^*(\theta)$  的展开式为

$$\psi^*(\theta) = H^*(|\theta| - \theta_1) + \tilde{\psi}(\theta) H^*(\theta_1 - |\theta|), \quad (28)$$

式中  $H^*$  是 Heaviside 函数, 而函数  $\tilde{\psi}(\theta)$  为

$$\tilde{\psi}(\theta) = \frac{\sin \theta_1 \cos(\alpha \theta) - \alpha \sin(\alpha \theta_1) \cos \theta}{\sin \theta_1 \cos(\alpha \theta_1) - \alpha \sin(\alpha \theta_1) \cos \theta_1}, \quad (29)$$

式中,  $\alpha \approx 3.8$ , 和  $\theta_1 \approx 1.21 \text{ rad}(70^\circ)$  是 Cerda 和 Mahadevan 预测的两个与揉皱薄膜形状有关的常数 [28].

核心部位  $S^c$  的曲率极大, 且存在较大的应变梯度. 对于小变形, 应变张量  $\mathbf{E}_s$  和核心部分  $S^c$  的曲率张量  $\boldsymbol{\kappa}$  分别近似为 [26-27]

$$|\mathbf{E}_s| \approx \lambda_E \alpha_1^2 \alpha_2^2, \quad |\boldsymbol{\kappa}| \approx \lambda_\kappa \frac{\alpha_1}{R_c}, \quad \text{on } S^c, \quad (30)$$

其中  $\lambda_E = 5.5$  和  $\lambda_\kappa = 5$  为修正小变形的简化参数. 定义未知张量  $\mathbf{A}$  的模为  $|\mathbf{A}| = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}}$ . 比值  $\alpha_2 = R_c/R$  为核心部分的无量纲半径.

在外部区域  $S^o$ , 通过式 (24) 和式 (26) — (29), 曲率张量  $\boldsymbol{\kappa}$  由下式给出:

$$\boldsymbol{\kappa} := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha_1}{\rho} \Psi^*(\theta) \end{bmatrix}, \quad \text{on } S^0. \quad (31)$$

函数  $\Psi^*(\theta)$  由下式给出:

$$\Psi^*(\theta) = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \psi^*(\theta) + \psi^*(\theta). \quad (32)$$

对于  $S^0$  上的应变张量  $\mathbf{E}_s$ , 不可扩展性条件要求拉伸应变在特定挠度下在该区域消失.

### 1.3 薄膜变形内能

驻极体薄膜空间区域为  $\Omega$ , 边界为  $\partial\Omega$ , 则其总势能为

$$U(\mathbf{u}, \mathbf{p}, \xi) = \int_{\Omega} \left\{ W(\nabla \mathbf{u}, \nabla \nabla \mathbf{u}, \mathbf{p}) - \frac{1}{2} \varepsilon_0 |\nabla \xi|^2 + \mathbf{p} \cdot \nabla \xi \right\} d\nu - \int_{\partial\Omega} Q \xi ds - \int_{\partial\Omega} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{u}) ds, \quad (33)$$

其中  $\nabla$  是梯度算子,  $\mathbf{u}$  是位移,  $\mathbf{p}$  是极化,  $W(\nabla \mathbf{u}, \nabla \nabla \mathbf{u}, \mathbf{p})$  是内能函数,  $\xi$  是电势,  $Q$  是表面电荷密度,  $\mathbf{t}$  是施加的荷载,  $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$  F/m 是真空介电常数.

为了更简洁地探究驻极体薄膜揉皱产生的类挠曲电响应, 仅探讨变形对极化的单向耦合机制. 省略电势能, 则与变形相关的势能如下:

$$U(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} W(\nabla \mathbf{u}, \nabla \nabla \mathbf{u}) - \int_{\partial\Omega} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{u}) ds. \quad (34)$$

平衡条件下, 与变形相关的势能的一阶变分为零, 则

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} - \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) = \mathbf{0}, \quad \text{in } \Omega, \quad (35)$$

$$(\boldsymbol{\sigma} - \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) \mathbf{n} - \nabla \cdot (\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{n}) = \mathbf{t}, \quad \text{on } \partial\Omega, \quad (36)$$

其中

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \nabla \mathbf{u}}, \quad \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial W}{\partial \nabla \nabla \mathbf{u}}, \quad (37)$$

$\nabla \cdot$  是散度算子,  $\boldsymbol{\sigma}$  与  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  分别为二阶、三阶应力张量,  $\mathbf{n}$  是表面  $\partial\Omega$  的外法线单位向量.

