ⓒ 应用数学和力学编委会, ISSN 1000-0887

http://www.applmathmech.cn

基于压电驱动的多材料主动结构显式拓扑优化设计

延晓晔, 赖 旗, 孟 尧, 张维声

(大连理工大学工程力学系, 辽宁大连 116024)

摘要: 结构的轻量化设计在工业领域中一直受到高度重视.与仅通过材料本身的刚度抵抗外界载荷作用的被动结构不同,主动结构通过主动改变结构的内力驱动变形从而实现结构轻量化.该文提出了一种基于可移动变形组件(moving morphable components, MMC)法的压电多材料主动结构的显式拓扑优化方法.该方法在满足位移约束的前提下,通过同时优化结构拓扑以及压电驱动器的分布实现了主动结构的总质量最小化.为了优化极化特征以实现复杂载荷环境下的自适应压电驱动作用,引入3组独立的 MMC 组件分别描述弹性材料和压电材料的分布及其相应的极化特征,以得到具有显式几何描述的复合材料主动结构.数值算例表明相比于被动结构,基于压电驱动作用的多材料主动结构能更有效地实现结构轻量化设计.

关 键 词: 移动可变形组件法; 拓扑优化; 多材料; 压电效应; 主动结构 中图分类号: 0232 文献标志码: A DOI: 10.21656/1000-0887.450197

Explicit Topology Optimization of Multi-Material Active Structures Based on Piezoelectric Actuation

YAN Xiaoye, LAI Qi, MENG Yao, ZHANG Weisheng

(Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, P.R.China)

Abstract: The lightweight structure design is a crucial consideration in the industrial field. Unlike passive structures that rely solely on material stiffness to resist external loads, active structures achieve lightweighting by active change of the internal force-driven deformation. An explicit topology optimization method was introduced for piezoelectric multi-material active structures with the moving morphable components (MMC) method. The proposed method minimizes the total mass of the active structure by simultaneously optimizing the structure topology and the distribution of piezoelectric actuators while satisfying the displacement constraints. To optimize the polarization characteristics for adaptive piezoelectric actuation under complex loading conditions, 3 independent sets of MMCs were utilized. These components describe the distributions of elastic and piezoelectric materials as well as the corresponding polarization characteristics, resulting in a composite active structure with explicit geometric descriptions. Numerical examples demonstrate that, compared to passive structures, multi-material active structures based on piezoelectric actuation can realize structural lightweighting more efficiently.

Key words: moving morphable components method; topology optimization; multi-material; piezoelectricity;

收稿日期: 2024-07-08;修订日期: 2024-08-04

基金项目: 国家自然科学基金(12272075)

作者简介: 延晓晔(1997—),男,博士生(E-mail: dllgyanxy@ mail.dlut.edu.cn);

张维声(1982—),男,教授,博士,博士生导师(通讯作者. E-mail: weishengzhang@dlut.edu.cn).

引用格式: 延晓晔, 赖旗, 孟尧, 张维声. 基于压电驱动的多材料主动结构显式拓扑优化设计[J]. 应用数学和力学, 2024, **45**(11): 1372-1380.

active structure

0 引 言

主动结构能够根据环境的变化改变自身的结构或性质从而满足不同的应用需求^[14].多材料主动结构是一种集成被动材料和主动材料的智能系统,可基于主动材料的驱动作用实现结构内力和变形的主动控制.相较于单材料结构,多材料主动结构通常具有更优异的性能.然而由于多材料主动结构设计的复杂性,依赖设计经验和直觉的传统设计方法在应对复杂需求时面临巨大的挑战.因此基于拓扑优化方法的多材料主动结构设计逐渐受到广泛关注.Sigmund^[5-6]基于 SIMP(solid isotropic material with penalization)方法设计了由单材料或双材料组成的热致动器和电热致动器.基于线性应变的膨胀模型,Jensen 等^[7]实现了三维机翼结构变形和驱动器布局的同步优化.以结构在其使用寿命期间的环境影响指标作为目标函数,Wang 等^[8]提出了一种基于 SIMP 的多材料主动结构的拓扑优化框架,旨在实现结构的重量/能量/温室气体排放最小化.另外,在解耦分析模型的基础上,Wang 等^[9]实现了热机载荷下多材料主动结构以及预应力结构的最大化抗屈曲能力优化设计.

