

指数型体积分数功能梯度材料的 薄壁圆柱壳振动

A G 沙哈¹, T 曼穆德¹, M N 那姆²

(1. 巴哈瓦浦耳伊斯兰大学 数学系, 巴基斯坦;
2. 统治学院大学 数学系, 费萨拉巴德, 巴基斯坦)

(郭兴明推荐)

摘要: 研究了指数型体积分数对功能梯度薄圆柱壳振动频率的影响。壳体厚度方向上的材料特性呈指数律变化。由 Love 薄壳理论, 得到应变-位移及曲率-位移关系表达式。利用 Rayleigh-Ritz 方法, 导出壳体的固有频率方程。假定轴向形态关系是典型的梁函数。壳体的固有频率取决于组合材料的体积分数。所得结果与已有文献的结果进行对比分析, 说明本方法是正确的。

关键词: 指数型体积分数; 功能梯度材料(FGM); 圆柱壳; 振动; Rayleigh-Ritz 法

中图分类号: O327 **文献标识码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2009.05.007

引 言

圆柱壳在工程及工业领域中有着广泛的应用, 如土木、力学和航空等。它们大多数被用于承重结构, 如飞行器、建筑物和轮船。在早期应用中, 理论分析其动力特性, 如振动、屈曲、稳定等, 为今后的实际应用规避了风险。Love^[1]薄壳理论被认为是第一个基于 Kirchhoff 假设(梁和板的正确理论。在 Leissa^[2]、Blevins^[3]和 Markus^[4]的著作中, 可以看到他们对壳体理论的检验, 这些理论都是对 Love^[1]壳体理论的改进。Arnold 和 Warburton^[5]在圆柱壳振动特性的研究方面做了开创性的工作。文献[2-4]给出了壳体振动特性研究最好的综述。

采用不同类型的材料来构建壳体。功能梯度材料(FGMs)已被广泛地应用于不同的领域, 包括电子学、化学、光学、生物医学等。1984 年日本的材料科学界^[6-7]作为隔热材料最早提出了制作功能梯度材料的想法。FGMs 是用粉末冶金法将不同的材料复合而成。FGMs 已经被用来构建动力学构件, 如梁、板、壳, 并研究其振动响应。这项工作已有大量的文献报道, 如 Loy 等^[8]、Pradhan 等^[9]、Ying 等^[10]、Sheng 和 Wang^[11]、Li 等^[12]、Chen 等^[13], 以及 Najafizadeh 和 Isvandzibaei^[14]的工作。

用 FGMs 制成圆柱壳来适应其使用环境。Loy 等^[8]在各种几何参数下, 研究了功能梯度圆柱壳的固有频率谱, 以及调节体积分数规则对材料分布的影响。Pradhan 等^[9]给出了在各种边

收稿日期: 2008-10-09; 修订日期: 2009-01-03

作者简介: Abdul Ghafar Shah, 巴基斯坦人(联系人, E-mail: aghafarshah@yahoo.com)。

本文原文为英文, 黄锋译, 张禄坤校。

界条件下, 功能梯度圆柱壳的振动特性分析 轴向形态关系可以由典型梁函数来近似 Najafzadeh 和 Isvandibaei^[14] 基于高阶剪切变形板理论, 研究了环形支承功能梯度壳的振动 Arshad 等^[15] 提出了具有各种体积分数规则时功能梯度材料圆柱壳的频率分析

功能梯度材料中, 材料的分布取决于体积分数规则, 以及功能梯度圆柱壳组成材料的径向变化 这将导致壳体成分连续性的改变, 并出现力学性能和热性能的梯度变化 文献[8-9]中, 假设体积分数规则是代数多项式形式, 其指数从 0 变化到无穷大 体积分数指数的变化, 影响壳体的频率 文献[15] 假设不同数学形式的体积分数规则, 进行了频率分析, 并研究了它们对频率谱的影响, 提出了圆柱壳固有频率随着体积分数指数值的变化而连续变化

本文在振动频率分析的研究中, 建议采用广义指数形式的体积分数规则 检查底数的变化对壳体振动特性的影响 利用 Rayleigh-Ritz 方法, 对筒支边界条件进行了分析 通过将本文的结果与已有文献相比较, 证明本方法的有效性和正确性