由线性本构关系, 内能函数  $W(\nabla \mathbf{u}, \nabla \nabla \mathbf{u})$  可以写为<sup>[29]</sup>

$$W = W^{\text{elast}} + \frac{1}{2} \nabla \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{g} \nabla \nabla \mathbf{u}, \quad (38)$$

其中,  $W^{\text{elast}}$  是纯弹性能量密度函数, 参数  $\mathbf{g}$  是与应变梯度效应相关的六阶弹性张量.

对于薄膜, 内能函数(38)可改写为

$$W = W^{\text{elast}} + \frac{1}{2} g \Pi_{3s}^2, \quad (39)$$

其中  $\Pi_{3s} = \text{tr}(\boldsymbol{\kappa})$  是方程(24)中曲率张量  $\boldsymbol{\kappa}$  的迹. 应变梯度效应对应的系数  $g$  被定义为<sup>[30]</sup>

$$g = E l_0^2, \quad (40)$$

其中  $E$  是复合材料的弹性模量, 而  $l_0$  是 PDMS 材料的回转半径.

纯弹性能量密度函数  $W^{\text{elast}}$  由拉伸能量密度函数和弯曲能量密度函数两部分组成, 即

$$W^{\text{elast}} = W^s + W^b, \quad (41)$$

分别为

$$W^s = \frac{1}{2} A \mathbf{E}_s \cdot \mathbf{E}_s, \quad W^b = \frac{1}{2} D [\text{tr}(\boldsymbol{\kappa})]^2, \quad (42)$$

其中  $A = E/(1 - \nu^2)$  和  $D = AH^2/12$  均为材料参数,  $\mathbf{E}_s$  是平面内应变张量, 而  $\boldsymbol{\kappa}$  是曲率张量.

薄膜的厚度  $H$  远小于其平面尺寸, 则式(34)中的弹性能可写为

$$\int_{\Omega} W^{\text{elast}} d\nu = \frac{1}{2} \int_S C_s \mathbf{E}_s \cdot \mathbf{E}_s ds + \frac{1}{2} \int_S C_b [\text{tr}(\boldsymbol{\kappa})]^2 ds. \quad (43)$$

拉伸刚度  $C_s$  和弯曲刚度  $C_b$  分别为

$$C_s = AH = \frac{EH}{1 - \nu^2}, C_b = DH = \frac{EH^3}{12(1 - \nu^2)}. \quad (44)$$

外力势能可近似表示为

$$- \int_{\partial\Omega} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{u}) ds \approx - \lim_{\Delta s \rightarrow 0} (\mathbf{t} \cdot \mathbf{u}) \Delta s = -Fd, \quad (45)$$

式中  $F$  为作用于揉皱薄膜中心的垂直集中力,且垂直移动距离为  $d$ .

基于式(39)–(45),薄膜的变形势能  $U$  为

$$U = \frac{1}{2} \int_S (C_s \mathbf{E}_s \cdot \mathbf{E}_s + (C_b + gH) [\text{tr}(\boldsymbol{\kappa})]^2) ds - Fd. \quad (46)$$

根据式(30)和(46),储存在薄膜核心部分  $S^c$  的势能为

$$U_{\text{core}} = \frac{1}{2} \pi C_s \lambda_E^2 \alpha_1^4 \alpha_2^4 R_c^2 + \frac{1}{2} \pi (C_b + gH) \lambda_\kappa^2 \alpha_1^2. \quad (47)$$

基于式(31)和(46),储存在薄膜外围部分  $S^o$  的势能为

$$U_{\text{outer}} = \frac{1}{2} \pi N_1 (C_b + gH) \alpha_1^2 \ln\left(\frac{R_p}{\alpha_2 R}\right), \quad (48)$$

式中

$$N_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\Psi^*(\theta)]^2 d\theta = \int_{-1}^1 [\Psi^*(\pi\bar{\theta})]^2 d\bar{\theta}, \alpha_2 = R_c/R. \quad (49)$$

和外力有关的势能为

$$U_F = -Fd. \quad (50)$$

引入下列无量纲参数:

$$\alpha_1 = \frac{d}{R}, \alpha_2 = \frac{R_c}{R}, \bar{R}_p = \frac{R_p}{R}, \bar{H} = \frac{H}{R}, \bar{C}_s = C_s \frac{H^2}{C_b}, \bar{F} = \frac{F}{\frac{1}{2} \pi R \frac{C_b}{H^2}}, \bar{g} = g \frac{H}{C_b}, \quad (51)$$

其中,  $R$  为支撑杯的半径,  $d$  为薄膜中心的挠度,  $R_c$  为核心部分的半径.