上述结构中主动材料的驱动作用多基于热膨胀效应.然而,通过改变环境温度来实现驱动作用的方式反应速度较慢且难以精确控制.另外,为了在一定温度变化下实现多样化的驱动作用,主动结构中需同时使用热膨胀材料以及负热膨胀材料,这可能导致复合材料间的不兼容问题^[10].压电驱动器是一种利用逆压电效应将电能转化为机械能的智能器件,因其高能量密度、快速响应以及易控制性等优点,已广泛应用于振动控制和微机电系统等领域^[11].压电陶瓷和压电聚合物等压电材料经过人工极化才能表现压电性.因此考虑到压电材料的极化特性,通过调整压电材料的极化方向可实现不同的主动驱动作用.一些研究致力于通过拓扑优化来增强逆压电效应在主动结构中的驱动作用.Wang等^[12]提出了一种面向内嵌压电作动器的柔性智能结构的拓扑优化框架,旨在提高柔顺机构的工作行程.对于瞬态激励下的薄壳结构,Zhang等^[13]通过优化压电致动器层和传感器层的拓扑,提高主动控制性能以降低动态响应.通过优化压电作动器的分布,Molter等^[14]利用压电的驱动作用实现结构的位移控制.

上述研究中,压电的驱动作用主要应用于控制结构静变形以及抑制振动等方面,本文发展了一种基于可移动变形组件(MMC)^[15-16]的压电多材料主动结构的显式拓扑优化框架,以实现智能结构的轻量化设计.通过同时优化结构拓扑以及压电驱动器的分布,实现了给定位移约束下的主动结构总质量最小化.该方法采用3 组独立的 MMC 组件表征压电多材料主动结构的材料分布,其中1 组表示非压电的被动材料,另外2 组依据覆盖关系分别描述了压电材料的分布与极化特征.

1 基于 MMC 的压电多材料主动结构优化框架

MMC 方法^[15]以显式几何描述下的组件为拓扑基元.基于该思想,通过显式几何描述压电驱动器的结构 边界将具有便于制造的特点.本节将介绍基于 MMC 的压电多材料主动结构拓扑优化框架.

1.1 MMC 单材料组件描述

当只考虑单材料时,在 MMC 框架中,引入由显式几何参数表达的拓扑描述函数(TDF) ϕ^s 来表示设计域 中材料的分布.在 Euler 描述框架下, ϕ^s 可表示为

$$\begin{cases} \phi^{s}(\boldsymbol{x}) > 0, & \boldsymbol{x} \in \Omega^{s}, \\ \phi^{s}(\boldsymbol{x}) = 0, & \boldsymbol{x} \in \partial \Omega^{s}, \\ \phi^{s}(\boldsymbol{x}) < 0, & \boldsymbol{x} \in D \setminus (\Omega^{s} \cup \partial \Omega^{s}), \end{cases}$$
(1)

其中 *D* 表示指定的设计域, $\Omega^s \subset D$ 是由 *n* 个组件组成的固体材料所占据的区域; ϕ^s 表示 $\phi^s(x) = \max(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$, 其中 $\phi_i(x)(i = 1, 2, \dots, m)$ 表示第 *i* 个组件的 TDF:

$$\begin{cases} \phi_i(\boldsymbol{x}) > 0, & \boldsymbol{x} \in \Omega_i^s, \\ \phi_i(\boldsymbol{x}) = 0, & \boldsymbol{x} \in \partial \Omega_i^s, \\ \phi_i(\boldsymbol{x}) < 0, & \boldsymbol{x} \in D \setminus (\Omega_i^s \cup \partial \Omega_i^s), \end{cases}$$
(2)

其中 $\Omega_i^s \subset D$ 是第*i*个组件所占据的区域.

第*i*个组件的 TDF (ϕ_i) 可以用下面的公式计算:

$$\phi_{i}(x,y) = 1 - \sqrt[p]{\left(\frac{x'}{a_{i}}\right)^{p}} + \left(\frac{y}{f_{i}(x')}\right)^{p}},$$

$$\begin{cases} x'\\ y' \end{cases} = \begin{bmatrix} \cos\theta_{i} & \sin\theta_{i}\\ -\sin\theta_{i} & \cos\theta_{i} \end{bmatrix} \begin{cases} x - x_{0i}\\ y - y_{0i} \end{cases},$$
(3)
(4)

其中 p 是描述超椭圆的参数 (本文中 p = 6);符号(x_{0i} , y_{0i}), a_i , $f_i(x)$, θ_i 分别表示第 i个组件的中心点、半 长、半宽和倾斜角(从水平轴逆时针方向测量); $f_i(x')$ 描述了组件厚度分布,本文中使用等厚度组件,即 $f_i(x') = t_i$.值得注意的是,采用非等宽组件或曲线组件能够增强几何任意性,解空间更大,有利于得到更为丰富的结构类型.更多组件 TDF 构造的介绍可参考文献[15,17-18].

