文章编号: 1000- 0887(2009)05- 0598- 09

各向异性静态电磁场的本征理论*

郭少华[1,2]

(1. 浙江科技学院 建筑工程学院, 杭州 310023;
2. 中南大学 土木建筑学院, 长沙 410075)

(郭兴明推荐)

摘要: 在物理表象的规范空间下研究了静电磁场方程, 推导出了一阶模态形式的各向异性介质静电磁场的基本求解方程, 从而得到了如下的理论结论: 各向同性介质电或磁场为标量场; 各向异性介质电或磁场则为失量场, 其大小和方向与介质的异性子空间有关. 以电各向异性介质为例, 具体讨论了各向异性电场的规律.

关 键 词: 各向异性介质; 电磁场; 规范空间; 模态方程
中图分类号: O441.4 文献标识码: A
DOI: 10.3879/j.issn.1000- 0887.2009.05.010

引 言

由 Maxwell 电磁场方程可知, 在静态情况下, 电场和磁场是独立存在的. 经典静态电磁场理论认为: 在静态场的情况下, 电场可以用一个标量电位来描述, 磁场可以用一个矢量磁位来描述, 在无源的区域中, 磁场也可以用一个标量磁位来描述[1-2]. 经典静态电磁场理论的这些结论都是在各向同性条件下得到的, 也只适用于各向同性介质. 但是随着材料科学的不断发展, 越来越多具有各向异性性质的电或磁介质材料应用在电子、通讯、传感等领域, 即使是传统的地质结构也具有明显的各向异性介质. 但是对各向异性介质, 静态电磁场理论不仅没有类似各向同性的结果, 而且电场函数和磁场函数形式也没有明确的结论, 这使得在求解各向异性的电或磁场时出现了很大的理论上的困难[3-5]. 与经典静态电磁场理论在几何表象下研究 Maxwell 电磁场方程不同, 本文则试图在介质的物理表象下[6-8]重新研究 Maxwell 电磁场方程, 并因此得到了模态形式的各向异性的电或磁场方程, 它较好地解决了各向异性静态电磁场函数的存在形态, 并由此揭示了各向异性静态电磁场的规律.

1 电磁介质规范空间

在各向异性电磁介质中, 介电常数和磁导率已不再是标量, 而成为张量. 其本构关系为

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \cdot \boldsymbol{E}, \tag{1}$$

* 收稿日期: 2008- 11-02; 修订日期: 2009-03-27
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50778179)
作者简介: 郭少华(1960—), 西安人, 博士, 教授, 博士生导师(Tel: + 86 - 731 - 8877751; E- mail: gsh606@yahoo.com.cn).

$$\boldsymbol{B} = \mu \cdot \boldsymbol{H}, \tag{2}$$

这里, 介电常数和磁导率矩阵通常为对称矩阵, 其元素与参考坐标的选择关系密切. 如果参考坐标选择在介质的各向异性主轴上, 则介电常数和磁导率矩阵的非对角线元素均为 0. 因此我们称方程(1)、(2)为几何表象下的本构方程. 现在, 我们设法排除几何因素的干扰, 试图在物理表象下, 给出与坐标无关的各向异性电磁介质本构方程. 为此, 我们求如下的两个矩阵本征值问题.

$$(\varepsilon - \lambda_i \boldsymbol{I})\phi_i = \boldsymbol{0}, \quad (\mu - \gamma_i \boldsymbol{I})\varphi_i = \boldsymbol{0},$$

这里, $\lambda_i\ (i = 1, 2, 3)$ 和 $\gamma_i\ (i = 1, 2, 3)$ 分别称为本征介电常数和本征磁导率, 它们是与几何坐标无关的常数. $\phi_i\ (i = 1, 2, 3)$ 和 $\varphi_i\ (i = 1, 2, 3)$ 分别是本征电矢量与本征磁矢量, 分别反映了电磁介质各向异性电主方向和磁主方向, 与坐标选择有关, 称为规范空间. 这样, 介电常数矩阵和磁导率矩阵可以谱分解为

$$\varepsilon = \Phi \Lambda \Phi^{\mathrm{T}}, \tag{3}$$

$$\mu = \Psi \Pi \Psi^{\mathrm{T}}, \tag{4}$$

这里, $\Lambda = \operatorname{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]$, $\Pi = \operatorname{diag}[\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3]$ 称为本征介电常数矩阵和本征磁导率矩阵; $\Phi = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$, $\Psi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ 称为电介质模态矩阵和磁介质模态矩阵, 分别是正交正定阵, 满足 $\Phi^{\mathrm{T}}\Phi = \boldsymbol{I}$, $\Psi^{\mathrm{T}}\Psi = \boldsymbol{I}$.