将无量纲量(51)代入到式(47)–(50)中,则无量纲势能可以表示为

$$\begin{aligned} \bar{U}(\alpha_1, \alpha_2) &= \frac{U_{\text{core}} + U_{\text{outer}} + U_F}{\frac{1}{2} \pi R^2 \frac{C_b}{H^2}} = \\ & \bar{C}_s \lambda_E^2 \alpha_1^4 \alpha_2^6 + (1 + \bar{g}) \lambda_\kappa^2 \alpha_1^2 \bar{H}^2 + (1 + \bar{g}) \alpha_1^2 \bar{H}^2 \ln\left(\frac{\bar{R}_p}{\alpha_2}\right) N_1 - \bar{F} \alpha_1. \end{aligned} \quad (52)$$

变形势能  $\delta U[u] = 0$  转化为  $\delta \bar{U}[\alpha_1, \alpha_2] = 0$ . 因此控制方程可以表示为

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{U}[\alpha_1, \alpha_2]}{\partial \alpha_1} = 4\bar{C}_s \lambda_E^2 \alpha_1^3 \alpha_2^6 + 2(1 + \bar{g}) \alpha_1 \bar{H}^2 \lambda_\kappa^2 + 2(1 + \bar{g}) \alpha_1 \bar{H}^2 \ln\left(\frac{\bar{R}_p}{\alpha_2}\right) N_1 - \bar{F} = 0, \\ \frac{\partial \bar{U}[\alpha_1, \alpha_2]}{\partial \alpha_2} = 6\bar{C}_s \lambda_E^2 \alpha_1^4 \alpha_2^5 - \frac{(1 + \bar{g}) \alpha_1^2 \bar{H}^2 N_1}{\alpha_2} = 0. \end{cases} \quad (53)$$

式(53)中两个代数方程可以解出无量纲中心挠度  $\alpha_1 = d/R$ , 核心部分无量纲半径  $\alpha_2 = R_c/R$ . 在此基础上,可由方程(30)和(31)求得核心部分  $S^c$  和外围部分  $S^o$  的曲率.

#### 1.4 驻极体薄膜揉皱变形产生的极化

基于式(9)、(15)和(30),揉皱薄膜核心部分  $S^c$  沿厚度方向的有效极化可以表示为

$$P_{\text{eff}}^c = \mu_{\text{eff}} K = -\frac{qH\lambda_\kappa \alpha_1}{4R_c}. \quad (54)$$

核心区的应变对面积影响小,因此中间层面积不变的假设仍成立.通过式(9)、(15)和(31),微元外围部分  $S^\circ$  沿厚度方向的有效极化可表示为

$$P_{\text{eff}}^\circ = \mu_{\text{eff}} K = \frac{qH\alpha_1\psi^*(\theta)}{4\rho}. \quad (55)$$

定义平均有效极化为

$$P_{\text{aver}} = \frac{\Delta Q^c + \Delta Q^\circ}{\pi R_\rho^2}, \quad (56)$$

式中  $\Delta Q^c$  和  $\Delta Q^\circ$  分别表示为

$$\begin{cases} \Delta Q^c = \int_S P_{\text{eff}}^c ds = -\frac{\pi qHR_c\lambda_\kappa\alpha_1}{4}, \\ \Delta Q^\circ = \int_S P_{\text{eff}}^\circ ds = \frac{\pi qH(R_\rho - R_c)N_2\alpha_1}{4}. \end{cases} \quad (57)$$

定义  $N_2$  为

$$N_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\psi^*(\theta)] d\theta = \int_{-1}^1 [\psi^*(\pi\bar{\theta})] d\bar{\theta}. \quad (58)$$

根据式(57)和(58),式(56)可以改写为

$$P_{\text{aver}} = \frac{qH(R_\rho - R_c)N_2\alpha_1 - qHR_c\lambda_\kappa\alpha_1}{4R_\rho^2}. \quad (59)$$

基于 Gauss 定理,平均有效电场强度可以表示为  $-P_{\text{aver}}/\varepsilon_0$ , 而揉皱薄膜的外、内层之间的平均电压则为

$$|\Delta\xi| = \left| \frac{HP_{\text{aver}}}{\varepsilon_0} \right|. \quad (60)$$

式(60)即为感应有效电压.