1.2 MMC 压电多材料组件描述与插值模型

当外部电压作用于压电层合板时,极化方向一致的压电材料的变形必然是一致的.单一的压电驱动作用 无法充分发挥主动驱动的优势.因此为同时描述多材料拓扑结构以及压电极化特征,本文基于 MMC 方法的 基本思想引入 3 组互相独立的组件表示正负极化的压电材料以及弹性材料,其中每组的组件具有相同的力 学与电学性质.第 k 组的 TDF 可表示为 $\phi^{s_k} = \max(\phi_{k_1}, \dots, \phi_{k_{n_k}}), n_k$ 表示第 k 组中组件的总数,这里 k = 1,2, 3. ϕ^{s_k} 表示的第 k 组材料区域为 $\tilde{\Omega}^{s_k} = \bigcup_{n=1}^{n_k} \tilde{\Omega}_{k_n}$,其中 $\tilde{\Omega}_{k_n}$ 为第 k 组组件中第 n 个组件占据的材料区域.如图 1 所示,当不同组的组件重叠时^[19],为研究压电材料的驱动作用对结构的影响,定义压电材料覆盖弹性材料.



Fig. 1 An illustration of the piezoelectric multi-material overlapping scheme

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同.

图 1 中压电材料与弹性材料实际占据的区域分别为 Ω^{s_1} 和 Ω^{s_2} ,相应的特征函数分别为 $\chi_1(\phi) = H_{\epsilon}(\phi^{s_1})$ 和 $\chi_2(\phi) = (1 - H_{\epsilon}(\phi^{s_1}))H_{\epsilon}(\phi^{s_2})$.极化组件用于表示压电材料的极化方向,特征函数为 $\chi_3(\phi) = H_{\epsilon}(\phi^{s_1})(2H_{\epsilon}(\phi^{s_3}) - 1), \phi^{s_1} > 0 且 \phi^{s_3} > 0$ 时表示正向极化的压电材料 ($\Omega^{s_{1p}}$); $\phi^{s_1} > 0 且 \phi^{s_3} < 0$ 时表示 负向极化的压电材料 $(\Omega^{s_{\ln}})$ $H_{\epsilon}(x)$ 表示正则化的 Heaviside 函数.

基于上述描述多材料分布的特征函数, 定义 MMC 框架下表征弹性材料以及压电材料的多材料插值模型如下:

$$C_{ijkl}(\boldsymbol{x}) = \chi_1(\phi) C_{ijkl}^1 + \chi_2(\phi) C_{ijkl}^2,$$

$$e_{kii}(\boldsymbol{x}) = \chi_3(\phi) e_{kii},$$
(5)
(6)

其中 C_{ijkl}^1 和 C_{ijkl}^2 分别表示压电材料以及弹性材料的弹性性质, e_{kij} 为压电材料的压电性质.基于虚假材料模型, 第 e 个四节点双线形矩形单元中第 k 组组件占据的体积分数为 $\psi_e^k = \sum_{i=1}^4 H_\epsilon(\phi^{s_k}) / 4$.

2 优化列式与灵敏度分析

2.1 优化列式

c 1

由压电材料与弹性材料组成的主动结构的总质量定义为 $W = \rho_p V_p + \rho_m V_m$,其中 $\rho_p 和 \rho_m 分别表示压电$ 材料以及弹性材料的密度, $V_p 和 V_m 分别表示压电材料以及弹性材料的体积.在 MMC 框架下建立以结构总质量 W 为目标,考虑位移约束的压电多材料主动结构的拓扑优化列式:$

find $\boldsymbol{D} = ((\boldsymbol{D}^1)^T, (\boldsymbol{D}^2)^T, (\boldsymbol{D}^3)^T)^T, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = ((\boldsymbol{u}^1)^T, (\boldsymbol{u}^2)^T, (\boldsymbol{u}^3)^T)^T,$ minimizes I = W,

$$K_{uu}U + K_{u\phi}\Phi = F,$$

$$\forall v \in \mathcal{U}_{ad},$$

$$u = \bar{u}, \quad \text{on } \Gamma_{u},$$

$$D \subset \mathcal{U}_{D},$$

$$J^{\text{KS}}\left(\frac{u_{i}}{\bar{u}_{i}}\right) - 1 \leq 0, \qquad i = 1, 2, \cdots, m,$$
(7)

