

# 二维准晶双材料界面断裂分析的相场法\*

官高菲<sup>1</sup>, 李彤<sup>1</sup>, 聂雪阳<sup>1</sup>, 张滢睿<sup>1</sup>,  
徐新生<sup>1</sup>, 孙家斌<sup>2</sup>, 周震寰<sup>1</sup>

(1. 大连理工大学 力学与航空航天学院 工业装备结构分析优化与 CAE 软件全国重点实验室, 辽宁 大连 116024;  
2. 大连理工大学 化工海洋与生命学院, 辽宁 盘锦 124221)

**摘要:** 针对二维十次准晶双材料的界面断裂问题, 建立了用于预测其裂纹扩展路径的相场分析模型. 首先, 引入界面相场将离散界面转化为连续分布界面, 并获得了界面相场问题的控制方程和边界条件. 利用有限元方法对控制方程进行离散, 并求解获得连续分布的界面相场, 从而实现了对界面材料参数的弥散处理, 消除了材料参数在界面处的奇异性. 其次, 基于 Francfort-Marigo 变分原理建立了二维准晶双材料的控制方程, 并采用交错求解方案求解其相场分布. 在数值算例中, 通过与现有文献进行对比, 证明了该方法的正确性, 并研究了相位子场对裂纹扩展路径的影响, 以及多裂纹情况的演化规律.

**关键词:** 二维准晶双材料; 界面断裂; 相场模型; 裂纹扩展路径

中图分类号: O34 文献标志码: A DOI: 10.21656/1000-0887.450203

## A Phase-Field Model for Interfacial Fracture in 2D Quasicrystal Bimaterials

GUAN Gaofei<sup>1</sup>, LI Tong<sup>1</sup>, NIE Xueyang<sup>1</sup>, ZHANG Yingrui<sup>1</sup>,  
XU Xinsheng<sup>1</sup>, SUN Jiabin<sup>2</sup>, ZHOU Zhenhuan<sup>1</sup>

(1. *State Key Laboratory of Structural Analysis, Optimization and CAE Software for Industrial Equipment, School of Mechanics and Aerospace Engineering, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, P.R.China;*  
2. *School of Chemical Engineering, Ocean and Life Sciences, Dalian University of Technology, Panjin, Liaoning 124221, P.R.China* )

**Abstract:** A phase-field model for the interfacial fracture of 2D decagonal quasicrystal (QC) bimaterials was proposed to predict the crack propagation path. Firstly, the discrete interface was transformed into a smeared interface through introduction of an interface phased field, and therefore the interface phase field governing equations and corresponding boundary conditions were obtained. The continuous distribution of the interface phased field was obtained with the finite element method, and in turn the singularity of material properties at the interface was eliminated. Subsequently, the governing equations for 2D QC bimaterials were obtained based on the Francfort-Marigo variational principle, and solved with the staggered solution scheme. In numerical ex-

\* 收稿日期: 2024-07-11; 修订日期: 2024-08-16

基金项目: 辽宁省自然科学基金(面上项目)(2023-MS-118)

作者简介: 官高菲(1998—), 女, 博士生(E-mail: guangaofei@mail.dlut.edu.cn);

周震寰(1983—), 男, 教授, 博士(通讯作者. E-mail: zhouzh@dlut.edu.cn).

引用格式: 官高菲, 李彤, 聂雪阳, 张滢睿, 徐新生, 孙家斌, 周震寰. 二维准晶双材料界面断裂分析的相场法[J]. 应用数学和力学, 2024, 45(11): 1440-1454.

amples, the present results were compared with existing references and excellent agreements were observed. In addition, the effects of the phason field on the crack propagation path were investigated, with the evolution of multiple cracks explored.

**Key words:** 2D quasicrystal bimaterial; interfacial fracture; phase-field model; crack propagation path

## 0 引 言

准晶体作为一种介于晶体和非晶体之间的特殊固体,具有硬度高、摩擦因数低和耐磨性好等特性。目前,已在发动机表面涂层、太阳能电池、储氢材料等方面获得了广泛应用<sup>[1]</sup>。然而,准晶材料多为脆性材料,在加工及制造过程中容易产生裂纹等缺陷,从而造成其在服役过程中出现裂纹扩展而导致破坏。因此,准晶材料的裂纹扩展研究对于该类材料的安全评估具有重要的实际意义。

自准晶材料被发现以来,其断裂行为就受到了学术界的广泛关注<sup>[2-9]</sup>。然而,准晶材料的裂纹扩展问题研究尚处于发展阶段。基于分子动力学模拟方法,Trebin 等<sup>[10]</sup>模拟了二维平面准晶体的裂纹扩展。Krdzalic 等<sup>[11]</sup>和 Rudhart 等<sup>[12]</sup>研究了与温度相关的二维准晶体的裂纹扩展行为。Rösch 等<sup>[13]</sup>研究了二十面体准晶在低温下发生的 I 型裂纹扩展行为,重点分析了准晶中固有团簇对解理面形状的影响。Jung 和 Steurer<sup>[14]</sup>研究了二十面体准晶的结构及物理性质,通过引入人工应变和裂纹以探究其力学性能。除分子动力学模拟方法外,基于有限元方法,吴祥法等<sup>[15]</sup>根据变分原理将准晶的变形控制方程等效转化为能量泛函的变分,进而对任意给定边界条件下的应力场和位移场进行数值求解。Zhu 和 Fan<sup>[16]</sup>提出了准晶体的弹性/流体动力学模型,利用有限差分法对该模型进行求解,并分析了含裂纹试样中波的传播和扩散及其相互作用。Tupholme<sup>[17]</sup>基于 Yoffe 模型研究了一维六次准晶体发生 III 型裂纹时的裂纹扩展行为,并利用位错层技术得到了裂纹周围应力场的闭合解。Li 等<sup>[18]</sup>发展了适用于二维十次准晶单材料裂纹扩展的相场模型,并分析了相位子场载荷对裂纹扩展路径的影响。Zhang 等<sup>[19]</sup>研究了十次准晶双材料的界面断裂问题,利用复变量函数方法将混合边界值问题转化为 Dirichlet-Riemann 边界值问题,得到了材料界面处声子场和相位子场应力、应力强度因子以及位移跳跃的解。Zheng 等<sup>[20]</sup>基于势能理论方法研究了一维六方准晶体在剪切情况下的椭圆裂纹问题,分析了相位子场、裂纹方向以及椭圆裂纹偏心率对断裂参数的影响。

由上述文献的综述可以发现,目前准晶材料的裂纹扩展研究主要以分子动力学模拟方法为主,然而该方法受计算效率的限制,仅能分析尺寸较小的结构。除此之外,现有工作主要采用不连续性方法模拟材料中的裂纹扩展,这种模拟方法较为复杂,并且难以模拟裂纹分叉或多裂纹贯通行为<sup>[21-22]</sup>。相比之下,采用连续性裂纹描述的断裂相场法在处理裂纹扩展问题时具有明显的优势<sup>[23]</sup>,通过相场函数值的演化获取裂纹扩展路径,可以有效模拟裂纹的萌生、扩展、分叉和合并等现象。然而,该方法现阶段仅适用于单一准晶材料的裂纹扩展问题<sup>[18]</sup>,而在实际工程中应用的准晶材料多为层合材料<sup>[24-27]</sup>,其中涉及到界面裂纹的扩展问题。因此,本文将相场法引入到二维十次准晶双材料界面断裂问题中,建立了对应的断裂相场模型,通过对 ABAQUS 软件进行二次开发,准确预测了准晶材料中界面裂纹的扩展路径,并系统分析了其演化行为。

## 1 二维准晶双材料界面断裂的相场模型

考虑如图 1 所示的含裂纹的二维十次准晶双材料区域  $\Omega$ ,  $t^+$  和  $t^-$  分别为声子场和相位子场载荷。在离散裂纹模型中,裂纹面和界面分别用  $\Gamma_{dc}$  和  $\Gamma_{di}$  表示,如图 1(a) 所示。在相场模型中,裂纹面和界面采用连续的裂纹相场  $d(x)$  和界面相场  $\beta(x)$  描述<sup>[28]</sup>,如图 1(b) 所示。

### 1.1 二维准晶材料的应变能

二维十次准晶的几何方程为<sup>[29]</sup>

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_{xy} \\ \omega_{yx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_x \\ w_y \end{Bmatrix}, \quad (1)$$

其中,  $u_x$  和  $u_y$  为声子场位移,  $w_x$  和  $w_y$  为相位子场位移.