现将几何表象的电场强度矢 $\boldsymbol{E}$、磁场强度矢 $\boldsymbol{H}$、磁通量密度矢 $\boldsymbol{B}$ 和电位移矢 $\boldsymbol{D}$ 等电磁物理量投影到物理表象的规范空间, 得到

$$D_i^* = \phi_i^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{D}, \quad i = 1, 2, 3; \quad E_i^* = \phi_i^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{E}, \quad i = 1, 2, 3; \tag{5}$$

$$B_i^* = \varphi_i^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{B}, \quad i = 1, 2, 3; \quad H_i^* = \varphi_i^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{H}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{6}$$

这就是在规范空间中看到的标量电磁物理量.

将方程(5)、(6)分别代入方程(1)、(2), 再利用式(3)、(4), 有

$$D_i^* = \lambda_i E_i^*, \quad i = 1, 2, 3, \tag{7}$$

$$B_i^* = \gamma_i H_i^*, \quad i = 1, 2, 3. \tag{8}$$

这就是模态形式的标量电磁介质本构方程.

2　静电场方程的矩阵形式

经典形式的无源、静态 Maxwell 电磁场方程是

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0, \tag{9}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = 0, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0. \tag{10}$$

由此可见, 在静态情况下, 电场和磁场是独立存在的, 而且方程形式也完全一样. 因此, 研究电场和研究磁场没有区别. 为此, 我们仅考虑电场问题.

将电场方程(9)分别写成矩阵形式, 我们有

$$\begin{bmatrix} 0 & -\partial_z & \partial_y \\ \partial_z & 0 & -\partial_x \\ -\partial_y & \partial_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} = 0 \tag{11}$$

或

$$\Delta \boldsymbol{E} = 0,$$

$$\begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = 0 \tag{12}$$

或 $\nabla \boldsymbol{D} = 0,$

这里, Δ 和 ∇ 分别是电强度算子矩阵和电位移算子矩阵, 为一阶微分算子矩阵.

3 模态静电场方程

假定电场列矢和电位移列矢可以用一个未知的列矢量通过电强度算子矩阵和电位移算子矩阵的一阶微分形式表示, 则有

$$\boldsymbol{E} = \nabla \chi, \quad \boldsymbol{D} = \Delta \chi,$$

这里, χ 为一个未知的列矢量, 其物理意义为势函数矢量.

将上两式分别代入式(11)、(12), 得到如下的归一化方程

$$\Delta \nabla \chi = 0. \tag{13}$$

为了将方程(13)解耦, 类似式(5)、(6), 将未知势函数矢量写成规范空间模态势函数叠加的形式

$$\chi = \phi_1 \chi_1^* + \phi_2 \chi_2^* + \phi_3 \chi_3^* \tag{14}$$

或 $\chi = \Phi \chi^*$.

将式(14)代入式(13), 并左乘模态矩阵的转置阵, 有

$$\Phi^{\mathrm{T}} \Delta \nabla \Phi \chi^* = 0. \tag{15}$$

同时, 若令

$$\Delta^* = \Delta \Phi, \quad \nabla^* = \nabla \Phi,$$

称 Δ^* 和 ∇^* 分别为模态电强度算子矩阵和模态电位移算子矩阵, 则式(15)可写成

$$\Delta^{*\mathrm{T}} \nabla^* \chi^* = 0 \tag{16}$$

或 $\lambda^* \chi^* = 0,$

这里, $\lambda^* = \Delta^{*\mathrm{T}} \nabla^*$ 称为第二类模态电场算子矩阵, 附录A 证明它是一个对角矩阵. 因此, 方程(16)可以解耦成为如下的标量方程:

$$\lambda_i^* \chi_i^* = 0, \qquad i = 1, 2, 3, \tag{17}$$

这里, $\lambda_i^* = \Delta_i^* \cdot \nabla_i^* (i = 1, 2, 3)$ 又称为第 i 阶模态电场算子, 是一个二阶的微分算子. 其中的 Δ_i^* 是电场强度算子, ∇_i^* 电位移算子, 它们分别是矩阵 Δ^* 和 ∇^* 的第 i 列, 并均为矢量算子. 这样, 本征形式的静电场方程又可以写成

$$\Delta_i^* E_i^* = 0, \qquad i = 1, 2, 3, \tag{18}$$

$$\nabla_i^* D_i^* = 0, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{19}$$