其中, $D^k = ((D^{k_1})^T, \dots, (D^{k_n_k})^T)^T$ 表示第 k 组组件的设计变量, k = 1,2,3.对于如图 2 所示的嵌入压电材料 的复合结构,其控制方程可表示为 $K_{uu}U + K_{u\phi}\Phi = F$, 各矩阵的具体形式可参考文献[20]. $u_i = L_iU$ 表示 U中 第 i 个自由度对应的位移, L_i 是一个列向量,其中第 i 个元素为 1,其余元素为 0. \bar{u}_i 为该自由度给定的位移上 限, i = 1,2,…,m(m 为局部位移约束的个数). $J^{KS}(u_i/\bar{u}_i) - 1 \leq 0$ 表示使用 K-S 函数近似的全局位移约束,





Fig. 2 Schematic diagram of a piezoelectric composite plate

2.2 灵敏度分析

目标函数 W 的灵敏度为

$$\frac{\partial W}{\partial a} = \rho_{\rm p} \frac{\partial V_{\rm p}}{\partial a} + \rho_{\rm m} \frac{\partial V_{\rm m}}{\partial a}$$

其中

(8)

$$\frac{\partial V_{\rm p}}{\partial a} = \sum_{e=1}^{n_e} \frac{\partial \psi_e^1}{\partial a} V_e, \qquad (9)$$

$$\frac{\partial V_{\rm m}}{\partial a} = \sum_{e=1}^{n_e} \frac{\partial (1 - \psi_e^1) \psi_e^2}{\partial a} V_e, \qquad (10)$$

$$V_e$$
为单元面积, $\psi_e^k = rac{\sum_{i=1}^4 H_e(\phi^{s_k})}{4}, \ rac{\partial \psi_e^k}{\partial a}$ 可参考文献[21].

基于伴随灵敏度分析方法,构造如下 Lagrange 方程:

$$J^{\mathrm{L}} = J^{\mathrm{KS}} \left(\frac{u_i}{\bar{u}_i} \right) - \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{K}_{uu} \boldsymbol{U} + \boldsymbol{K}_{u\phi} \boldsymbol{\varPhi} - \boldsymbol{F}) , \qquad (11)$$

其中λ为伴随向量,可得

$$\frac{\partial J^{\mathrm{L}}}{\partial a} = -\lambda^{\mathrm{T}} \left(\frac{\partial K_{uu}}{\partial a} U + \frac{\partial K_{u\phi}}{\partial a} \Phi \right), \qquad (12)$$

其中

$$\frac{\partial \boldsymbol{K}_{uu}}{\partial a} = \sum_{e=1}^{n_e} \left(\frac{\partial \psi_e^1}{\partial a} \boldsymbol{k}_{uu}^1 + \frac{\partial (1 - \psi_e^1) \psi_e^2}{\partial a} \boldsymbol{k}_{uu}^2 \right),$$
(13)

$$\frac{\partial \mathbf{K}_{u\phi}}{\partial a} = \sum_{e=1}^{n_e} \left(\frac{\partial \psi_e^1(2\psi_e^3 - 1)}{\partial a} \mathbf{k}_{u\phi}^1 \right), \tag{14}$$

 k_{uu}^1 和 k_{uu}^2 分别表示压电材料与弹性材料的单元刚度阵, $k_{u\phi}^1$ 为压电材料的单元耦合矩阵. λ 通过求解如下伴随问题得到:

$$\boldsymbol{K}_{uu}\boldsymbol{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \mathrm{e}^{q \frac{u_i}{\overline{u}_i}} \frac{\boldsymbol{L}_i}{u_i}}{\sum_{i=1}^{m} \mathrm{e}^{q \frac{u_i}{\overline{u}_i}}}.$$
(15)

3 数值算例

本节提供两个数值算例来验证所提方法的有效性.所有算例均采用四节点双线形矩形单元进行离散并 施加大小为 8 000 V 的外部电压.弹性材料的材料参数为 E = 100 GPa, v = 0.3, $\rho_{\rm m} = 2.7$ g/cm³, 压电材料为 PZT-4^[18], 二维情况下其材料参数为 $c_{11} = 9.118$ 7 × 10¹⁰ N/m², $c_{12} = 3.002$ 5 × 10¹⁰ N/m², $c_{66} = 9.118$ 7 × 10¹⁰ N/m², $e_{31} = -14.909$ 1 C/m², $\rho_{\rm p} = 7.5$ g/cm³.在本节算例中, 主动结构与被动结构的减重效果由 $W_{a}^{*} = W_{a}/W_{a}^{0}$ 和 $W_{\rm p}^{*} = W_{\rm p}/W_{\rm p}^{0}$ 表示,其中 W_{a}^{*} 和 $W_{\rm p}^{*}$ 表示归一化的结构质量, W_{a} 和 $W_{\rm p}$ 表示优化结果的质量, W_{a}^{0} 和 $W_{\rm p}^{0}$ 表示结构完全由被动材料组成时的参考质量.