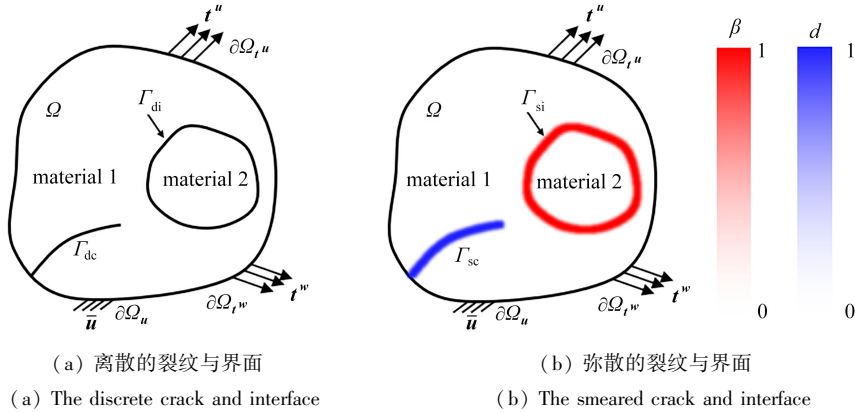


图1 二维准晶双材料

Fig. 1 A 2D quasicrystal bimaterials

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同.

二维十次准晶的本构方程为

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 & R_1 & R_2 & -R_2 \\ -R_1 & -R_1 & -R_2 & R_2 \\ R_2 & R_2 & -R_1 & R_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_{xy} \\ \omega_{yx} \end{Bmatrix}, \quad (2a)$$

$$\begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_{xy} \\ H_{yx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 & 0 & 0 \\ K_2 & K_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_1 & -K_2 \\ 0 & 0 & -K_2 & K_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_{xy} \\ \omega_{yx} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 & -R_1 & R_2 \\ R_1 & -R_1 & R_2 \\ R_2 & -R_2 & -R_1 \\ -R_2 & R_2 & R_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (2b)$$

其中,  $C_{11}, C_{12}, C_{22}$  和  $C_{66}$  为声子场弹性常数,  $K_1$  和  $K_2$  为相位子场弹性常数,  $R_1$  和  $R_2$  为声子-相位子场耦合弹性常数.

因此,二维十次准晶的应变能可以表示为

$$\Pi_s = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{H} \right) d\Omega, \quad (3)$$

其中,  $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T$  为声子场应变,  $\boldsymbol{\omega} = \{\omega_x, \omega_y, \omega_{xy}, \omega_{yx}\}^T$  为相位子场应变,  $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T$  为声子场应力,  $\boldsymbol{H} = \{H_x, H_y, H_{xy}, H_{yx}\}^T$  为相位子场应力.

## 1.2 界面相场模型

引入一个连续的界面相场描述弥散的界面<sup>[30]</sup>,即

$$\beta(x) = e^{-|x|/l_i}, \quad (4)$$

其中  $l_i$  表示界面相场的特征宽度.显然,界面相场分布函数满足下列微分方程:

$$\beta - l_i^2 \Delta \beta = 0, \quad x = \Omega. \quad (5)$$

并且界面相场分布函数需满足下列条件:

$$\begin{cases} \beta = 1, & x = \Gamma_i, \\ \nabla\beta \cdot \mathbf{n} = 0, & x = \partial\Omega. \end{cases} \quad (6)$$

这里需要指出的是,此处的界面相场只用于弥散界面,在之后的分析中并不会演化,当有限元模型中界面节点确定后,界面相场求解一次即可.在得到界面相场后,构建一个材料参数可连续变化的过渡区域,结构的临界能量释放率可以表示为

$$G_c = \beta \bar{G}_c^i + (1 - \beta) G_c^n, \quad n = 1, 2, \quad (7)$$

其中,  $G_c^1$  和  $G_c^2$  分别表示材料 1 和 2 的临界能量释放率,  $\bar{G}_c^i$  表示修正的界面临界能量释放率<sup>[30]</sup>,其表达式为

$$\bar{G}_c^i = \frac{2G_c^i(1 - e^{-2}) - (G_c^1 + G_c^2)(e^{-2l/l_c} - e^{-2})}{2(1 - e^{-2l/l_c})}, \quad (8)$$

其中,  $G_c^i$  表示界面的临界能量释放率,  $l_c$  表示裂纹相场模型的特征宽度,且应满足

$$\frac{l_i}{l_c} \geq -\frac{1}{2} \ln \left[ \frac{2(1 - e^{-2})}{\kappa_1 + \kappa_2} + e^{-2} \right], \quad (9)$$

其中,  $\kappa_1 = G_c^1/G_c^i$ ,  $\kappa_2 = G_c^2/G_c^i$ .类似地,结构的弹性模量表示为

$$E = \beta E^i + (1 - \beta) E^n, \quad n = 1, 2, \quad (10)$$

其中,  $E^i$ ,  $E_c^1$  和  $E_c^2$  分别表示界面、材料 1 和 2 的弹性模量.

采用有限元法对界面相场方程(5)进行求解,建立相场变量的离散方程:

$$\begin{cases} \beta = \sum_{i=1}^4 N_i \beta_i, \\ \nabla\beta = \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_i \beta_i, \end{cases} \quad (11)$$

其中,  $\mathbf{B}_i = \{\partial N_i/\partial x, \partial N_i/\partial y\}^T$ .可得有限元求解格式为

$$\mathbf{K}^{\beta\beta} \Delta\beta = -\mathbf{r}^\beta, \quad (12)$$

其中,  $\mathbf{r}^\beta = -\int_{\Omega} [(\mathbf{N}^\beta)^T \mathbf{N}^\beta + l_c^2 (\mathbf{B}^\beta)^T \mathbf{B}^\beta] \beta \, d\Omega/l_i$  为右端向量,  $\mathbf{K}^{\beta\beta} = \int_{\Omega} [(\mathbf{N}^\beta)^T \mathbf{N}^\beta + l_c^2 (\mathbf{B}^\beta)^T \mathbf{B}^\beta] \, d\Omega/l_i$  为刚度矩

阵,  $\mathbf{N}^\beta = \{N_1, N_2, N_3, N_4\}$  为形函数矩阵,  $\mathbf{B}^\beta = \begin{bmatrix} \partial N_1/\partial x & \partial N_2/\partial x & \partial N_3/\partial x & \partial N_4/\partial x \\ \partial N_1/\partial y & \partial N_2/\partial y & \partial N_3/\partial y & \partial N_4/\partial y \end{bmatrix}$  为应变矩阵.

### 1.3 界面断裂相场模型的控制方程和边界条件

根据 Francfort-Marigo 变分原理<sup>[31]</sup>,区域  $\Omega$  所具有的势能为

$$\Pi = \Pi_s + \Pi_c - \Pi_e = \int_{\Omega} \psi(\boldsymbol{\varepsilon}) \, d\Omega + \int_{\Gamma_{dc}} G_c \, dS - \int_{\partial\Omega_u} \mathbf{u}^T \mathbf{t}^u \, dS - \int_{\partial\Omega_w} \mathbf{w}^T \mathbf{t}^w \, dS, \quad (13)$$

其中,  $\psi(\boldsymbol{\varepsilon})$  为应变能密度,  $\Pi_c$  为结构的断裂能,  $G_c$  为临界能量释放率,  $\Pi_e$  为外力势能,  $\mathbf{u} = \{u_x, u_y\}^T$ ,  $\mathbf{w} = \{w_x, w_y\}^T$ .

引入连续的相场变量  $d$ , 使用该变量对离散裂纹进行正则化表示,可得结构的总势能为

$$\Pi = \int_{\Omega} g(d) \psi(\boldsymbol{\varepsilon}) \, d\Omega + G_c \int_{\Omega} \gamma(d, \nabla d) \, d\Omega - \int_{\partial\Omega_u} \mathbf{u}^T \mathbf{t}^u \, dS - \int_{\partial\Omega_w} \mathbf{w}^T \mathbf{t}^w \, dS, \quad (14)$$

其中,  $g(d)$  为退化函数,表示材料由于损伤的存在而导致的应变能的退化,可设为  $g(d) = (1 - d)^2 + k$ ,  $k$  为无穷小量,本文中采用  $k = 1 \times 10^{-7}$ ;  $\nabla d$  为相场梯度场,  $\gamma(d, \nabla d)$  为裂纹面密度函数,表示为

$$\gamma(d, \nabla d) = \frac{1}{2l_c} (d^2 + l_c^2 |\nabla d|^2). \quad (15)$$

为了区分结构在受压和受拉情况下不同的断裂行为,将应变能密度函数进行拉压分解.在分解后的应变能密度中,假设只有受拉应变能驱动相场的演化,即能量退化只发生在受拉部分上

$$\Pi_s = \int_{\Omega} (g(d) \psi_+ + \psi_-) \, d\Omega, \quad (16)$$

其中,  $\psi_+ = \lambda \langle \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2 \rangle_+^2 / 2 + \mu [\langle \boldsymbol{\varepsilon}_1 \rangle_+^2 + \langle \boldsymbol{\varepsilon}_2 \rangle_+^2]$  和  $\psi_- = \psi - \psi_+$  分别表示应变能密度中的受拉部分和受压部分;  $\langle \cdot \rangle_+$  为 Macaulay 括号, 如  $\langle x \rangle_+ = (x + |x|) / 2$ ;  $\lambda$  和  $\mu$  为 Lamé 常数.