在此基础上,本文研究揉皱驻极体薄膜的力电耦合特性.以 PDMS 作为介电材料制备挠曲驻极体,取薄膜的弹性模量  $E = 750 \text{ kPa}$ , Poisson 比  $\nu = 0.49$ , 回转半径  $l_0 = 10 \text{ nm}$ , 相对介电常数  $\varepsilon = 3.17^{[25]}$ . PDMS 材料相对常用的挠曲电聚合物 PVDF 的优势在于更易于产生揉皱变形.此外,模型的几何参数为  $R_\rho = 50 \text{ mm}$ ,  $R = 12.5 \text{ mm}^{[19]}$ , 本文不考虑大挠度 ( $\alpha_1 > 0.2$ ) 的情况.

## 2 驻极体薄膜揉皱变形的类挠曲电响应

### 2.1 电荷密度对揉皱驻极体薄膜有效电压的影响

为了探究嵌入薄膜的电荷密度对力电耦合的影响,图4给出了薄膜厚度  $H$  固定为  $1 \text{ mm}$ , 电荷密度  $q$  在  $-0.1 \sim -0.4 \text{ mC}\cdot\text{m}^{-2}$  之间变化时,薄膜的感应有效电压随无量纲挠度  $\alpha_1$  的变化规律.固定无量纲挠度  $\alpha_1$ , 可以发现驻极体薄膜的电荷密度  $q$  越大,产生的有效电压越强.原因是,理论模型中电荷密度  $q$  是有效类挠曲电系数  $\mu_{\text{eff}}$  表达式(15)中的关键变量.此外,有效电压的增加倍数与电荷密度  $q$  的增加倍数一致,这表明有效电压与电荷密度  $q$  始终保持线性关系,这一推论也符合式(59)和(60).

由图4还可以看出,当电荷密度  $q$  一定时,有效电压随着无量纲挠度  $\alpha_1$  的增大而增大,这表明更大的应变梯度会激发更强的有效极化,最终产生更显著的有效电压.

### 2.2 支撑杯半径对揉皱驻极体薄膜有效电压的影响

支撑杯半径  $R$  在  $10 \text{ mm}$  到  $30 \text{ mm}$  间变化时,驻极体薄膜揉皱产生有效电压的变化规律如图5所示.当挠度  $\alpha_1$  一定时,研究发现支撑杯半径越小,有效电压数值越大,这是因为小支撑半径会使驻极体薄膜的变形角度更大.此外,支撑杯半径  $R$  对有效电压的增强作用随着挠度  $\alpha_1$  的增大而增大.

### 2.3 厚度对揉皱驻极体薄膜各参数的影响

为研究薄膜厚度对揉皱驻极体薄膜各相关参数的影响,图6给出了当电荷密度  $q$  固定为  $-0.1 \text{ mC}\cdot\text{m}^{-2}$ , 厚度  $H$  在  $0.1 \text{ mm}$  到  $2 \text{ mm}$  变化时,核心半径  $R_c$ 、垂直集中力  $F$  以及有效电压与无量纲中心挠度  $\alpha_1$  间的变化

规律.