3.1 悬臂梁算例

第一个算例为图 3 所示的悬臂梁模型.设计域的长度、宽度和厚度分别为 60 mm,30 mm 和 1 mm,采用 120×60 的均匀网格进行离散.该结构左端固支,右下角承受大小为 200 N 的集中力.MMC 组件的初始布局如 图 4 所示,其中弹性材料构成的组件个数为 16,压电材料构成的组件个数为 16×2=32.采用的三组 MMC 组 件初始位置相同,总设计变量数为(16+32)×5=240.对于该算例,载荷点的 y 方向位移的位移约束函数为 $|u| \leq 0.17$ mm.

图 5 为主动结构以及被动结构最小化结构总重量的优化结果,其中被动结构的优化结果在驱动电压为 0 V 情况下获得.值得注意的是,主动结构的优化结果由压电材料和弹性材料组成,而被动结构的优化结果 仅涉及弹性材料.这是因为无驱动电压作用时,压电材料本身较低的刚度密度比使其在优化过程中逐渐被弹 性材料取代.在外部电压作用下,压电材料的驱动效应能够主动调控结构内部的内力与变形以抵抗外部载荷 的作用.与图 5(b)相比,图 5(a)中弹性材料大幅减少,压电材料则分布于载荷处以及左端固支处等变形较 大的区域以实现更好的主动控制.正负极化的压电材料会引起不同的主动驱动作用.在受拉区域(如载荷处 主动结构优化结果的迭代曲线。



3.2 桥模型算例

图 8 给出了顶部支撑的桥结构及其边界条件.该结构的长度、宽度和厚度分别为 600 mm,100 mm 以及 1 mm,上边界存在宽度为 2 mm 的不可设计域并承受大小为 3 kN/m 的均布载荷.本算例中设计域被 300×50 的均匀网格离散.MMC 组件的初始布局如图 9 所示,其中弹性材料构成的组件个数为 48+1=49,压电材料构成的组件个数为 48×2=96,总设计变量数为(49+96)×5=725.对于该算例,要求上边界所有节点处的 y 方向 位移均满足 $|u| \leq 1.2$ mm.

图 10 分别为主动结构以及被动结构最小化结构总质量的优化结果。与被动结构相比,主动结构中用于 支撑不可设计梁的材料量显著降低。在外部电压的激励下,位于结构下边界的负极化压电材料产生的压缩变 形能有效地抵抗该区域所承受的拉应力。结构上边界两侧由受梁支撑的弹性材料构成,而中间的正极化压电 材料则没有支撑。这是因为压电材料的主动驱动作用使其在没有额外支撑情况下也能有效地中和外部载荷 的影响。主动结构以及被动结构优化结果的归一化总质量分别为 W_a^{*} = 0.464 以及 W_p^{*} = 0.619.

图 11 为不同位移约束下主动结构的优化结果.本文采用的位移约束避免了初始不同材料体积分数的设置,表1 给出了不同位移约束下,优化结果中压电材料以及弹性材料的体积分数 V_p和 V_m.随着位移约束上限的降低,结构使用的总材料量增加以满足位移约束条件.当位移约束上限为1.4 mm,1.2 mm 和1 mm 时,优化结果归一化总质量分别为0.415,0.464 和0.527.另外相比于弹性材料,压电材料的体积分数 V_p及其占比 V_p/(V_p + V_m)均增加,这说明结构倾向于使用更多的压电材料以增强主动驱动作用.