1 数学公式

考虑一个薄壁圆柱壳, 其几何参数如图 1 所示, 平均半径为 R , 长度为 L , 厚度为 h 材料参数是, 弹性模量 E , Poisson 比 ν , 质量密度 ρ 假设正交坐标系 (x, θ, z) 建立在壳体中面上, 其中 x , θ 和 z 分别为壳的轴向、周向和径向坐标

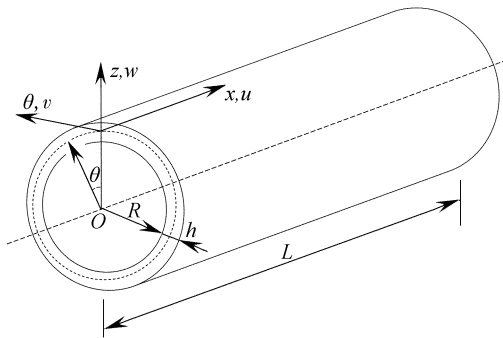


图 1 薄壁圆柱壳的几何示意图

注意到, 壳体中面的轴向、周向和径向的位移变形分别为 u, v 和 w 对于变厚度圆柱壳来说, 应变能为

$$S = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} [A_{11}e_{11}^2 + A_{22}e_{22}^2 + 2A_{12}e_{11}e_{22} + A_{66}e_{12}^2 + 2B_{11}e_{11} \kappa_{11} + 2B_{12}(e_{11}\kappa_{22} + e_{22}\kappa_{11}) + 2B_{22}e_{22}\kappa_{22} + 2B_{66}e_{12}\kappa_{12} + D_{11}\kappa_{11}^2 + D_{22}\kappa_{22}^2 + 2D_{12}\kappa_{11}\kappa_{22} + D_{66}\kappa_{12}^2] R d\theta dx, \quad (1)$$

其中, e_{11}, e_{22} 和 e_{12} 为参照曲面的应变, κ_{11}, κ_{22} 和 κ_{12} 为该曲面的曲率, A_{ij}, B_{ij} 和 D_{ij} ($i, j = 1, 2$ 和 6) 分别为薄膜刚度、耦合刚度和弯曲刚度:

$$\{A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}\} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} \{1, z, z^2\} dz \quad (2)$$

各向同性材料简化刚度为 Q_{ij} ($i, j = 1, 2$ 和 6)

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad Q_{12} = \frac{E\nu}{1-\nu^2}, \quad Q_{66} = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3)$$

本文假定薄壳的厚度参数 (R/h) 小于 20 基于此假设, 用 Love^[11] 的一阶壳体理论来描述应变-位移及曲率-位移关系, 对圆柱壳来说它们可以写成

$$\{e_{11}, e_{22}, e_{12}\} = \left\{ -\frac{u}{x}, -\frac{1}{R} \left(-\frac{v}{x} + w \right), -\left(\frac{v}{x} + \frac{1}{R} \frac{u}{x} \right) \right\} \quad (4)$$

及

$$\{\kappa_{11}, \kappa_{22}, \kappa_{12}\} = \left\{ -\frac{2w}{x^2}, -\frac{1}{R^2} \left(\frac{2w}{x} - \frac{v}{x} \right), -\frac{1}{R} \left(\frac{2w}{x} - \frac{v}{x} \right) \right\} \quad (5)$$

将关系式(4)和(5)代入含曲面应变 e_{11}, e_{22} 和 e_{12} , 曲面曲率 κ_{11}, κ_{22} 和 κ_{12} 的表达式(1), 壳体的