因此, 结构的总势能泛函可表示为

$$\Pi = \int_{\Omega} (g(d)\psi_+ + \psi_-) d\Omega + G_c \int_{\Omega} \gamma(d, \nabla d) d\Omega - \int_{\partial\Omega_u} \mathbf{u}^T \mathbf{t}^u dS - \int_{\partial\Omega_w} \mathbf{w}^T \mathbf{t}^w dS. \quad (17)$$

根据 Francfort-Marigo 变分原理, 执行总势能泛函关于位移场  $\mathbf{u}$  和  $\mathbf{w}$ , 及相场变量  $d$  的变分, 可得混合相场模型<sup>[32]</sup>的控制方程和边界条件为

$$\nabla \cdot [g(d)\boldsymbol{\sigma}] = 0, \quad \Omega, \quad (18a)$$

$$\nabla \cdot [g(d)\mathbf{H}] = 0, \quad \Omega, \quad (18b)$$

$$g(d)\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}^u, \quad \partial\Omega_u, \quad (18c)$$

$$g(d)\mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}^w, \quad \partial\Omega_w, \quad (18d)$$

$$-2(1-d)H_+ + \frac{G_c}{l_c}(d - l_c^2 \Delta d) = 0, \quad \Omega, \quad (18e)$$

$$\nabla d \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \partial\Omega, \quad (18f)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}, \quad \partial\Omega_u, \quad (18g)$$

其中,  $H_+$  为历史变量, 表示在点  $\mathbf{x}$  处应变能函数在  $[0, t]$  时间段内的历史最大值, 用于防止卸载时裂纹发生自愈

$$H_+ = \max_{[0, t]} \{\psi(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, \tau))\}. \quad (19)$$

## 2 有限元离散方程

位移场变量  $\mathbf{u}$  和  $\mathbf{w}$ , 相场  $d$  分别用插值函数离散为

$$\begin{cases} \{u_x, u_y\}^T = \sum_{i=1}^4 N_i^u \mathbf{u}_i, \\ \{w_x, w_y\}^T = \sum_{i=1}^4 N_i^w \mathbf{w}_i, \\ d = \sum_{i=1}^4 N_i d_i, \end{cases} \quad (20)$$

其中,  $N_i$  为形函数,  $N_i^u = N_i^w = \text{diag}(N_i, N_i)$ ;  $\mathbf{u}_i, \mathbf{w}_i$  和  $d_i$  分别表示节点声子场位移、相位子场位移和相场值. 因此, 声子场应变、相位子场应变及相场梯度场为

$$\begin{cases} \{\boldsymbol{\varepsilon}_x, \boldsymbol{\varepsilon}_y, \gamma_{xy}\}^T = \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_i^u \mathbf{u}_i, \\ \{\boldsymbol{\omega}_x, \boldsymbol{\omega}_y, \boldsymbol{\omega}_{xy}, \boldsymbol{\omega}_{yx}\}^T = \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_i^w \mathbf{w}_i, \\ \nabla d = \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_i^d d_i, \end{cases} \quad (21)$$

其中

$$\mathbf{B}_i^u = \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x & 0 & \partial N_i / \partial y \\ 0 & \partial N_i / \partial y & \partial N_i / \partial x \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{B}_i^w = \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x & 0 & \partial N_i / \partial y & 0 \\ 0 & \partial N_i / \partial y & 0 & \partial N_i / \partial x \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{B}_i^d = \{\partial N_i / \partial x, \partial N_i / \partial y\}^T.$$

将式(20)、(21)代入式(17)中, 可得

$$\begin{cases} \mathbf{R}^a = - \int_{\Omega} g(d) \mathbf{B}^T \mathbf{D}_d \mathbf{B} a d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Omega, \\ \mathbf{R}^d = - \int_{\Omega} \frac{G_c}{l_c} [(\mathbf{N}^d)^T \mathbf{N}^d + l_c^2 (\mathbf{B}^d)^T \mathbf{B}^d] d d\Omega - \int_{\Omega} g'(d) H_+ (\mathbf{N}^d)^T d\Omega, \end{cases} \quad (22)$$

其中,  $\mathbf{N} = \{N_1, N_2, N_3, N_4\}$  为形函数矩阵,  $N_i = \text{diag}(N_i, N_i, N_i, N_i)$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{LN}$  为应变矩阵,

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & \partial/\partial y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial/\partial x & 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial x \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{D}_q = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & R_1 & R_1 & R_2 & -R_2 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & -R_1 & -R_1 & -R_2 & R_2 \\ 0 & 0 & C_{66} & R_2 & R_2 & -R_1 & R_1 \\ R_1 & -R_1 & R_2 & K_1 & K_2 & 0 & 0 \\ R_1 & -R_1 & R_2 & K_2 & K_1 & 0 & 0 \\ R_2 & -R_2 & -R_1 & 0 & 0 & K_1 & -K_2 \\ -R_2 & R_2 & R_1 & 0 & 0 & -K_2 & K_1 \end{bmatrix}$$

为二维十次准晶的弹性矩阵,  $\mathbf{a} = \{u_{x1}, u_{y1}, w_{x1}, w_{y1}, \dots, u_{x4}, u_{y4}, w_{x4}, w_{y4}\}^T_{12 \times 1}$ ,  $\mathbf{t} = \{t_x^u, t_y^u, t_x^w, t_y^w\}^T$  为外力向量,  $\mathbf{d} = \{d_1, d_2, d_3, d_4\}^T$ .

采用交错迭代格式<sup>[33]</sup>对该相场模型进行求解,其基本流程为:以第  $n+1$  次迭代为例,固定相场  $\mathbf{d}_n$ , 位移场  $\mathbf{a}_{n+1}$  为  $\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_n + [\mathbf{K}^{aa}(\mathbf{a}_n, \mathbf{d}_n)]^{-1} \mathbf{R}^a(\mathbf{a}_n, \mathbf{d}_n)$ , 再利用已求得的位移场  $\mathbf{a}_{n+1}$ , 计算相场  $\mathbf{d}_{n+1}$ :  $\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{d}_n + [\mathbf{K}^{dd}(\mathbf{a}_{n+1}, \mathbf{d}_n)]^{-1} \mathbf{R}^d(\mathbf{a}_{n+1}, \mathbf{d}_n)$ , 上述求解过程交替往复,直至结果收敛.其求解格式为

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{d} \end{Bmatrix}_{n+1} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{d} \end{Bmatrix}_n + \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{aa} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}^{dd} \end{bmatrix}_n^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{R}^a \\ \mathbf{R}^d \end{Bmatrix}_n, \quad (23)$$

其中,  $\mathbf{K}^{aa} = \int_{\Omega} \mathbf{g}(d) \mathbf{B}^T \mathbf{D}_q \mathbf{B} d\Omega$ ,  $\mathbf{K}^{dd} = \int_{\Omega} G_c [(\mathbf{N}^d)^T / l_c + l_c (\mathbf{B}^d)^T \mathbf{B}^d] d\Omega + \int_{\Omega} g''(d) H_+ (\mathbf{N}^d)^T \mathbf{N}^d d\Omega$ . 这里需要说明的是,本文所有的有限元求解过程均通过 ABAQUS 的二次开发功能实现.

### 3 数值算例

在数值算例中,我们首先通过与现有文献对比说明了本文提出相场模型的正确性,其次研究了相位子场对准晶双材料中裂纹扩展路径的影响,最后分析了准晶双材料中双裂纹的演化规律.算例中采用两种二维十次准晶的材料参数,如表 1 所示<sup>[18,34]</sup>,根据文献[18],临界能量释放率的表达式为

$$G_c = \frac{\lambda(K_1 + K_2) + 2(R_1^2 + R_2^2)}{8(\lambda + M)c} K_{lc}^2, \quad (24)$$

其中,  $M = (C_{11} - C_{12})/2$ ,  $c = M(K_1 + K_2) - 2(R_1^2 + R_2^2)$ ,  $K_{lc} = 1 \text{ MPa} \cdot \sqrt{\text{m}}$ , 因此以下两种准晶材料的临界能量释放率分别为  $5.56 \times 10^{-7} \text{ kN/mm}$  和  $1.99 \times 10^{-6} \text{ kN/mm}$ .