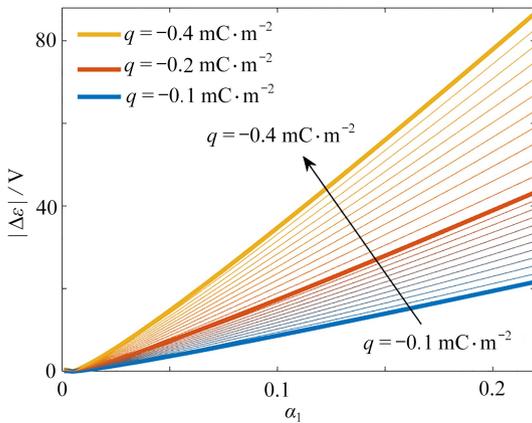


图 4 感应有效电压与无量纲尖端挠度的关系

Fig. 4 The induced effective voltage vs. the dimensionless tip deflection

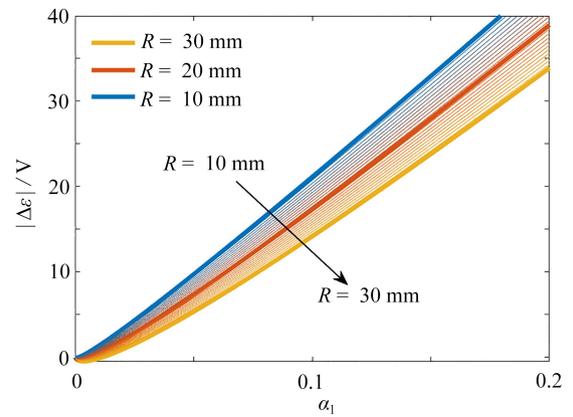


图 5 感应有效电压与支撑杯半径的关系

Fig. 5 The induced effective voltage vs. the radius of the support cup

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同。

当无量纲中心挠度  $\alpha_1$  一定时,核心部分半径  $R_c$  随厚度  $H$  的减小而减小,如图 6(a) 所示。原因是厚度减小会降低材料刚度,实现在更小区域内完成同等程度的变形。此外,厚度  $H$  保持恒定时,核心部分半径  $R_c$  随挠度  $\alpha_1$  增大而减小,且减小的幅度也随挠度  $\alpha_1$  增大而减小。这一变化规律与 Wang 等<sup>[19]</sup>的研究结果是相同的。而核心部分的曲率明显大于外围部分的曲率,则说明随着  $R_c$  的减小,核心部分  $S^c$  与外部部分  $S^o$  在电极化贡献方面存在着竞争关系。

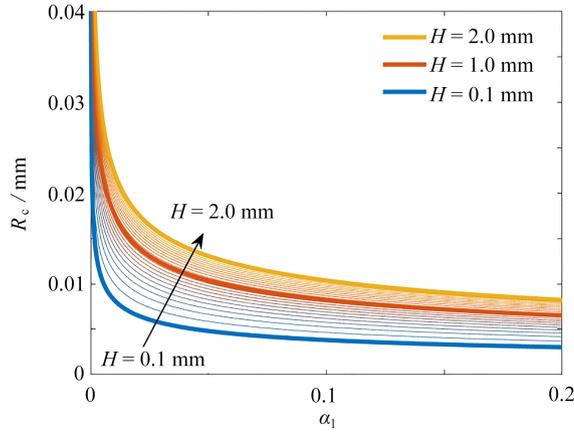
固定无量纲挠度  $\alpha_1$  时,厚度  $H$  越大,垂直力  $F$  也越大,这是因为刚度较大的材料需要施加更大的集中力  $F$  来产生同等程度的变形。此外,当厚度  $H$  一定时,垂直力  $F$  随挠度  $\alpha_1$  的增大而增大,且增大的幅度随挠度  $\alpha_1$  的增大而放缓,如图 6(b) 所示。

当挠度  $\alpha_1$  恒定时,厚度  $H$  越大,有效电压越大,如图 6(c) 所示,原因是有效类挠电系数  $\mu_{\text{eff}}$  的增大。同时,厚度  $H$  的增加还明显提高了有效电压随挠度  $\alpha_1$  增大的幅度,这一特点符合式 (60)。此外,由式 (59) 和 (60) 可见,薄膜厚度  $H$  的变化对有效电压的影响呈现出非线性的特点,这与电荷密度  $q$  对有效电压的影响是不同的。

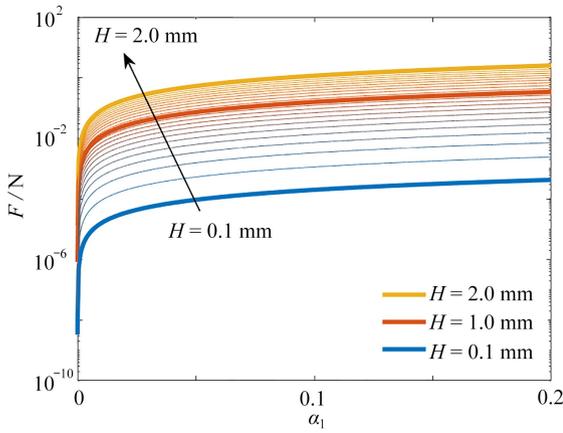
## 2.4 尺寸效应对揉皱驻极体薄膜能量效率的影响

基于上述电荷密度、支撑杯半径和薄膜厚度对揉皱驻极体薄膜类挠曲电响应的研究,本小节探讨尺寸效应对揉皱驻极体薄膜能量效率的影响。感应净电荷  $\Delta Q$  与施加力  $F$  之间的比值  $d^{\text{eff}} = \Delta Q/F$  是评估类挠曲电响应强度的一类指标,可看作每施加单位力所产生的电荷量。定义无量纲能量效率为  $\bar{d} = d^{\text{eff}}/d_0^{\text{eff}}$ ,其中无量纲参数  $d_0^{\text{eff}} = 62 \text{ pC/N}$ 。本文取  $R_p = 50 \text{ mm}$ ,  $R = 12.5 \text{ mm}$ ,  $H = 1 \text{ mm}$  作为原始参考模型的基本参数,并将无量纲中心挠度固定为  $\alpha_1 = 0.1$ 。此外,为了研究几何尺寸的大小对力电耦合的影响,揉皱驻极体薄膜的几何形状被缩放为  $(R_p : R : H) = \gamma (50 \text{ mm} : 12.5 \text{ mm} : 1 \text{ mm})$ ,其中  $\gamma$  是一个无量纲缩放系数, $\gamma = 1$  对应于原始参考模型的尺寸。通过改变比例因子  $\gamma$ ,可以实现薄膜厚度  $H$  在  $10 \text{ nm}$  到  $10 \text{ mm}$  之间的变化。