应变能可以用下式来描述:

$$\begin{aligned}
 S = & \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \left[A_{11} \left(\frac{u}{x} \right)^2 + \frac{A_{22}}{R^2} \left(\frac{v}{x} + w \right)^2 + \frac{2A_{12}}{R} \left(\frac{u}{x} \right) \left(\frac{v}{x} + w \right) + \right. \\
 & A_{66} \left(\frac{v}{x} + \frac{1}{R} \frac{u}{x} \right)^2 + 2B_{11} \left(\frac{u}{x} \right) \left(\frac{2w}{x^2} \right) + 2B_{12} \left(\frac{1}{R} \frac{u}{x} \right) \left(\frac{2w}{x^2} - \frac{v}{x} \right) + \\
 & \frac{1}{R} \left(\frac{v}{x} + w \right) \left(\frac{2w}{x^2} \right) \left. + \frac{2B_{22}}{R^3} \left(\frac{v}{x} + w \right) \left(\frac{2w}{x^2} - \frac{v}{x} \right) + \frac{2B_{66}}{R} \left(\frac{v}{x} + \right. \right. \\
 & \left. \frac{1}{R} \frac{u}{x} \right) \left(\frac{2w}{x} - \frac{v}{x} \right) + D_{11} \left(\frac{2w}{x^2} \right)^2 + \frac{D_{22}}{R^4} \left(\frac{2w}{x^2} - \frac{v}{x} \right)^2 + \\
 & \left. \frac{2D_{12}}{R^2} \left(\frac{2w}{x^2} \right) \left(\frac{2w}{x^2} - \frac{v}{x} \right) + \frac{D_{66}}{R^2} \left(\frac{2w}{x} - \frac{v}{x} \right)^2 \right] R dx \quad (6)
 \end{aligned}$$

不计转动惯量, 薄壁圆柱壳的动能给出为

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{2\pi} \rho \left[\left(\frac{u}{t} \right)^2 + \left(\frac{v}{t} \right)^2 + \left(\frac{w}{t} \right)^2 \right] R dx, \quad (7)$$

其中 t 表示时间, ρ 为单位长度的质量密度, 并定义为

$$\rho = \int_{-h/2}^{h/2} dz, \quad (8)$$

其中 ρ 为质量密度

用 Lagrange 函数来定义能量函数 F

$$F = T - S \quad (9)$$

2 求解过程

用 Rayleigh-Ritz 法得到圆柱壳的运动方程 假设位移函数 u, v 和 w 的形态形式对于空间变量 x , 及时间变量 t 来说是分离的:

$$\begin{cases} u(x, t) = AU(x) \cos n \cos t, \\ v(x, t) = BV(x) \sin n \cos t, \\ w(x, t) = CW(x) \cos n \cos t, \end{cases} \quad (10)$$

其中系数 A, B, C 表示振动振幅, n 为圆周波数, ω 为固有角振动频率

利用 u, v 和 w 的函数表达式, 以及它们在能量 S, T 公式中的偏导数表达式, 根据能量最小原理, 得到 Lagrange 函数形式

$$F = T_{\max} - S_{\max}, \quad (11)$$

其中 T_{\max} 和 S_{\max} 分别为最大动能和最大应变能 为了导出频率方程, 取 Lagrange 函数关于振幅参数 A, B, C 的极值, 得到 3 个相等的联立方程:

$$\frac{F}{A} = \frac{F}{B} = \frac{F}{C} = 0 \quad (12)$$

重新排列方程(12)中的各项, 得到下列特征方程, 用于确定壳体固有频率和模态

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \frac{L \rho}{2} \omega^2 \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}, \quad (13)$$

其中矩阵元素 (C_{ij}) 取决于壳体参数和圆柱壳两端的边界条件

3 轴向形态关系及边界条件

多种代数函数被用于轴向形态关系, 如梁函数^[16-17], 多项式函数^[18-19], Ritz 多项式函

数^[20-21], Fourier 级数形式的三角函数^[22] 这些函数都满足壳两端的边界条件 在本研究中, 轴向形态关系写成

$$U(x) = \frac{d}{dx}(x), \quad V(x) = (x), \quad W(x) = (x), \quad (14)$$

其中 (x) 是特征梁函数, 并定义为

$$(x) = d_1 \cos\left[\frac{x}{L}\right] + d_2 \sin\left[\frac{x}{L}\right] + d_3 \cosh\left[\frac{x}{L}\right] + d_4 \sinh\left[\frac{x}{L}\right], \quad (15)$$