表 1 二维十次准晶材料参数<sup>[18,34]</sup>

Table 1 Material properties of 2D decagonal quasicrystal<sup>[18,34]</sup>

parameter	QC-1	QC-2
phonon elastic modulus $C_{11}$ /GPa	234.3	200
phonon elastic modulus $C_{12}$ /GPa	57.34	100
phonon elastic modulus $C_{66}$ /GPa	88.45	50
phason elastic modulus $K_1$ /GPa	122	50
phason elastic modulus $K_2$ /GPa	24	20
phonon-phason coupling coefficient $R_1$ /GPa	-1.1	10
phonon-phason coupling coefficient $R_2$ /GPa	0.1	10
critical energy release rate $G_c$ / (kN/mm)	$5.56 \times 10^{-7}$	$1.99 \times 10^{-6}$

### 3.1 对比算例

现有文献中尚未见准晶材料界面裂纹扩展的结果,因此本文首先将问题退化至双弹性材料情况进行对比.考虑如图2(a)所示的纤维增强复合材料模型,其边长为1 mm,并且中心位置存在一个半径为0.25 mm的纤维.整体结构左边界固定,右边界水平方向受拉,垂直方向固定,材料参数与文献[35]一致.数值计算中采用的最小单元尺寸为 $h_{\min} = 0.01$  mm.根据式(8)可得到修正的界面临界能量释放率为 $\bar{G}_c^i = 2.49 \times 10^{-8}$  kN/mm.图3(a)为 $l_c = 0.10$  mm, 0.11 mm, 0.12 mm, 0.13 mm, 0.14 mm, 0.15 mm时对应的边界反力-位移曲线.由图中曲线可以发现,当 $l_c = 0.14$  mm时,本文结果与Yuan等<sup>[30]</sup>及Nguyen等<sup>[35]</sup>的结果一致.图3(c)给出了 $l_c = 0.14$  mm时纤维增强复合材料右边界受拉时的裂纹扩展路径,该结果与Nguyen等<sup>[35]</sup>的结果吻合良好.

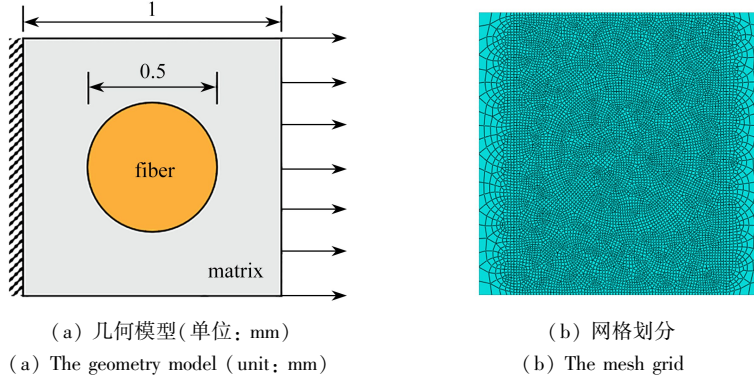


图2 纤维增强复合材料

Fig. 2 The fiber-reinforced composite

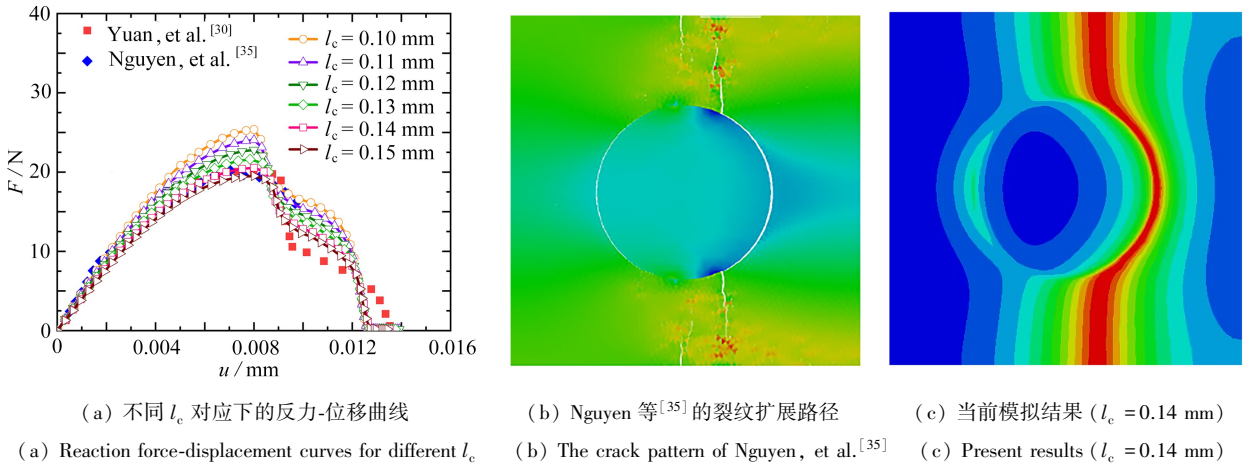


图3 裂纹扩展路径的对比

Fig. 3 Comparison of crack patterns

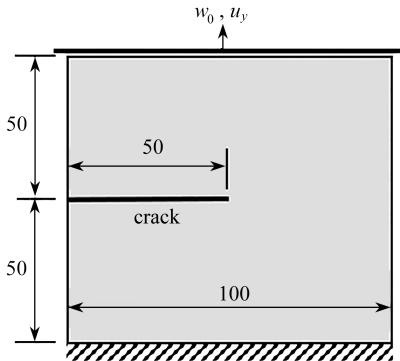
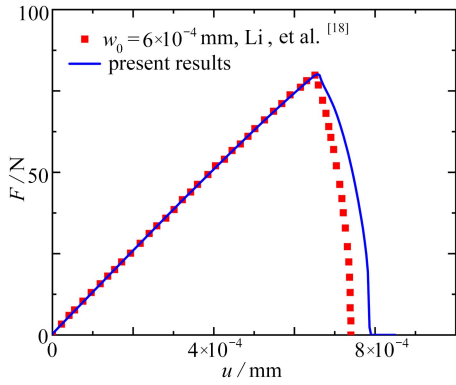


图4 含单边裂纹的正方形准晶(单位: mm)

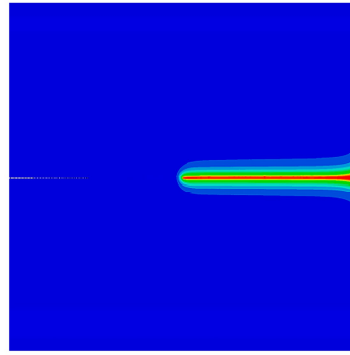
Fig. 4 An edge-cracked square quasicrystal (unit: mm)

其次,为了进一步说明本文提出相场模型的正确性,考虑如图4所示的含单边裂纹的单一材料准晶,计算参数与文献[18]一致.图5(a)和5(b)分别给出了反力-位移曲线和裂纹扩展路径.从图中可以看出,当前计算结果与Li等<sup>[18]</sup>的结果吻合良好.综上所述,本文提出的相场模型的具有较好的精确性,能够有效预测双材料准晶中的裂纹扩展路径.



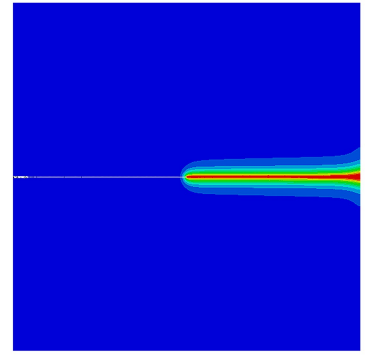
(a) 反力-位移曲线

(a) Reaction force-displacement curves



(b) Li 等<sup>[18]</sup>的裂纹扩展路径

(b) The crack pattern of Li, et al. [18]



(c) 当前模拟结果

(c) Present results

图 5 反力-位移曲线和裂纹断裂路径

Fig. 5 Reaction force-displacement curves and crack patterns

### 3.2 含单边裂纹的正方形准晶剪切断裂

考虑如图 6 所示的含单边裂纹的正方形准晶,其宽度和高度均为 100 mm,初始裂纹长度为 50 mm,上边界有沿水平方向的位移,下边界固定,材料参数选取为表 1 中的 QC-1.

数值计算中采用的最小单元尺寸为  $h_{\min} = 0.1$  mm,裂纹相场的特征宽度取为  $l_c = 1$  mm.图 7 给出了对应的边界反力-位移曲线和裂纹扩展路径,由于承受剪切载荷,裂纹向右下方偏转,最后扩展至底端右边缘处.根据曲线的趋势可将正方形准晶的剪切断裂分为三个阶段:第一个阶段 ( $OA$  段),为裂纹成核阶段,边界反力随位移线性增加,在  $A$  点达到反力的峰值,裂纹开始扩展,如图 7(b) 所示;第二个阶段 ( $AB$  段),为裂纹稳定扩展阶段,反力-位移曲线呈非线性缓慢下降,材料开始发生剪切断裂,裂纹向右下方偏转并稳定扩展,如图 7(c) 所示;第三个阶段 ( $BC$  段),为裂纹不稳定扩展阶段,材料裂纹扩展至底部边缘,所施加的水平位移载荷的作用转变为水平拉伸位移载荷的作用,材料底端瞬间完全断裂失效,如图 7(d) 所示.