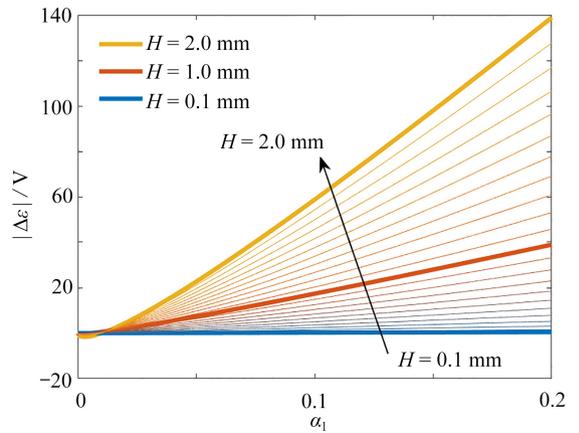
图 7(a) 给出了不同电荷密度下,缩放系数  $\gamma$  和无量纲能量效率  $\bar{d}$  之间的变化规律。固定缩放系数  $\gamma$ , 更大的电荷密度  $q$  会引起更强的类挠曲电响应,这再次表明了电荷密度  $q$  在类挠曲电响应强度影响因素中的重要地位。当电荷密度  $q$  一定时,且缩放系数  $\gamma$  的取值超过  $10^{-4}$  时,能量效率  $\bar{d}$  的值保持不变,这说明在微米以上的尺度,揉皱驻极体没有明显的尺寸效应。然而,当缩放系数  $\gamma$  大约小于  $10^{-4}$  时,无量纲能量效率  $\bar{d}$  会随  $\gamma$  的减小而减小。这是因为当尺寸减小到纳米级时,由系数  $g$  介入的纯弹性应变梯度效应有显著影响。



(a) 核心半径  
(a) Core radii



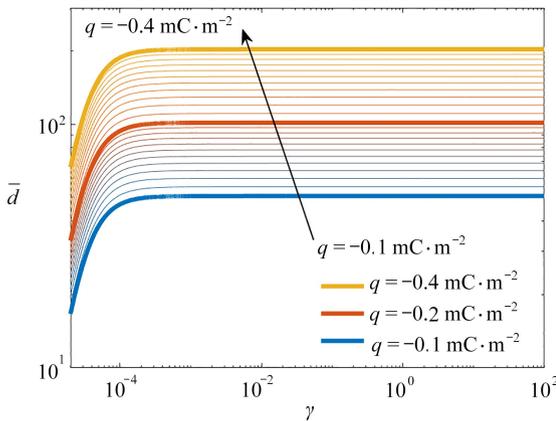
(b) 垂直力  
(b) Vertical forces



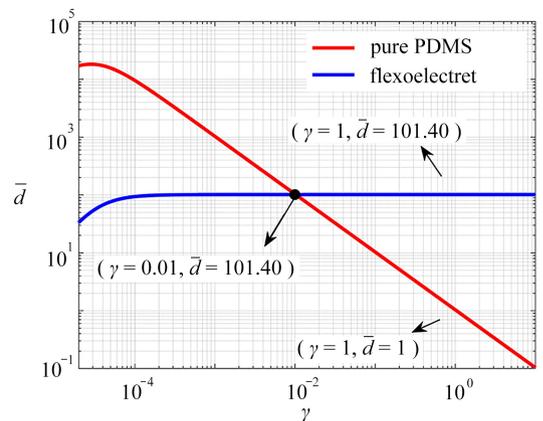
(c) 感应有效电压  
(c) Induced effective voltages

图6 各关键参数与无量纲尖端挠度的关系

Fig. 6 The relationships between the key parameters and the dimensionless tip deflections



(a) 无量纲能量效率与无量纲比例因子的关系  
(a) The normalization ratio vs. the dimensionless scale factor



(b) 两种挠曲电响应无量纲能量效率的比较  
(b) Comparison of dimensionless energy efficiencies of 2 kinds of flexoelectric responses