其中参数 d_1, d_2, d_3 和 d_4 的值和壳端的边界条件有关, 是一个实数, 与梁函数的特征值对应, 并与轴向半波数有关 轴向位移及其导数应用物理约束, 端点 $x = 0$ 和 $x = L$ 上实际的边界条件为

$$\begin{cases} \text{固定} & (x) = \frac{d}{dx}(x) = 0, \\ \text{简支} & (x) = \frac{d^2}{dx^2}(x) = 0, \\ \text{自由} & \frac{d^2}{dx^2}(x) = \frac{d^3}{dx^3}(x) = 0 \end{cases} \quad (16)$$

本文只考虑圆柱壳两端简支的边界条件

4 功能梯度材料

功能梯度材料是一种高级材料, 广泛应用于工程科学技术 其卓越的性能, 使它们在热环境下得到最好的使用 功能梯度材料的材料特性是温度和体积分数的函数 材料的性能由组成材料的体积分数所控制 如果 P_i 表示第 i 种组份材料的材料性能, 功能梯度材料由 k 种材料组成, 则功能梯度材料的有效材料性能 P 可以写为

$$P = \sum_{i=1}^k P_i V_i, \quad (17)$$

其中 V_i 为第 i 种组份材料的体积分数, 且组份材料的体积分数之和等于 1, 即

$$\sum_{i=1}^k V_i = 1 \quad (18)$$

对于圆柱壳来说, 体积分数取决于厚度的变化, 并定义为

$$V_i = \left[\frac{z - R_i}{R_o - R_i} \right]^p, \quad (19)$$

R_i 和 R_o 分别表示壳体的内径和外径, z 为径向厚度的变化, p 为幂指数, 是一个非负的实数, 在 0 和无穷大之间 对圆柱壳来说, 体积分数假设为

$$V_i = \left[\frac{z + 0.5h}{h} \right]^p, \quad (20)$$

其中 h 为壳体的平均厚度 考虑壳体由两种材料组成时, 等效的弹性模量 E 、Poisson 比 ν 和质量密度 ρ 如下给出为

$$\begin{cases} E = (E_1 - E_2) \left[\frac{z + 0.5h}{h} \right]^p + E_2 \\ \nu = (\nu_1 - \nu_2) \left[\frac{z + 0.5h}{h} \right]^p + \nu_2 \\ \rho = (\rho_1 - \rho_2) \left[\frac{z + 0.5h}{h} \right]^p + \rho_2 \end{cases} \quad (21)$$

上述关系表明,FGM 的性能在内表面上表现为材料 2 的性能,在外表面上表现为材料 1 的性能。因此,FGM 的性能从内表面材料 2 的性能连续地变化到外表面材料 1 的性能。Arshad 等^[15]修正了体积分数规则式(20),假定按指数形式

$$V_i = 1 - \exp(-(z/h + 0.5)^p), \quad (22)$$

该规则只依赖于 1 个底数 e ($e = 2.718$)。现在,将该规则作进一步改进,拓展为一个综合底数 b ($b > 0$),记为

$$V_i = 1 - b^{-(z/h+0.5)^p} \quad (23)$$

这时,等效的弹性模量 E 、Poisson 比 ν 和质量密度 ρ 表示为

$$\begin{cases} E = (E_1 - E_2)\{1 - b^{-(z/h+0.5)^p}\} + E_2, \\ \nu = (\nu_1 - \nu_2)\{1 - b^{-(z/h+0.5)^p}\} + \nu_2, \\ \rho = (\rho_1 - \rho_2)\{1 - b^{-(z/h+0.5)^p}\} + \rho_2, \end{cases} \quad (24)$$

这些表达式表明,当 $z = -0.5h$ 时, $E = E_2$, $\nu = \nu_2$, $\rho = \rho_2$; 当 $z = 0.5h$ 时, $E = (E_1 - E_2)\{1 - b^{-1}\} + E_2$, $\nu = (\nu_1 - \nu_2)\{1 - b^{-1}\} + \nu_2$, $\rho = (\rho_1 - \rho_2)\{1 - b^{-1}\} + \rho_2$ 。因此,在壳体的内表面上,材料 2 是材料性能的主导作用,而在外表面上,材料性能表现为材料 1 和材料 2 的综合性能。