若令

$$E_i^* = \nabla_i^* \chi_i^*, \qquad i = 1, 2, 3, \tag{20}$$

$$D_i^* = \Delta_i^* \chi_i^*, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{21}$$

利用方程(18) ~ (21)同样可以得到方程(17). 模态矢势函数的物理意义为标量电位矢, 又称为静电位矢. 电位差通常又称为电压矢. 一旦从方程(17)中求得模态势函数, 则电场和电位移场可以通过下面的式子转换得到

$$\boldsymbol{E} = ⋰^{*} \chi^{*} = ⋰_1^{*} \chi_1^{*} + ⋰_2^{*} \chi_2^{*} + ⋰_3^{*} \chi_3^{*}, \tag{22}$$

$$\boldsymbol{D} = \Delta^{*} \chi^{*} = \Lambda ⋰^{*} \chi^{*} = \lambda_1 ⋰_1^{*} \chi_1^{*} + \lambda_2 ⋰_2^{*} \chi_2^{*} + \lambda_3 ⋰_3^{*} \chi_3^{*}. \tag{23}$$

4　模态边界条件

从上节可知,求电场和电位移场最终归结为求模态势函数. 因此模态方程(17)必须要有相应的模态边界条件.

情况1　界面两侧电位矢相等

$$\chi^{(1)} = \chi^{(2)} \tag{24}$$

或
$$\chi_i^{(1)} = \chi_i^{(2)}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

若写成模态形式,则方程(24)成为

$$\Phi^{(1)} \chi^{(1)*} = \Phi^{(2)} \chi^{(2)*} \tag{25}$$

或
$$\phi_i^{(1)} \chi_i^{(1)} = \phi_i^{(2)} \chi_i^{(2)}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

情况2　界面两侧电位移矢相等

$$\boldsymbol{D}^{(1)} = \boldsymbol{D}^{(2)} \tag{26}$$

或
$$D_i^{(1)} = D_i^{(2)}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

若写成模态形式,则方程(26)成为

$$\Delta^{(1)*} \chi^{(1)*} = \Delta^{(2)*} \chi^{(2)*} \tag{27}$$

或
$$\Delta_i^{(1)*} \chi_i^{(1)*} = \Delta_i^{(2)*} \chi_i^{(2)*}, \qquad i = 1, 2, 3$$

或
$$\lambda_i^{(1)} ⋰_i^{(1)*} \chi_i^{(1)*} = \lambda_i^{(2)} ⋰_i^{(2)*} \chi_i^{(2)*}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

5　应　　用

以电各向异性介质为例, 讨论静态电场的规律.

5.1　各向同性晶体

电各向同性的介电常数矩阵是

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{11} \end{bmatrix},$$

它的本征值与本征矢分别是

$$\Lambda = \operatorname{diag}[\varepsilon_{11}, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{11}], \quad \Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

由此可见,各向同性晶体只有1个三重简并的空间,其空间结构是

$$\boldsymbol{W} = W_1^{(3)}[\phi_1, \phi_2, \phi_3]. \tag{28}$$

一维的三重简并空间的基矢是

$$\phi_1^{*} = \frac{\sqrt{3}}{3}[1, 1, 1]^{\mathrm{T}}.$$

根据模态电场算子公式计算得

$$\overline{X}_1^{*} = \frac{2}{3}\left[-(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) + \partial_{xy} + \partial_{xz} + \partial_{yz}\right].$$

因此,各向同性晶体的静电场方程只有 1 个,就是

$$\left[(\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2)-\partial_{xy}-\partial_{xz}-\partial_{yz}\right]\chi_1^*=0. \tag{29}$$

在适当的坐标变换下,方程(29)可以写成标准式. 于是,电场强度和电位移场是

$$\boldsymbol{E}=-\begin{bmatrix}\partial_x&0&0\\0&\partial_y&0\\0&0&\partial_z\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix}\chi_1^*=-\begin{Bmatrix}\partial_x\\\partial_y\\\partial_z\end{Bmatrix}\chi_1^*, \tag{30}$$

$$\boldsymbol{D}=-\varepsilon_{11}\begin{bmatrix}\partial_x&0&0\\0&\partial_y&0\\0&0&\partial_z\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix}\chi_1^*=-\varepsilon_{11}\begin{Bmatrix}\partial_x\\\partial_y\\\partial_z\end{Bmatrix}\chi_1^*. \tag{31}$$

由此可见,方程(30)、(31)与经典静电场的结果是相同的,电位是一个标量.