图7 揉皱驻极体薄膜的尺寸效应

Fig. 7 The size effects of the crumpled electret

当模型尺寸缩小到微纳米尺度时,另一个关键因素是揉皱驻极体中介电材料的本征挠曲电效应。PDMS 薄膜的本征挠曲电系数为  $\mu_{13} = 5.3 \times 10^{-8} \text{ C} \cdot \text{m}^{-1}$ , 只考虑变形对极化的单向耦合机制, 可得纯 PDMS 薄膜的本征极化为  $P = \mu_{13} \text{tr}(\boldsymbol{\kappa})$ , 感应本征电荷为  $\tilde{Q} = \int_S P ds$ . 因此, 由比值  $d^{\text{eff}} = \tilde{Q}/F$  来评价本征挠曲电效应的强度。

图 7(b) 研究了电荷密度  $q = -0.2 \text{ mC} \cdot \text{m}^{-2}$  时, 纯 PDMS 薄膜的本征挠曲电效应和揉皱驻极体薄膜的类挠曲电响应的效率系数  $\bar{d}$  随比例因子  $\gamma$  的变化规律。可以看出, 纯 PDMS 薄膜的本征挠曲电的无量纲能量效率比  $\bar{d}$  随着薄膜尺寸的增大而减小, 表现出明显的尺寸效应。此外, 微纳米尺度的本征挠曲电效应的强度远大于类挠曲电响应的强度。使薄膜尺寸增大, 当  $\gamma = 0.01$ , 即  $H = 0.01 \text{ mm}$  时, 本征挠曲电效应和类挠曲电响应几乎相等。随着尺寸的进一步增大, 类挠曲电响应逐渐占主导地位。在毫米尺度下, 即当  $\gamma = 1, H = 1 \text{ mm}$  时, 类挠电强度为本征挠电强度的 101.4 倍。

### 3 结 论

为在宏观尺度上增强力电耦合效应, 本文建立了驻极体薄膜的揉皱变形理论, 并研究了其类挠曲电响应的特性。在宏观尺度上, 与传统的纯介电薄膜相比, 揉皱驻极体的类挠曲电响应更为可观、稳定, 且不受尺寸效应的影响。这可以初步解释为, 驻极体薄膜的类挠曲电响应的作用机制与挠曲电效应不同。驻极体所带电荷的影响在缩放系数大于  $10^{-4}$  时占据了主导作用, 而应变梯度变化所带来的影响则相对微弱。此外, 厚度  $H$  和电荷密度  $q$  是影响驻极体力电耦合的两个主要因素, 通过这两个因素可以轻易地调节类挠曲电响应的强度。研究结果表明, 厚度为  $1 \text{ mm}$  的揉皱驻极体薄膜, 当电荷密度  $q = -0.2 \text{ mC} \cdot \text{m}^{-2}$  时, 所产生的类挠曲电响应的强度比纯 PDMS 薄膜的本征挠曲电效应提高了 101.4 倍, 使得挠曲电响应突破尺寸限制, 在宏观尺度上变得明显。基于上述研究结论, 我们可以调整电荷密度、薄膜厚度等参数进一步提高驻极体薄膜的能量俘获性能。这些结论为宏观尺度上高能量转换效率能量捕获装置的开发提供了理论依据, 同时也为传感器、致动器的研究提供了新的思路。

### 参考文献 (References):

- [1] KRICHEN S, SHARMA P. Flexoelectricity: a perspective on an unusual electromechanical coupling[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2016, **83**(3): 030801.
- [2] AHMADPOOR F, SHARMA P. Flexoelectricity in two-dimensional crystalline and biological membranes[J]. *Nanoscale*, 2015, **7**(40): 16555-16570.
- [3] DENG Q, LIU L P, SHARMA P. Flexoelectricity in soft materials and biological membranes[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2014, **62**: 209-227.
- [4] MA W H, CROSS L E. Observation of the flexoelectric effect in relaxor  $\text{Pb}(\text{Mg}_{1/3}\text{Nb}_{2/3})\text{O}_3$  ceramics[J]. *Applied Physics Letters*, 2001, **78**(19): 2920-2921.
- [5] MAO S, PUROHIT P K. Defects in flexoelectric solids[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2015, **84**: 95-115.
- [6] MAO S, PUROHIT P K. Insights into flexoelectric solids from strain-gradient elasticity[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2014, **81**(8): 081004.
- [7] CATALAN G, LUBK A, VLOOSWIJK A H G, et al. Flexoelectric rotation of polarization in ferroelectric thin films[J]. *Nature Materials*, 2011, **10**(12): 963-967.
- [8] MAJDOUB M S, SHARMA P, ÇAGIN T. Dramatic enhancement in energy harvesting for a narrow range of dimensions in piezoelectric nanostructures[J]. *Physical Review B*, 2008, **78**(12): 121407.
- [9] YAN X, HUANG W B, KWON S R, et al. A sensor for the direct measurement of curvature based on flexoelectricity[J]. *Smart Materials and Structures*, 2013, **22**(8): 085016.
- [10] YAN D Z, WANG J X, XIANG J W, et al. A flexoelectricity-enabled ultrahigh piezoelectric effect of a polymeric composite foam as a strain-gradient electric generator[J]. *Science Advances*, 2023, **9**(2): eadc8845.
- [11] WANG Z H, ZHANG X X, WANG X B, et al. Giant flexoelectric polarization in a micromachined ferroelectric