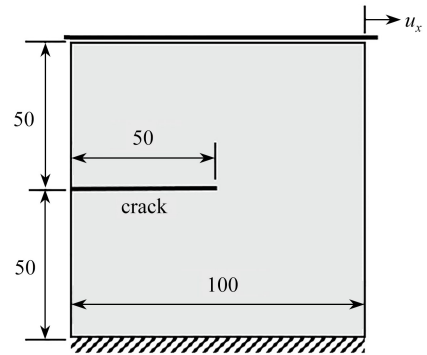
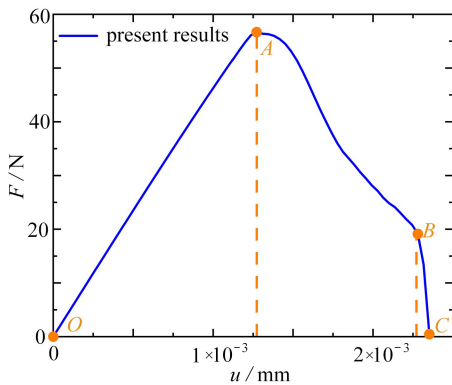


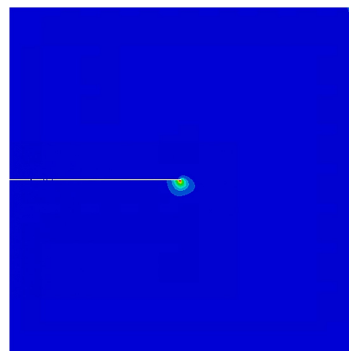
图 6 含单边裂纹的正方形准晶的几何尺寸和边界条件(单位: mm)

Fig. 6 Geometry and boundary conditions of the edge-cracked square quasicrystal (unit: mm)



(a) 反力-位移曲线

(a) The reaction force-displacement curve



(b)  $A$  点:  $u = 1.272 \times 10^{-3}$  mm

(b) Point A:  $u = 1.272 \times 10^{-3}$  mm



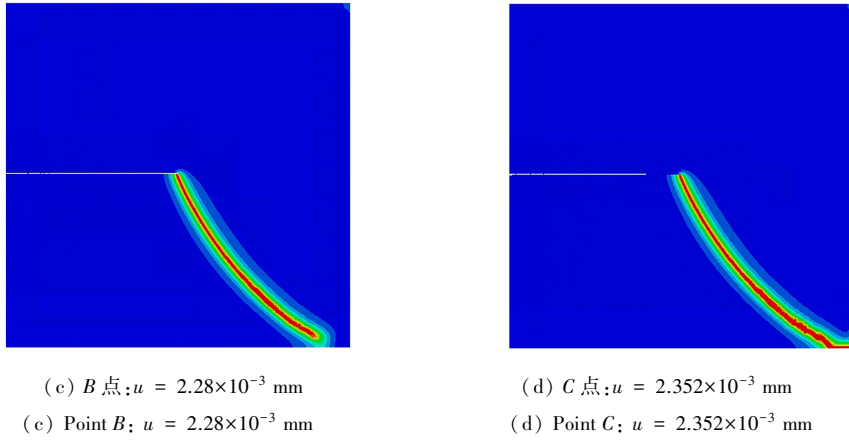


图7 反力-位移曲线和裂纹扩展路径

Fig. 7 The reaction force-displacement curve and crack patterns

### 3.3 含初始裂纹的三点弯曲模型

考虑如图8所示的三点弯曲模型,其底端中部有一个长度为0.4 mm的初始裂纹,模型几何尺寸和边界条件如下图所示,其长度为8 mm,高度为2 mm,底端左角点的边界条件为  $u_x = u_y = 0$ ,右角点的边界条件为  $u_y = 0$ ,上边界中部有沿竖直方向的集中位移加载,材料参数选取为表1中的QC-1.

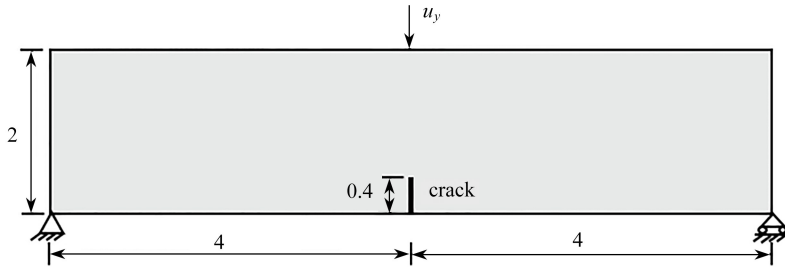
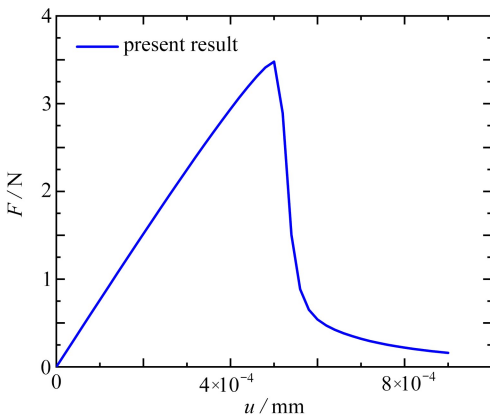


图8 三点弯曲问题的几何模型及边界条件(单位: mm)

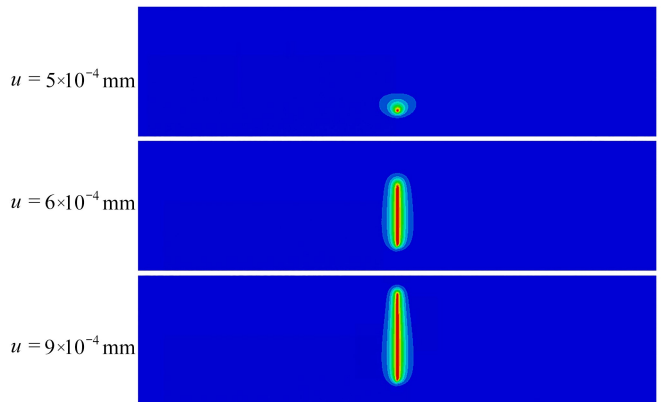
Fig. 8 Geometry and boundary conditions for the 3-point bending test (unit: mm)

数值计算中采用的最小单元尺寸为  $h_{\min} = 0.01$  mm, 裂纹相场的特征宽度取为  $l_c = 0.05$  mm. 图9(a)和9(b)分别给出了对应的边界反力-位移曲线和裂纹的演化过程,可以看出,裂纹在底部中端的初始裂纹尖端处起裂,并沿着竖直方向扩展.



(a) 反力-位移曲线

(a) The reaction force-displacement curve



(b) 受位移加载作用下梁的裂纹演化过程

(b) The crack evolution in the beam subjected to the displacement

图9 反力-位移曲线和裂纹演化过程

Fig. 9 The reaction force-displacement curve and the crack evolution

### 3.4 含单边裂纹的准晶双材料

考虑如图 10 所示的含单边裂纹的准晶双材料,其左右两端受竖直方向上的位移加载,界面方向与水平方向之间的夹角为  $\theta$ , 初始裂纹尖端位于材料界面,材料 1 和 2 均为同一种准晶材料,材料参数为表 1 中的 QC-1.

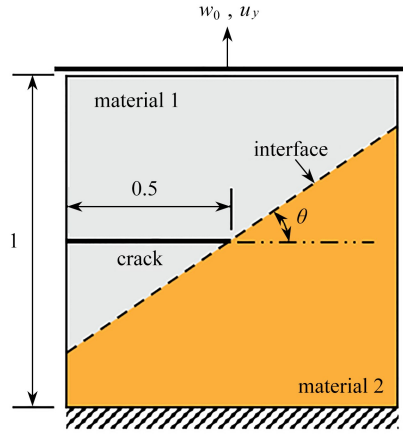


图 10 含单边裂纹的准晶双材料的几何模型及边界条件(单位: mm)

Fig. 10 Geometry and boundary conditions of the edge-cracked quasicrystal bimaterials (unit: mm)

数值计算中采用的最小单元尺寸为  $h_{\min} = 0.002 \text{ mm}$ , 界面相场和裂纹相场的特征宽度分别取为  $l_i = 2h_{\min} = 0.004 \text{ mm}$ ,  $l_c = 5h_{\min} = 0.01 \text{ mm}$ <sup>[32]</sup>, 界面临界能量释放率为  $G_i = 3 \times 10^{-7} \text{ kN/mm}$ , 界面角度选取为  $\theta = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ . 为了研究不同相位子场载荷对裂纹扩展路径的影响, 图 11—13 分别给出了相位子场载荷  $w_0 = 0 \text{ mm}, 2 \times 10^{-5} \text{ mm}, 4 \times 10^{-5} \text{ mm}, 6 \times 10^{-5} \text{ mm}, 8 \times 10^{-5} \text{ mm}, 1 \times 10^{-4} \text{ mm}$  时的边界反力-位移曲线. 由图中曲线可以发现, 随着相位子场载荷的增加, 准晶双材料边界反力的峰值逐渐减小, 并且对应的拉伸位移也相应减小, 说明相位子场载荷也可以促进裂纹扩展, 导致结构承载能力下降. 此外, 随着相位子场载荷的增加, 三种界面角度下的裂纹扩展路径均发生了显著变化, 裂纹扩展路径由沿界面开裂转变为在材料 2 内部沿水平方向开裂. 该现象表明, 相位子场载荷的增加增大了 I 型破坏的占比, 结构的破坏模式从 I、II 混合型破坏变为 I 型破坏为主.