5.2 单轴晶体

电单轴晶体的介电常数矩阵是

$$\varepsilon=\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}&0&0\\0&\varepsilon_{11}&0\\0&0&\varepsilon_{33}\end{bmatrix},$$

它的本征值与本征矢分别是

$$\Lambda=\mathrm{diag}[\varepsilon_{11},\ \varepsilon_{11},\ \varepsilon_{33}],\quad \Phi=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

由此可见,单轴晶体有 2 个子空间,其中 1 个是二重简并的空间,其空间结构是

$$\boldsymbol{W}=W_1^{(2)}[\phi_1,\phi_2]\oplus W_2^{(1)}[\phi_3]. \tag{32}$$

2 个子空间的基矢分别是

$$\phi_1^*=\frac{\sqrt{2}}{2}\{1,1,0\}^{\mathrm{T}},\quad \phi_2^*=\{0,0,1\}^{\mathrm{T}}.$$

2 个子空间的模态电场强分别是

$$E_2^*=\phi_2^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{E}=E_3,\quad \phi_1^{\mathrm{T}}E_1^*=\boldsymbol{E}-\phi_2^{\mathrm{T}}E_2^*.$$

上式两边求标积,利用 $\phi_2^{\mathrm{T}}\cdot\phi_1=0$, $\phi_i^{\mathrm{T}}\cdot\phi_i=1(i=1,2)$ 的性质得

$$|E_1^*|=\sqrt{(\boldsymbol{E}-\phi_2^{\mathrm{T}}E_2^*)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}-\phi_2^{\mathrm{T}}E_2^*)}=\sqrt{E_1^2+E_2^2}.$$

2 个子空间的模态电场算子分别是

$$\bar{\lambda}_1^*=-(\partial_x^2+\partial_y^2+2\partial_z^2-2\partial_{xy}^2),\quad \bar{\lambda}_2^*=-(\partial_x^2+\partial_y^2).$$

因此,单轴晶体静电场方程成为

$$(\partial_x^2+\partial_y^2+2\partial_z^2-2\partial_{xy}^2)\chi_1^*=0, \tag{33}$$

$$(\partial_x^2+\partial_y^2)\chi_2^*=0. \tag{34}$$

由此可见,单轴晶体有 2 种静电场. 于是,电场强度和电位移场分别是

$$\boldsymbol{E}=-\begin{bmatrix}\partial_x&0&0\\0&\partial_y&0\\0&0&\partial_z\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\chi_1^*\\\chi_1^*\\\chi_2^*\end{Bmatrix}=-\begin{Bmatrix}\partial_x\chi_1^*\\\partial_y\chi_1^*\\\partial_z\chi_2^*\end{Bmatrix}, \tag{35}$$

$$\boldsymbol{D}=-\varepsilon_{11}\begin{bmatrix}\partial_x & 0 & 0\\ 0 & \partial_y & 0\\ 0 & 0 & \partial_z\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\chi_1^*\\ \chi_1^*\\ \chi_2^*\end{Bmatrix}=-\varepsilon_{11}\begin{Bmatrix}\partial_x\chi_1^*\\ \partial_y\chi_1^*\\ \partial_z\chi_2^*\end{Bmatrix}. \tag{36}$$

由此可见, 单轴晶体的静电场不同于经典结论, 有 2 个模态电位, 电位是矢量.

5.3　双轴晶体

电双轴晶体的介电常数矩阵是

$$\varepsilon=\begin{bmatrix}\varepsilon_{11} & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_{22} & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}\end{bmatrix},$$

它的本征值与本征矢分别是

$$\Lambda=\mathrm{diag}[\varepsilon_{11},\varepsilon_{22},\varepsilon_{33}],\quad \Phi=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

由此可见, 双轴晶体有 3 个子空间, 其空间结构是

$$\boldsymbol{W}=W_1^{(1)}[\phi_1]\oplus W_2^{(1)}[\phi_2]\oplus W_3^{(1)}[\phi_3]. \tag{37}$$