- diaphragm[J]. *Advanced Functional Materials*, 2013, **23**(1): 124-132.
- [12] BHASKAR U K, BANERJEE N, ABDOLLAHI A, et al. A flexoelectric microelectromechanical system on silicon[J]. *Nature Nanotechnology*, 2016, **11**(3): 263-266.
- [13] ZHANG M Y, YAN D Z, WANG J X, et al. Ultrahigh flexoelectric effect of 3D interconnected porous polymers: modelling and verification[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2021, **151**: 104396.
- [14] QU Y L, JIN F, YANG J S. Effects of mechanical fields on mobile charges in a composite beam of flexoelectric dielectrics and semiconductors[J]. *Journal of Applied Physics*, 2020, **127**(19): 194502.
- [15] PETROV A G. Flexoelectricity of model and living membranes[J]. *Biochimica et Biophysica Acta (BBA): Biomembranes*, 2002, **1561**(1): 1-25.
- [16] LIU L P, SHARMA P. Flexoelectricity and thermal fluctuations of lipid bilayer membranes: renormalization of flexoelectric, dielectric, and elastic properties[J]. *Physical Review E*, 2013, **87**(3): 032715.
- [17] LOBKOVSKY A, GENTGES S, LI H, et al. Scaling properties of stretching ridges in a crumpled elastic sheet[J]. *Science*, 1995, **270**(5241): 1482-1485.
- [18] KODALI P, SARAVANAVEL G, SAMBANDAN S. Crumpling for energy: modeling generated power from the crumpling of polymer piezoelectric foils for wearable electronics[J]. *Flexible and Printed Electronics*, 2017, **2**(3): 035005.
- [19] WANG B L, YANG S Y, SHARMA P. Flexoelectricity as a universal mechanism for energy harvesting from crumpling of thin sheets[J]. *Physical Review B*, 2019, **100**(3): 035438.
- [20] LIU Y, CHEN L L, WANG B L, et al. Tuning crumpled sheets for an enhanced flexoelectric response[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2022, **89**(1): 011011.
- [21] SHARMA N D, LANDIS C M, SHARMA P. Piezoelectric thin-film superlattices without using piezoelectric materials[J]. *Journal of Applied Physics*, 2010, **108**(2): 024304.
- [22] LIU Y, ZHAO S Y, WANG B L. Stronger flexoelectricity from the laminated film subjected to crumpling deformation[J]. *Journal of Applied Physics*, 2021, **130**(2): 024101.
- [23] RAHMATI A H, YANG S Y, BAUER S, et al. Nonlinear bending deformation of soft electrets and prospects for engineering flexoelectricity and transverse ( $d_{31}$ ) piezoelectricity[J]. *Soft Matter*, 2018, **15**(1): 127-148.
- [24] DARBANIYAN F, DAYAL K, LIU L P, et al. Designing soft pyroelectric and electrocaloric materials using electrets[J]. *Soft Matter*, 2019, **15**(2): 262-277.
- [25] WEN X, LI D F, TAN K, et al. Flexoelectret: an electret with a tunable flexoelectriclike response[J]. *Physical Review Letters*, 2019, **122**(14): 148001.
- [26] CERDA E, MAHADEVAN L. Confined developable elastic surfaces: cylinders, cones and the elastica[J]. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2005, **461**(2055): 671-700.
- [27] CERDA E, CHAIEB S, MELO F, et al. Conical dislocations in crumpling[J]. *Nature*, 1999, **401**: 46-49.
- [28] CERDA E, MAHADEVAN L. Conical surfaces and crescent singularities in crumpled sheets[J]. *Physical Review Letters*, 1998, **80**(11): 2358-2361.
- [29] SHARMA N D, MARANGANTI R, SHARMA P. On the possibility of piezoelectric nanocomposites without using piezoelectric materials[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2007, **55**(11): 2328-2350.
- [30] DENG Q, KAMMOUN M, ERTURK A, et al. Nanoscale flexoelectric energy harvesting[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2014, **51**(18): 3218-3225.