5 结果及讨论

将当前的结果和已有的研究成果进行比较,本文研究的有效性和正确性得到了验证。计算各向同性钢圆柱壳的固有频率(简支,无轴向约束),并与文献[23]的分析结果进行比较。壳体的几何参数和材料性能为: $L = 0.41 \text{ m}$, $h = 0.001 \text{ m}$, $R = 0.3015 \text{ m}$, $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$, $\nu = 0.30$, $\rho = 7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 。取轴向半波数 $m = 1$,表 1 中列出了两种方法所得结果。文献[23]采用数值逼近技术,而本文中采用 Rayleigh-Ritz 方法,假设轴向形态关系为封闭的三角函数,满足无轴向约束简支的边界条件。可以发现,本文所得到的频率低于文献[23]的结果,这是因为采用不同的分析方法。表 2 给出了功能梯度材料圆柱壳简支时的固有频率(Hz),与文献[14]结果的对比分析。壳体的内表面由材料镍组成,外表面由不锈钢组成,轴向半波数 $m = 1$,几何参数为 $L/R = 20$, $h/R = 0.002$ 。可以看到,两个频率非常接近,但在某些少数结果上本文的结果高于文献[14],这可能应归于壳体理论公式。本文采用线性薄壳理论,而在文献[14]采用三阶剪切变形板理论。从壳频率的对比结果来看,本文的方法是有效的,确保了结果的正确性。

表 1 各向同性圆柱壳两端简支时固有频率的对比分析
($m = 1, L = 0.41, h = 0.001, R = 0.3015$)

n	文献[23]	本文
7	305.22	301.60
8	281.31	278.64
9	288.24	286.02
10	317.49	315.51
11	362.20	360.36
12	417.94	416.19

表 2 功能梯度材料圆柱壳两端简支时固有频率的对比分析

 $(m = 1, L/R = 20, h/R = 0.002)$

Hz

n	$p = 0.5$		$p = 5$	
	文献[14]	本文	文献[14]	本文
1	13.320	13.321	12.915	12.998
2	4.5147	4.5168	4.3763	4.4068
3	4.1900	4.1911	4.0586	4.0891
4	7.1019	7.0972	6.8723	6.9251
5	11.343	11.336	11.978	12.061

表 3 不同底数的 I-型圆柱壳固有频率的变化情况 ($m = 1, L/R = 20, h/R = 0.002$)

Hz

n	$p = 0.5$				$p = 15$			
	$b = 2$	$b = 3$	$b = 5$	$b = 9$	$b = 2$	$b = 3$	$b = 5$	$b = 9$
1	13.319	13.307	13.296	13.287	13.008	13.007	13.005	13.004
2	4.5127	4.5082	4.5043	4.5012	4.4081	4.4073	4.4065	4.4057
3	4.1869	4.1818	4.1773	4.1740	4.0906	4.0891	4.0876	4.0862
4	7.0962	7.0875	7.0798	7.0737	6.9326	6.9301	6.9275	6.9252
5	11.337	11.323	11.311	11.301	11.075	11.072	11.068	11.064

表 4 不同底数的 II-型圆柱壳固有频率的变化情况 ($m = 1, L/R = 20, h/R = 0.002$)

Hz

n	$p = 0.5$				$p = 15$			
	$b = 2$	$b = 3$	$b = 5$	$b = 9$	$b = 2$	$b = 3$	$b = 5$	$b = 9$
1	13.106	13.118	13.128	13.137	13.427	13.428	13.430	13.431
2	4.4421	4.4465	4.4504	4.4534	4.5495	4.5501	4.5519	4.5527
3	4.1190	4.1240	4.1284	4.1318	4.2174	4.2186	4.2216	4.2231
4	6.9762	6.9847	6.9924	6.9984	7.1523	7.1468	7.1504	7.1528
5	11.143	11.157	11.169	11.179	11.413	11.417	11.422	11.425