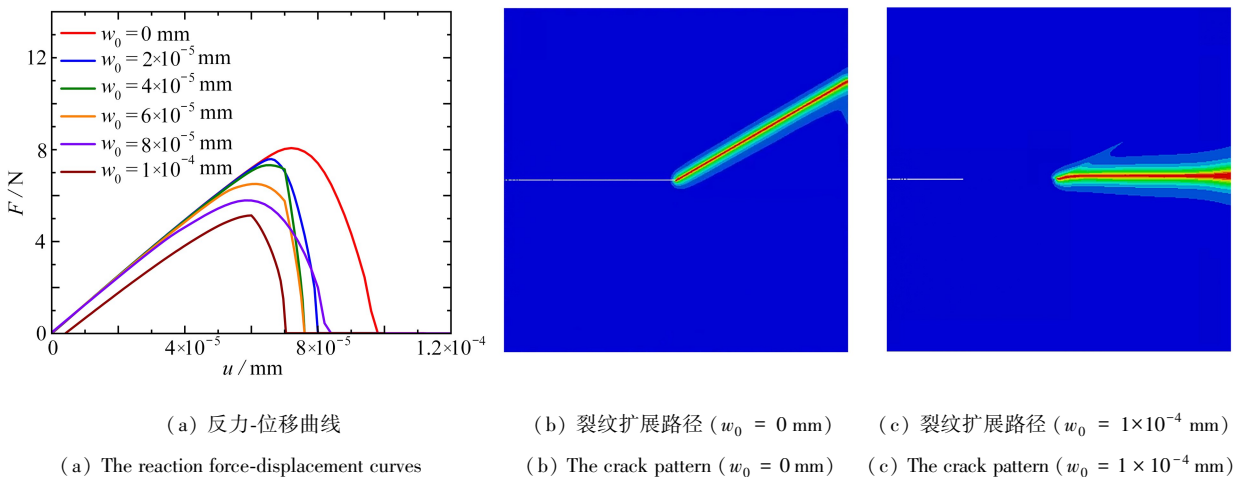


图 11  $\theta = 30^\circ$  时的反力-位移曲线和裂纹扩展路径

Fig. 11 Reaction force-displacement curves and crack patterns for  $\theta = 30^\circ$

为了研究界面临界能量释放率对裂纹扩展路径的影响, 图 14 给出了界面临界能量释放率与材料临界能量释放率之比  $G_i/G_c = 0.4, 0.5, 0.6, 0.7$  时对应的反力-位移曲线. 界面倾斜角度和相位子位移场载荷分别选取为  $\theta = 60^\circ$  和  $w_0 = 5 \times 10^{-6} \text{ mm}$ . 对应的裂纹扩展路径如图 15 所示. 由图 14 中曲线可知, 随着  $G_i/G_c$  的增加, 边界反力的峰值增加. 从图 15 可以看出, 当  $\theta = 60^\circ$ , 且  $G_i/G_c \geq 0.6$  时, 裂纹发生微小偏折后沿水平方向

开裂,且随着  $G_i/G_c$  的增加,裂纹偏折的长度减少.该现象说明当界面临界能量释放率较小时,结构发生 I、II 型混合破坏,裂纹沿界面开裂后沿水平方向开裂,随着界面临界能量释放率的增加,其逐渐接近于材料自身的临界能量释放率,此时结构发生 I 型破坏的占比增大,裂纹轻微偏折后沿水平方向开裂.

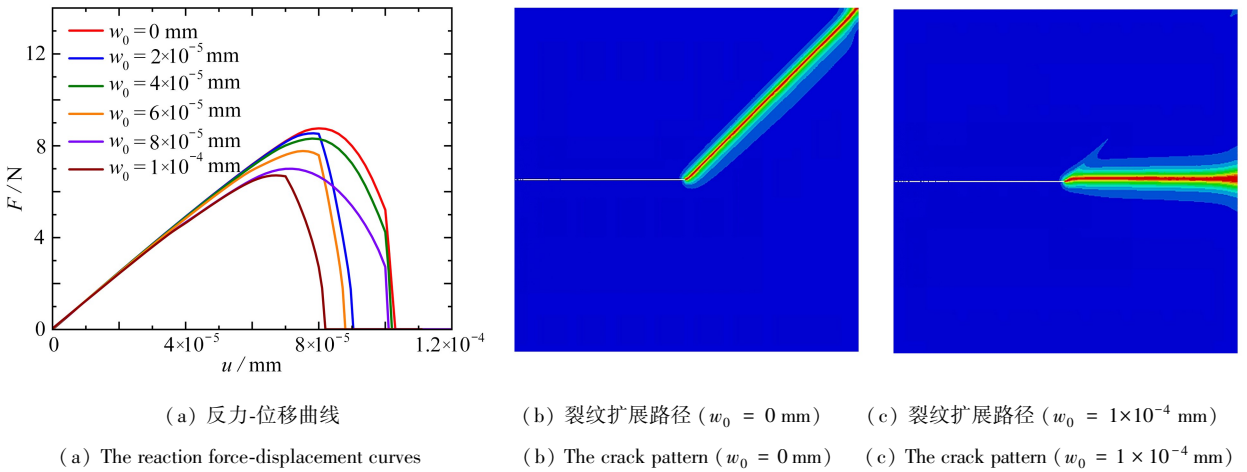


图 12  $\theta = 45^\circ$  时的反力-位移曲线和裂纹扩展路径

Fig. 12 Reaction force-displacement curves and crack patterns for  $\theta = 45^\circ$

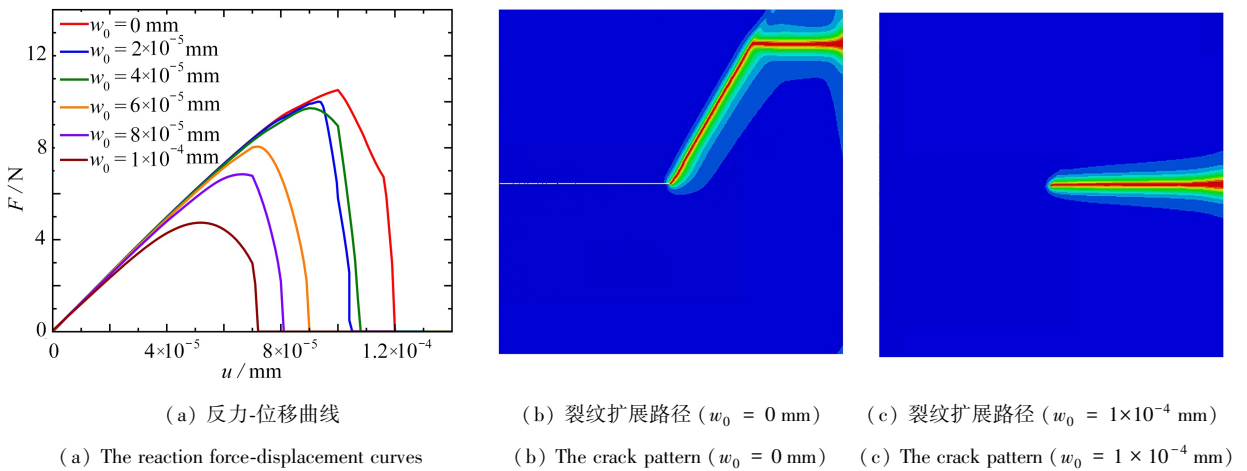


图 13  $\theta = 60^\circ$  时的反力-位移曲线和裂纹扩展路径

Fig. 13 Reaction force-displacement curves and crack patterns for  $\theta = 60^\circ$

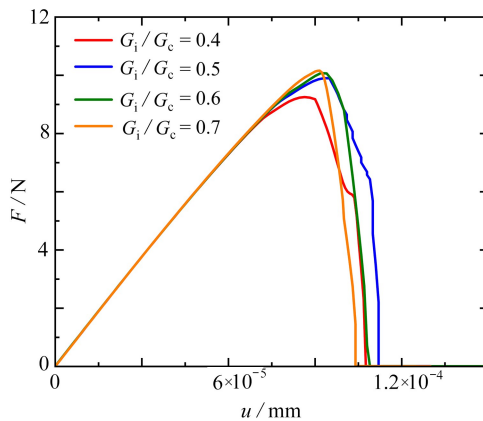


图 14 不同  $G_i/G_c$  情况下的反力-位移曲线

Fig. 14 Reaction force-displacement curves obtained from different  $G_i/G_c$  ratios