(a) 外部载荷-压电驱动

(a) The external loading plus the piezoelectric actuation



图 9 组件初始布局 Fig. 9 The initial layout of components



4 结 论

本文发展了一种基于 MMC 的压电多材料主动结构的显式拓扑优化框架,通过同步优化结构拓扑以及 压电驱动器布局实现结构的轻量化设计.该框架以压电材料以及弹性材料的总质量为目标函数,并施加位移 约束以保证结构刚度.采用3组独立的 MMC 组件显式地描述了压电多材料主动结构的材料分布,优化结果 能够与 CAD 软件无缝链接,便于后续的加工制造.相比于被动结构,主动结构利用具有不同极化特征的压电 材料的驱动作用能抵消外部载荷引起的变形.数值算例表明,主动结构具有比被动结构更轻的质量,验证了 该框架的有效性.随着位移约束的降低,主动结构中压电材料的体积占比增加以获得更强的主动驱动作用.

参考文献(References):

- GOSSWEILER G R, BROWN C L, HEWAGE G B, et al. Mechanochemically active soft robots [J]. ACS Applied Materials & Interfaces, 2015, 7(40): 22431-22435.
- [2] PREUMONT A. Vibration Control of Active Structures: an Introduction[M]. Array Cham: Springer, 2018.
- [3] REKSOWARDOJO A P, SENATORE G. Design of ultra-lightweight and energy-efficient civil structures through shape morphing[J]. *Computers & Structures*, 2023, **289**: 107149.
- [4] SOFLA A Y N, MEGUID S A, TAN K T, et al. Shape morphing of aircraft wing: status and challenges[J]. *Materials & Design*, 2010, **31**(3): 1284-1292.
- [5] SIGMUND O. Design of multiphysics actuators using topology optimization, part I: one-material structures
 [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2001, 190(49/50): 6577-6604.
- [6] SIGMUND O. Design of multiphysics actuators using topology optimization, part II: two-material structures
 [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2001, 190(49/50): 6605-6627.
- [7] JENSEN P D L, WANG F, DIMINO I, et al. Topology optimization of large-scale 3D morphing wing structures
 [J]. Actuators, 2021, 10(9): 217.

- [8] WANG Y, SIGMUND O. Topology optimization of multi-material active structures to reduce energy consumption and carbon footprint [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2024, **67**(1); 5.
- [9] WANG Y, SIGMUND O. Multi-material topology optimization for maximizing structural stability under thermomechanical loading[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2023, **407**: 115938.
- [10] LIND C. Two decades of negative thermal expansion research: where do we stand? [J]. Materials, 2012, 5
 (6): 1125-1154.
- [11] 黄志丹,向楠,苏程. 主动约束阻尼开口柱壳的 NLMS 反馈减振控制[J].应用数学和力学,2021,42(7):686-695.(HUANG Zhidan, XIANG Nan, SU Cheng. NLMS feedback vibration control of open cylindrical shells with active constrained layer damping[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, 42(7):686-695.(in Chinese))
- [12] WANG Y, LUO Z, ZHANG X, et al. Topological design of compliant smart structures with embedded movable actuators[J]. *Smart Materials and Structures*, 2014, **23**(4): 045024.
- [13] ZHANG X, KANG Z. Dynamic topology optimization of piezoelectric structures with active control for reducing transient response [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2014, **281**; 200-219.
- [14] MOLTER A, FONSECA J S O, FERNANDEZ L D S. Simultaneous topology optimization of structure and piezoelectric actuators distribution[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2016, **40**(9/10): 5576-5588.
- [15] GUO X, ZHANG W, ZHONG W. Doing topology optimization explicitly and geometrically: a new moving morphable components based framework[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2014, 81(8): 081009.
- [16] ZHANG W, LAI Q, GUO X, et al. Topology optimization for the design of manufacturable piezoelectric energy harvesters using dual-moving morphable component method [J]. Journal of Mechanical Design, 2024, 146 (12): 121701.
- [17] HU X, LI Z, BAO R, et al. Stabilized time-series moving morphable components method for topology optimization[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2024, **125**(20): e7562.
- [18] LI Z, HU X, CHEN W. Moving morphable curved components framework of topology optimization based on the concept of time series [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2023, **66**(1): 19.
- [19] ZHANG W, SONG J, ZHOU J, et al. Topology optimization with multiple materials via moving morphable component (MMC) method[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2018, 113 (11): 1653-1675.
- [20] HOMAYOUNI-AMLASHI A, SCHLINQUER T, MOHAND-OUSAID A, et al. 2D topology optimization MATLAB codes for piezoelectric actuators and energy harvesters[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2021, 63(2): 983-1014.
- [21] DU Z, CUI T, LIU C, et al. An efficient and easy-to-extend MATLAB code of the moving morphable component (MMC) method for three-dimensional topology optimization [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2022, **65**(5): 158.