本文还研究了两种功能梯度材料,即用于构成圆柱壳的材料不锈钢和镍,以及体积分数沿厚度方向按幂指数规则变化时的材料性能¹通过改变不锈钢和镍的体积分数的幂指数值,来研究组成材料体积分数的影响¹研究两类功能梯度材料的圆柱壳,分析功能梯度材料的构成对壳体频率的影响¹通过改变幂指数 p 及其底数来实现¹将功能梯度壳结构分成两类: I-型圆柱壳,壳的内表面由镍组成,外表面假设体积分数按式(23)组成两种材料的混合物; II-型圆柱壳,内表面上材料顺序刚好相反¹ $T = 300\text{ K}$ 时,不锈钢和镍的材料性能分别为

$$E = 2.07788 \times 10^{11} \text{ N/m}^2, M = 0.317756, Q = 8166 \text{ kg/m}^3$$

和

$$E = 2.05098 \times 10^{11} \text{ N/m}^2, M = 0.31, Q = 8900 \text{ kg/m}^3$$

表3给出了简支边界条件时,I-型圆柱壳固有频率的变化情况¹取轴向模型数 $m = 1$,几何参数 $L/R = 20, h/R = 0.002$ ¹材料径向体积分数按指数规则式(23)确定¹调整底数为2,3,5,9¹从表3中看到,频率随着幂指数 p 的增大而减小,显示了构成材料的体积分数对 p 值的影响¹这些变化是功能梯度材料沿着壳体厚度方向分布的结果¹频率随着体积分数规则式(23)的变化而变化,随着底数的增大而减小¹在体积分数规则式(23)中,当 p 固定时,底数 b 无限制增大时, V_1 趋于1,这时的壳体振动特征与单一功能梯度材料完全相似¹

表4给出了简支II-型圆柱壳的固有频率(Hz),底数分别为2,3,5,9,轴向模型数 $m = 1$ 在

表中可以看到, 频率随着 p 的增大而增大。这是组成圆柱壳功能梯度材料阶次改变的结果。还可以发现, 频率首先随着体积分数规则式(23)底数的增大而增大。随着 p 和底数 b 的增大, 频率值保持在由纯镍或纯不锈钢组成的圆柱壳的频率值之间。由此可以推断, 功能梯度材料圆柱壳的振动频率受到体积分数规则式(23)底数的影响。

6 结 论

本文研究材料分布沿壳体径向指数变化时, 分析功能梯度薄圆柱壳体的频率。对一个组合材料的功能梯度圆柱壳来说, 其变化受制于一个指数形式的代数公式。功能梯度圆柱壳由不锈钢和镍组成两种型式。使用 Love 壳体理论进行分析, 利用 Rayleigh-Ritz 方法, 求解简支边界条件下的壳体问题。轴向模态关系用三角函数逼近。和已有文献中的结果相比较, 验证了所得结果的正确性。研究发现, 指数体积分数的底数对 \tilde{N} -型和 $\tilde{0}$ -型圆柱壳频率的影响是不同的。对 \tilde{N} -型圆柱壳来说, 底数增大时固有频率是减小的, 对 $\tilde{0}$ -型圆柱壳来说是增大的。当体积分数变化规则如上所述时, 这种方法还可以推广到分析边界条件对壳振动的影响。

[参 考 文 献]