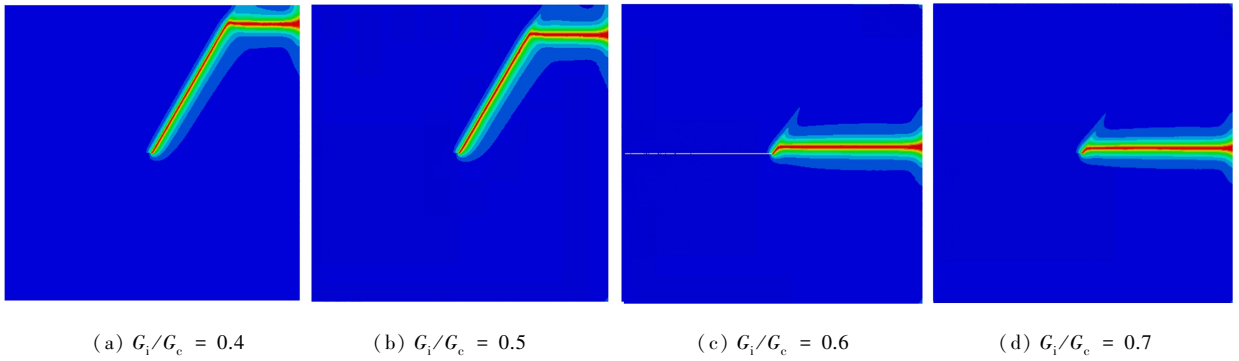


图 15 不同  $G_1/G_c$  情况下的裂纹扩展路径

Fig. 15 Crack patterns obtained from different  $G_1/G_c$  ratios

### 3.5 含双边裂纹的准晶双材料

考虑如图 16 所示的含双边裂纹的准晶双材料,其下端固定,上端受竖直方向上的位移载荷,材料 1 和 2 分别选取为表 1 中的 QC-1 和 QC-2.数值计算中采用的最小单元尺寸为  $h_{\min} = 0.002 \text{ mm}$ ,裂纹相场和界面相场的特征宽度均取为  $l_c = l_i = 0.01 \text{ mm}$ ,界面临界能量释放率为  $G_c^i = 2.5 \times 10^{-8} \text{ kN/mm}$ ,相位子场载荷  $w_0 = 4 \times 10^{-5} \text{ mm}$ .图 17 给出了对应的边界反力-位移曲线,其中标记了  $O$  点( $u = 0 \text{ mm}$ )、 $A$  点( $u = 8.8 \times 10^{-5} \text{ mm}$ )、 $B$  点( $u = 1.02 \times 10^{-4} \text{ mm}$ )、 $C$  点( $u = 2.02 \times 10^{-4} \text{ mm}$ )和  $D$  点( $u = 2.18 \times 10^{-4} \text{ mm}$ ),用于标识曲线的  $OA$ 、 $AB$ 、 $BC$  和  $CD$  四个阶段.图 18 给出了各个点处对应的裂纹扩展情况.

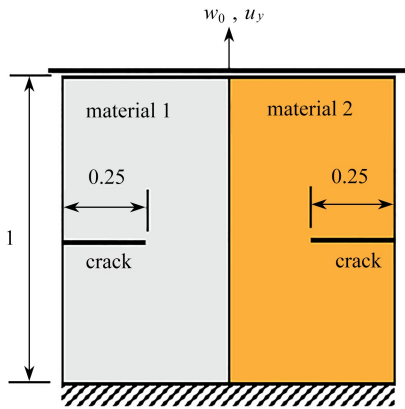


图 16 含双边裂纹的准晶双材料的几何模型及边界条件(单位: mm)

Fig. 16 Geometry and boundary conditions of the double-notches quasicrystal bimerials (unit: mm)

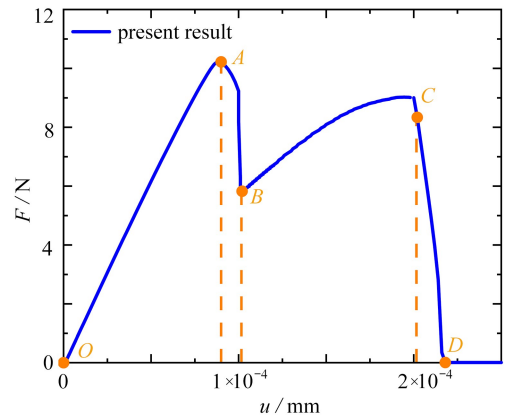
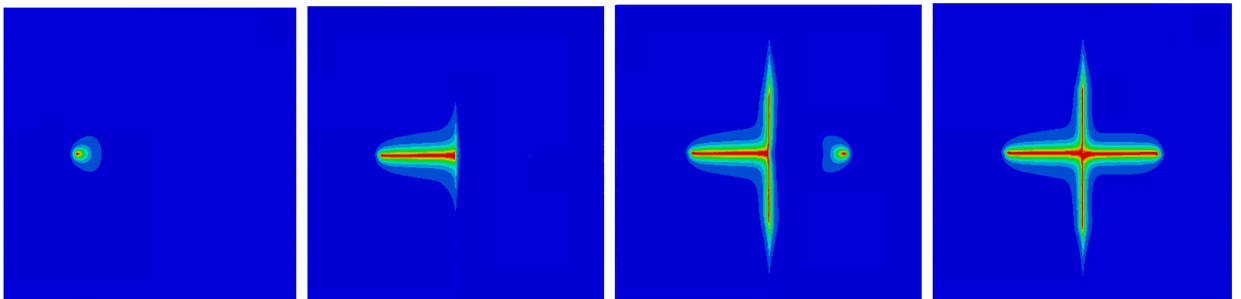


图 17 含双边裂纹的准晶双材料受拉时的反力-位移曲线

Fig. 17 The reaction force-displacement curve of tension test of the double-notches quasicrystal bimerials



(a)  $A$  点:  $u = 8.8 \times 10^{-5} \text{ mm}$  (b)  $B$  点:  $u = 1.02 \times 10^{-4} \text{ mm}$  (c)  $C$  点:  $u = 2.02 \times 10^{-4} \text{ mm}$  (d)  $D$  点:  $u = 2.18 \times 10^{-4} \text{ mm}$   
 (a) Point  $A$ :  $u = 8.8 \times 10^{-5} \text{ mm}$  (b) Point  $B$ :  $u = 1.02 \times 10^{-4} \text{ mm}$  (c) Point  $C$ :  $u = 2.02 \times 10^{-4} \text{ mm}$  (d) Point  $D$ :  $u = 2.18 \times 10^{-4} \text{ mm}$

图 18 不同加载时刻的裂纹扩展情况

Fig. 18 Crack patterns at different loading times

在  $A$  点之前,边界反力随位移单调递增,在  $A$  点达到峰值,此时结构左侧的裂纹尖端区域出现裂纹扩展,其裂纹扩展情况如图 18(a) 所示.随着载荷的增加,反力出现下降,左侧裂纹扩展到整体结构的界面处,即  $B$  点,其裂纹扩展情况如图 18(b) 所示.进一步加载后,裂纹出现分叉并沿着界面朝相反方向进行扩展,结构右侧的裂纹尖端区域出现裂纹扩展,即  $C$  点,其裂纹扩展情况如图 18(c) 所示.最后,随着载荷的增加,结构右侧的裂纹与界面处的裂纹合并,反力逐渐减小,直至结构完全丧失承载能力,即  $D$  点,其裂纹扩展情况如图 18(d) 所示.

## 4 结 论

本文发展了二维十次准晶双材料界面断裂分析的相场模型,推导了对应的控制方程及边界条件,并在 ABAQUS 的二次开发平台下实现了对控制方程的求解,获得了裂纹扩展路径.通过与文献结果进行对比,说明了本文提出相场模型的正确性.数值算例表明,相位子场载荷和界面临界能量释放率对裂纹扩展路径有着显著影响,随着相位子场载荷和界面临界能量释放率增加,裂纹扩展路径由沿界面开裂转变为材料内开裂.此外,本文所提出的相场模型可有效模拟多裂纹在准晶双材料中的扩展与融合.