双轴晶体的模态电场强和模态电场算子分别是

$$E_1^*=\phi_1^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{E}=E_1,\quad E_2^*=\phi_2^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{E}=E_2,\quad E_3^*=\phi_3^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{E}=E_3;$$

$$\bar{\lambda}_1^*=-(\partial_z^2+\partial_y^2),\quad \bar{\lambda}_2^*=-(\partial_x^2+\partial_z^2),\quad \bar{\lambda}_3^*=-(\partial_x^2+\partial_y^2).$$

因此, 双轴晶体静电场方程成为

$$(\partial_z^2+\partial_y^2)\chi_1^*=0, \tag{38}$$

$$(\partial_x^2+\partial_z^2)\chi_2^*=0, \tag{39}$$

$$(\partial_x^2+\partial_y^2)\chi_3^*=0, \tag{40}$$

由此可见, 双轴晶体有 3 种静电场.　于是, 电场强度和电位移场是

$$\boldsymbol{E}=-\begin{bmatrix}\partial_x & 0 & 0\\ 0 & \partial_y & 0\\ 0 & 0 & \partial_z\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\chi_1^*\\ \chi_2^*\\ \chi_3^*\end{Bmatrix}=-\begin{Bmatrix}\partial_x\chi_1^*\\ \partial_y\chi_2^*\\ \partial_z\chi_3^*\end{Bmatrix}, \tag{41}$$

$$\boldsymbol{D}=-\varepsilon_{11}\begin{bmatrix}\partial_x & 0 & 0\\ 0 & \partial_y & 0\\ 0 & 0 & \partial_z\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\chi_1^*\\ \chi_2^*\\ \chi_3^*\end{Bmatrix}=-\varepsilon_{11}\begin{Bmatrix}\partial_x\chi_1^*\\ \partial_y\chi_2^*\\ \partial_z\chi_3^*\end{Bmatrix}. \tag{42}$$

由此可见, 双轴晶体的静电场也不同于经典结论, 有 3 个模态电位, 电位是矢量.

5.4　单斜晶体

电单斜晶体的介电常数矩阵是

$$\varepsilon=\begin{bmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0\\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_{33}\end{bmatrix},$$

它的本征值与本征矢分别是

$$\Lambda=\mathrm{diag}[\lambda_1,\lambda_2,\varepsilon_{33}],$$

$$\begin{cases}\phi_1=\dfrac{\varepsilon_{12}}{\sqrt{(\lambda_1-\varepsilon_{11})^2+\varepsilon_{12}^2}}\left[\dfrac{\lambda_1-\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{12}},1,0\right]^{\mathrm{T}},\\ \phi_2=\dfrac{\varepsilon_{12}}{\sqrt{(\lambda_2-\varepsilon_{11})^2+\varepsilon_{12}^2}}\left[1,\dfrac{\lambda_2-\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{12}},0\right]^{\mathrm{T}},\\ \phi_3=[0,0,1]^{\mathrm{T}},\end{cases}$$

其中

$$\lambda_{1,2}=\frac{(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})}{2}\pm\sqrt{\left[\frac{1}{2}(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22})\right]^2+\varepsilon_{12}^2},\quad \lambda_3=\varepsilon_{33}.$$

由此可见, 单斜晶体也有 3 个子空间, 其空间结构是

$$\boldsymbol{W}=W_1^{(1)}[\phi_1]\oplus W_2^{(1)}[\phi_2]\oplus W_3^{(1)}[\phi_3].\tag{43}$$

单斜晶体的模态电场强和模态电场算子分别是

$$E_1^*=\phi_1^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{E}=\frac{1}{\sqrt{(\lambda_1-\varepsilon_{11})^2+\varepsilon_{12}^2}}[(\lambda_1-\varepsilon_{11})E_1+\varepsilon_{12}E_2],$$

$$E_2^*=\phi_2^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{E}=\frac{1}{\sqrt{(\lambda_2-\varepsilon_{11})^2+\varepsilon_{12}^2}}[\varepsilon_{12}E_1+(\lambda_2-\varepsilon_{11})E_2],$$

$$E_3^*=\phi_3^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{E}=E_3,$$

$$\bar{\chi}_1^*=-\frac{\varepsilon_{12}^2}{(\lambda_1-\varepsilon_{11})^2+\varepsilon_{12}^2}\left[\left(\frac{\lambda_1-\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{12}}\right)^2(\partial_z^2+\partial_y^2)+(\partial_x^2+\partial_z^2)-2\left(\frac{\lambda_1-\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{12}}\right)\partial_{xy}^2\right],$$