- [1] Love A E H. On the small free vibrations and deformations of a thin elastic shell[J]. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A, 1888, 179: 491- 549.
- [2] Leissa A W. Vibration of shells[R]. NASA SP- 288, 1973; Reprinted by the Acoustical Society of America, American Institute of Physics, 1993.
- [3] Blevins R D. Formulas for Natural Frequency and Mode Shape[M]. New York: Van Nostrand Reinhold, 1979.
- [4] Markus S. The Mechanics of Vibrations of Cylindrical Shell[M]. New York: Elsevier, 1988.
- [5] Arnold R N, Warburton G B. Flexural vibrations of the walls of thin cylindrical shells having freely supported ends[J]. Proc Royal Soc London, Ser A, 1949, 197(1049): 238- 256.
- [6] Makino A, Araki N, Kitajima H, et al. Transient temperature response of functionally gradient material subjected to partial step-wise heating[J]. Trans Japan Soc Mech Engg, Ser B, 1994, 60: 4200- 4006.
- [7] Koizumi M. The concept of FGM[J]. Ceramic Transactions: Functionally Gradient Material, 1993, 34: 3- 10.
- [8] Loy C T, Lam K Y, Reddy J N. Vibration of functionally graded cylindrical shells[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 1999, 41(3): 309- 324.
- [9] Pradhan S C, Loy C T, Lam K Y, et al. Vibration characteristics of functionally graded cylindrical shells under various boundary conditions[J]. Appl Acoust, 2000, 61(1): 111- 129.
- [10] Ying J, Lu C F, Chen W Q. Two dimensional elasticity solutions for functionally graded beams resting on elastic foundations[J]. Composite Structures, 2008, 84(3): 209- 219.
- [11] Sheng G G, Wang X. Thermal vibration, buckling and dynamic stability of functionally graded cylindrical shells embedded in an elastic medium[J]. Journal of Reinforced Plastics and Composites, 2007, 27(2): 117- 134.
- [12] LI Xiang-yu, DING Hao-jiang, CHEN Wei-qiu. Pure bending of simply supported circular plate of transversely isotropic functionally graded material[J]. Journal of Zhejiang University Science A, 2006, 7(8): 1324- 1328.
- [13] Chen W Q, Bian Z G, Ding H J. Three-dimensional vibration analysis of fluid-filled orthotropic FGM cylindrical shells[J]. Journal of Mechanical Sciences, 2004, 46(1): 159- 171.

- [14] Najafizadeh M M, Isvandzibaei M R. Vibration of functionally graded cylindrical shells based on higher order shear deformation plate theory with ring support[J]. *Acta Mechanica*, 2007, 191(1/2 : 75–91).
- [15] Arshad S H, Naeem M N, Sultana N. Frequency analysis of functionally graded material cylindrical shells with various volume fraction laws[J]. *Proc IMechE Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 2007, 221(12 : 1483– 1495).
- [16] Sewall J L, Naumann E C. An experimental and analytical vibration study of thin cylindrical shells with and without longitudinal stiffeners[R]. NASA TND– 4705, 1968.
- [17] Sharma C B, Johns D J. Vibration characteristics of a damped– free and damped– ring– stiffened circular cylindrical shell[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1971, 14(4 : 459– 474).
- [18] Messina A, Soldatos K P. Ritz– type dynamic analysis of cross– ply laminated circular cylinders subjected to different boundary conditions[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1999, 227(4 : 749– 768).
- [19] Soldatos K P, Messina A. Vibration studies of cross– ply laminated shear deformable circular cylinders on the basis of orthogonal polynomials[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, 218(2 : 219– 243).
- [20] Wang C M, Swaddiwudhipong S, Tian J. Ritz method for vibration analysis of cylindrical shells with ring stiffeners[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1997, 123(2 : 134– 142).
- [21] Naeem M N, Sharma C B. Prediction of natural frequencies for thin circular cylindrical shells[J]. *Proc IMechE Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 2000, (10 : 1313– 1328).
- [22] Chung H. Free vibration analysis of circular cylindrical shells[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1981, 74(3 : 331– 350).
- [23] Goncalves P B, Ramos N R S S. Numerical method for vibration analysis of cylindrical shells[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1997, 123(6 : 544– 550).

V i b r a t i o n s o f F G M T h i n C y l i n d r i c a l S h e l l s W i t h
E x p o n e n t i a l V o l u m e F r a c t i o n L a w

Abdul Ghafar Shah¹, Tahir Mahmood¹, Muhammad Nawaz Naeem²

(1. Department of Mathematics, the Islamia University of Bahawalpur, Pakistan ;

2. Department of Mathematics, Government College University, Faisalabad, Pakistan

Abstract: The influence of an exponential volume fraction law on the vibration frequencies of thin functionally graded cylindrical shells was studied. Material properties in the shell thickness direction were graded in accordance with the exponential law. Expressions for the strain– displacement and curvature– displacement relationships were taken from Love's thin shell theory. The Rayleigh– Ritz approach was used to derive the shell eigenfrequency equation. Axial modal dependence is assumed in the characteristic beam functions. Natural frequencies of the shells are observed to be dependent on the constituent volume fractions. The results are compared with those available in the literature for the validity of the present methodology.

Key words: exponential volume fraction law; functionally graded materials (FGM); cylindrical shells; vibrations; the Rayleigh– Ritz approach