### 参考文献 (References):

- [1] MACIÁ-BARBER E. *Quasicrystals: Fundamentals and Applications*[M]. CRC Press, 2020.
- [2] 杨震霆, 王雅静, 聂雪阳, 等. 含切口的压电准晶组合结构界面断裂分析的辛-等几何耦合方法[J]. 应用数学和力学, 2024, **45**(2): 144-154. (YANG Zhenting, WANG Yajing, NIE Xueyang, et al. Symplectic isogeometric analysis coupling method for interfacial fracture of piezoelectric quasicrystal composites with notches[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2024, **45**(2): 144-154. (in Chinese))
- [3] 赵雪芬, 卢绍楠, 马园园, 等. 一维六方准晶非周期平面内中心开口裂纹的平面热弹性问题[J]. 应用数学和力学, 2024, **45**(3): 303-317. (ZHAO Xuefen, LU Shaonan, MA Yuanyuan, et al. The plane thermoelastic problem of a central opening crack in the 1D hexagonal quasicrystal non-periodic plane[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2024, **45**(3): 303-317. (in Chinese))
- [4] 张炳彩, 丁生虎, 张来萍. 一维六方准晶双材料中圆孔边共线界面裂纹的反平面问题[J]. 应用数学和力学, 2022, **43**(6): 639-647. (ZHANG Bingcai, DING Shenghu, ZHANG Laiping. The anti-plane problem of collinear interface cracks emanating from a circular hole in 1D hexagonal quasicrystal bi-materials[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(6): 639-647. (in Chinese))
- [5] ZHAO M, DANG H, FAN C, et al. Analysis of a three-dimensional arbitrarily shaped interface crack in a one-dimensional hexagonal thermo-electro-elastic quasicrystal bi-material, part 1: theoretical solution[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2017, **179**: 59-78.
- [6] DANG H, ZHAO M, FAN C, et al. Analysis of a three-dimensional arbitrarily shaped interface crack in a one-dimensional hexagonal thermo-electro-elastic quasicrystal bi-material, part 2: numerical method[J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2017, **180**: 268-281.
- [7] FAN C, LV S, DANG H, et al. Fundamental solutions and analysis of the interface crack for two-dimensional decagonal quasicrystal bimaterial via the displacement discontinuity method[J]. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2019, **106**: 462-472.
- [8] ZHAO M, FAN C, LU C S, et al. Interfacial fracture analysis for a two-dimensional decagonal quasi-crystal coating layer structure[J]. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, 2021, **42**(11): 1633-1648.
- [9] ZHAO M, ZHANG X, FAN C, et al. Thermal fracture analysis of a two-dimensional decagonal quasicrystal coating structure with interface cracks[J]. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2023, **30**(10): 2001-2016.

- [10] TREBIN H R, MIKULLA R, STADLER J, et al. Molecular dynamics simulations of crack propagation in quasicrystals[J]. *Computer Physics Communications*, 1999, **121/122**: 536-539.
- [11] KRZALIC G, BRUNELLI M, TREBIN H R. Temperature dependence of dislocation motion and crack propagation in a two-dimensional binary model quasicrystal[J/OL]. *MRS Online Proceedings Library*, 2001, **643**(1): 71[2024-08-16]. <https://link.springer.com/article/10.1557/PROC-643-K7.1>.
- [12] RUDHART C, TREBIN H R, GUMBSCH P. Crack propagation in perfectly ordered and random tiling quasicrystals[J]. *Journal of Non-Crystalline Solids*, 2004, **334/335**: 453-456.
- [13] RÖSCH F, RUDHART C, ROTH J, et al. Dynamic fracture of icosahedral model quasicrystals: a molecular dynamics study[J]. *Physical Review B*, 2005, **72**: 014128.
- [14] JUNG D Y, STEURER W. Mechanical properties of clusters in quasicrystal approximants: the example of the 1/1 Al-Cu-Fe approximant[J]. *Physical Review B*, 2011, **84**(5): 054116.
- [15] 吴祥法, 范天佑, 安冬梅. 用路径守恒积分计算平面准晶裂纹扩展的能量释放率[J]. 计算力学学报, 2000, **17**(1): 34-42. (WU Xiangfa, FAN Tianyou, AN Dongmei. Energy release rate of plane quasicrystals with crack determined by path-independent E-integral[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2000, **17**(1): 34-42. (in Chinese))
- [16] ZHU A Y, FAN T Y. Dynamic crack propagation in decagonal Al-Ni-Co quasicrystal[J]. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 2008, **20**(29): 295217.
- [17] TUPHOLME G E. An antiplane shear crack moving in one-dimensional hexagonal quasicrystals[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2015, **71**: 255-261.
- [18] LI T, YANG Z T, XU C H, et al. A phase field approach to two-dimensional quasicrystals with mixed mode cracks[J]. *Materials*, 2023, **16**(10): 3628.
- [19] ZHANG Z G, ZHANG B W, LI X, et al. A closed-form solution to the mechanism of interface crack formation with one contact area in decagonal quasicrystal bi-materials[J]. *Crystals*, 2024, **14**(4): 316.
- [20] ZHENG R F, LIU H N, LI P D, et al. Elliptic crack problem under shear mode in one-dimensional hexagonal quasicrystals with crack surface parallel to the quasiperiodic axis[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2024, **288**: 112601.
- [21] 苏玉昆, 马涛, 赵晓鑫, 等. 基于有限元技术的疲劳裂纹扩展方法研究进展[J]. 力学进展, 2024, **54**(2): 308-343. (SU Yukun, MA Tao, ZHAO Xiaoxin, et al. Research progress of fatigue crack propagation method based on finite element technology[J]. *Advances in Mechanics*, 2024, **54**(2): 308-343. (in Chinese))
- [22] 赵高乐, 齐红宇, 李少林, 等. 燃气涡轮发动机关键部件疲劳小裂纹研究进展[J]. 力学进展, 2023, **53**(4): 819-865. (ZHAO Gaole, QI Hongyu, LI Shaolin, et al. Review of fatigue small cracks in key components of gas turbine engines[J]. *Advances in Mechanics*, 2023, **53**(4): 819-865. (in Chinese))
- [23] 裘沙沙, 刘星泽, 宁文杰, 等. 断裂相场模型的三维自适应有限元方法[J]. 应用数学和力学, 2024, **45**(4): 391-399. (QIU Shasha, LIU Xingze, NING Wenjie, et al. A three-dimensional adaptive finite element method for phase-field models of fracture[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2024, **45**(4): 391-399. (in Chinese))
- [24] SUN T Y, GUO J H, PAN E. Nonlocal vibration and buckling of two-dimensional layered quasicrystal nanoplates embedded in an elastic medium[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, **42**(8): 1077-1094.
- [25] ZHANG M, GUO J H, LI Y S. Bending and vibration of two-dimensional decagonal quasicrystal nanoplates via modified couple-stress theory[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(3): 371-388.
- [26] 陈韬, 郭俊宏, 田园. 一维六方准晶层合筒支梁自由振动与屈曲的精确解[J]. 固体力学学报, 2023, **44**(1): 109-119. (CHEN Tao, GUO Junhong, TIAN Yuan. Exact solution of free vibration and buckling of one-dimensional hexagonal simply-supported and layered quasicrystal beams[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2023, **44**(1): 109-119. (in Chinese))

- [27] 原庆丹, 郭俊宏. 一维纳米准晶层合梁的非局部振动、屈曲与弯曲研究[J]. 应用数学和力学, 2024, **45**(2): 208-219. (YUAN Qingdan, GUO Junhong. Nonlocal vibration, buckling and bending of 1D layered quasicrystal nanobeams[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2024, **45**(2): 208-219. (in Chinese))
- [28] MIEHE C, HOFACKER M, WELSCHINGER F. A phase field model for rate-independent crack propagation: robust algorithmic implementation based on operator splits[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010, **199**(45/48): 2765-2778.
- [29] FAN T. *Mathematical Theory of Elasticity of Quasicrystals and Its Applications*[M]. Berlin: Springer, 2011.
- [30] YUAN J H, WANG L, CHEN C P. Interfacial fracture analysis for heterogeneous materials based on phase field model[J]. *Computational Materials Science*, 2023, **220**: 112066.
- [31] FRANCFORT G A, MARIGO J J. Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1998, **46**(8): 1319-1342.
- [32] MIEHE C, WELSCHINGER F, HOFACKER M. Thermodynamically consistent phase-field models of fracture: variational principles and multi-field FE implementations[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2010, **83**(10): 1273-1311.
- [33] MOLNÁR G, GRAVOUIL A. 2D and 3D Abaqus implementation of a robust staggered phase-field solution for modeling brittle fracture[J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2017, **130**: 27-38.
- [34] 袁彦鹏. 准晶材料平面断裂问题分析[D]. 郑州: 郑州大学, 2018. (YUAN Yanpeng. Analysis of plane fracture problem of quasicrystal[D]. Zhenzhou: Zhenzhou University, 2018. (in Chinese))
- [35] NGUYEN V P, NGUYEN G D, NGUYEN C T, et al. Modelling complex cracks with finite elements: a kinematically enriched constitutive model[J]. *International Journal of Fracture*, 2017, **203**(1): 21-39.