$$\bar{\chi}_2^*=-\frac{\varepsilon_{12}^2}{(\lambda_2-\varepsilon_{11})^2+\varepsilon_{12}^2}\left[\left(\frac{\lambda_2-\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{12}}\right)^2(\partial_x^2+\partial_z^2)+(\partial_z^2+\partial_y^2)-2\left(\frac{\lambda_2-\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{12}}\right)\partial_{xy}^2\right],$$

$$\bar{\chi}_3^*=-(\partial_x^2+\partial_y^2).$$

因此, 单斜晶体静电场方程成为

$$\bar{\chi}_1^*\chi_1^*=0,\tag{44}$$

$$\bar{\chi}_2^*\chi_2^*=0,\tag{45}$$

$$(\partial_x^2+\partial_y^2)\chi_3^*=0.\tag{46}$$

由此可见, 单斜晶体也有 3 种静电场. 与双轴晶体不同的是, 这 3 种静电场的形状发生了畸变. 于是, 电场强度和电位移场是

$$\boldsymbol{E}=-\begin{bmatrix}a_1\partial_x & \partial_x & 0\\ \partial_y & a_2\partial_y & 0\\ 0 & 0 & \partial_z\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\chi_1^*\\ \chi_2^*\\ \chi_3^*\end{Bmatrix}=-\begin{Bmatrix}\partial_x(a_1\chi_1^*+\chi_2^*)\\ \partial_y(\chi_1^*+a_2\chi_2^*)\\ \partial_z\chi_3^*\end{Bmatrix},\tag{47}$$

$$\boldsymbol{D}=-\varepsilon_{11}\begin{bmatrix}a_1\partial_x & \partial_x & 0\\ \partial_y & a_2\partial_y & 0\\ 0 & 0 & \partial_z\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\chi_1^*\\ \chi_2^*\\ \chi_3^*\end{Bmatrix}=-\varepsilon_{11}\begin{Bmatrix}\partial_x(a_1\chi_1^*+\chi_2^*)\\ \partial_y(\chi_1^*+a_2\chi_2^*)\\ \partial_z\chi_3^*\end{Bmatrix}.\tag{48}$$

由此可见, 单斜晶体的静电场也不同于经典结论, 有 3 个模态电位, 电位是矢量.

6 结　　论

本文以材料物理表象的新视角研究了一般各向异性静电场理论, 得到了一些新的概念和结论. 例如: 各向同性介质中, 电压为标量; 而各向异性介质中, 电压则为矢量. 即, 在各向同

性晶体中, 只有 1 个电位函数; 在单轴晶体中, 有 2 个电位函数; 在双轴晶体中, 则有 3 个电位函数; 在单斜晶体中, 有 3 个畸形的电位函数. 这些结论还有待于实验的进一步验证.

附录 A　电磁算子的等效性证明

利用式(5)、(6), 式(11) 和(12) 可以写成

$$\Delta\Phi\boldsymbol{E}^{*} = 0, \tag{A1}$$

$$⋰\Phi\boldsymbol{D}^{*} = 0. \tag{A2}$$

再利用模态本构关系(7), 式(A2) 成为

$$⋰\Phi\Lambda\boldsymbol{E}^{*} = 0. \tag{A3}$$

比较式(A1) 与式(A3) 得

$$⋰\Phi\Lambda = \Delta\Phi. \tag{A4}$$

上式两边同乘电强度算子矩阵, 再左乘模态矩阵的转置阵有

$$\Phi^{\mathrm{T}}\Delta⋰\Phi\Lambda = \Phi^{\mathrm{T}}\Delta\Delta\Phi. \tag{A5}$$

作者证明, 上式右端项为一对角阵[8], 即

$$\Phi^{\mathrm{T}}\Delta\Delta\Phi = \not\supseteq^{*}, \tag{A6}$$

这里 $\not\supseteq^{*}$ 为第一类模态电场算子矩阵. 比较式(A5) 与(A6), 则有

$$\Phi^{\mathrm{T}}\Delta⋰\Phi = \not\supseteq^{*}\Lambda^{-1} = \bar{\chi}^{*}, \tag{A7}$$

这里 $\bar{\chi}^{*}$ 为第二类模态电场算子矩阵. 其中一、二类模态电场算子矩阵满足下面的关系:

$$\not\supseteq_{i}^{*} = \lambda_{i}\bar{\chi}_{i}^{*}, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{A8}$$

又式(A4) 两边同乘电位移算子矩阵, 再左乘模态矩阵的转置阵有

$$\Phi^{\mathrm{T}}⋰⋰\Phi\Lambda = \Phi^{\mathrm{T}}⋰\Delta\Phi.$$

由式(A7), 可得

$$\Phi^{\mathrm{T}}⋰⋰\Phi = \bar{\chi}^{*}\Lambda^{-1} = \not\supseteq^{*}\Lambda^{-2} = \square^{*}, \tag{A9}$$

这里 $\square^{*}$ 为第三类模态电场算子矩阵. 其中二、三类模态电场算子矩阵满足下面的关系:

$$\square_{i}^{*} = \lambda_{i}\not\supseteq_{i}^{*} = \lambda_{i}^{2}\bar{\chi}_{i}^{*}, \qquad i = 1, 2, 3, \tag{A10}$$

这里 $\square_{i}^{*} = ⋰_{i}^{*}\cdot⋰_{i}^{*}$.

附录 B　电磁算子的物理意义

在电磁场中, 电磁场的能量密度等于电场的能量密度与磁场的能量密度之和, 即

$$W = \frac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} + \frac{1}{2}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}. \tag{B1}$$

将式(5)、(6) 代入上式, 有

$$W = \frac{1}{2}\boldsymbol{E}^{*}\Phi^{\mathrm{T}}\Phi\boldsymbol{D}^{*} + \frac{1}{2}\boldsymbol{H}^{*}\Phi^{\mathrm{T}}\Phi\boldsymbol{B}^{*}.$$

再利用模态矩阵的正交性有

$$W = \frac{1}{2}E_{i}^{*}D_{i}^{*} + \frac{1}{2}H_{i}^{*}B_{i}^{*}. \tag{B2}$$

将上式用相应的算子表示, 则有

$$\hat{W} = \frac{1}{2}\Delta_{i}^{*\mathrm{T}}\cdot⋰_{i}^{*} + \frac{1}{2}\Delta_{i}^{*\mathrm{T}}\cdot⋰_{i}^{*} \tag{B3}$$

由式(A7), 得

$$\hat{W} = \bar{\chi}_{ii}^{*}, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{B4}$$

由此可知: 模态电场算子矩阵具有能量的物理意义.

[参 考 文 献]

[1] Kong J A. Theory of Electromagnetic Waves [M]. New York: Wiley- Interscience, 1975.

[2] Frankl D R. Electromagnetic Theory [M]. New Jersey: Prentice- Hill, 1986.

[3] Zuniga M, Kong J A. Modified radiative transfer theory for a two- layer random medium[J]. J Appl Phys, 1980, **51**(5228): 5228- 5244.

[4] Tamoikin V V. The average field in a medium having strong anisotropic inhomogeneities[J]. Raddiophysics Quantum Electron, 1971, **14**(2): 228- 233.

[5] Chari K V M, Silvester P P. Finite Elements in Electric and Magnetic Field Problems [M]. New York: John Wiley & Sons, 1980.

[6] 郭少华. 基于 Kelvin- Voigt 模型的粘弹性波动力学的本征化理论[J]. 应用数学和力学, 2005, **25**(7): 723- 728.

[7] Guo S H. An eigen theory of rheology for complex media[J]. Acta Mechanica, 2008, **198**(3/4): 253- 260.

[8] Guo S H. An Eigen theory of electromagnetic waves based on the standard spaces[J]. Int J Eng Sci, 2009, **47**(3): 405- 412.

Eigen Theory of Static Electromagnetic Field for Anisotropic Media

GUO Shao- hua[1,2]

(1. School of Civil Engineering and Architecture, Zhejiang University of Science &Technology, Hangzhou 310023, P. R. China;

2. School of Civil Engineering and Architecture, Central South University, Changsha 410075, P. R. China)

Abstract: The static electromagnetic fields were studied here based on the standard spaces of the physical presentation, and the modal equations of static electromagnetic fields for anisotropic media were deduced. By introducing a set of new potential functions of order 1, several novel theoretical results are obtained: the electric or magnetic potentials are scalar for isotropic media, and vector for anisotropic media. The amplitude and direction of the vector potentials are related to the anisotropic subspaces. Based on these results, the laws of static electromagnetic fields for anisotropic media are discussed.

Key words: anisotropic media; static electromagnetic field; standard spaces; modal equation