

# 对论文“任意精度的三点紧致显格式及其在 CFD 中的应用”的评论\*

张红娜<sup>1,2</sup>, 宇波<sup>1</sup>, 王艺<sup>1</sup>, 魏进家<sup>3</sup>, 李凤臣<sup>2</sup>

- (1. 中国石油大学 石油天然气工程学院, 城市油气输配技术北京市重点实验室, 北京 102249;
2. 哈尔滨工业大学 能源科学与工程学院, 哈尔滨 150001;
3. 西安交通大学 能源与动力工程学院, 西安 710049)

(周哲玮推荐)

**摘要:** 证明了林建国等(林建国, 谢志华, 周俊陶. 任意精度的三点紧致显格式及其在 CFD 中的应用. 应用数学和力学, 2007, 28(7): 843-852)提出的紧致显格式与传统的差分格式实质相同, 是传统差分格式的另一表达形式, 并不具有紧致格式的优点. 尽管如此, 但这种表达形式更紧凑, 推导获得高精度的差分表达式相对于传统的 Taylor 展开求待定系数的方法也更加简单.

**关键词:** 显式紧致; 传统差分; 中心格式; 迎风格式

**中图分类号:** TK01      **文献标识码:** A

**DOI:** 10.3879/j.issn.1000-0887.2009.05.013

## 引 言

隐式紧致格式在湍流的数值计算中得到了广泛的应用, 为了避免隐式紧致格式联立代数方程组求解, 林建国等<sup>[1]</sup>利用逐阶迭代的思想, 通过构造差商系数, 提出了一种关于三点的任意精度“显式紧致”格式, 以提高计算效率. 传统的差分格式是通过构造节点函数值的系数确定最终的表达式, 但从形式上看, 这种显式格式的表达式简单, 易于编程. 然而在展开表达式中的差商算子后, 发现这种格式与传统的差分格式一致, 只是表达方式不同, 并且在顶盖驱动流算例中, 分别采用这种格式与同精度的传统差分格式编程计算, 得到的结果完全一致. 因此得出结论, 这种“显式紧致”格式实质是传统的差分高精度格式的另一种表达形式. 尽管与传统差分格式实质相同, 但这种格式更容易得到高精度的表达式, 利用传统方法得到高精度表达形式的推导过程非常繁琐, 而采用这种方法, 提高精度时只需增添表达式中的某一项, 易于扩展. 此外, 采用高精度差分格式时, 这种“显式紧致”形式更适合于编程.

本文中, 首先给出文献[1]中得到的“显式紧致”格式, 接下来通过理论推导证明这种格式与传统的差分格式实质相同, 并且在顶盖驱动流算例中, 通过比较说明采用这种格式与传统差分格式得到的计算结果一致.

\* 收稿日期: 2008-09-23; 修订日期: 2009-03-23

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50876114; 10602043); 国家教育部留学回国人员科研启动金资助项目; “跨世纪优秀人才培养计划”基金和教育部科学技术研究重点项目(106142)

作者简介: 张红娜(1987-), 女, 河南许昌人, 硕士生(联系人, E-mail: lalal2587@yahoo.com.cn).

## 1 均分网格下空间导数三点“显式紧致”格式

下面给出文献[1]中得到的二阶导数和一阶导数的表达式. 首先定义均分网格上算子和差商:

$$\delta_x f_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2}, \quad |\delta_x|^k f_i = \frac{|\delta_x|^{k-1} f_{i+1} - |\delta_x|^{k-1} f_{i-1}}{2},$$

$$\delta_x^+ f_i = f_{i+1} - f_i, \quad |\delta_x^+|^k f_i = |\delta_x^+|^{k-1} f_{i+1} - |\delta_x^+|^{k-1} f_i,$$

$$\delta_{xx}^1 f_i = f_{i+1} + f_{i-1} - 2f_i, \quad \delta_{xx}^k f_i = |\delta_{xx}^1|^k f_i = \delta_{xx}^{k-1} f_{i+1} + \delta_{xx}^{k-1} f_{i-1} - 2\delta_{xx}^{k-1} f_i,$$

其中  $f_i$  为  $i$  点的函数值,  $k \geq 2$ ,  $\Delta x$  为空间网格步长. 两竖线“| |”表示算子, 上标表示用该算子进行运算的次数. 利用逐阶迭代以及忽略高阶小量的方法, 最终可以得到二阶导数中心差分表达式如下:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i = \frac{1}{\Delta x^2} |\delta_{xx}^1 - \sum_{k=2}^n A_k \delta_{xx}^k| f_i + o(\Delta x^{2n}). \quad (1)$$

其中文献[1]中系数的求解过程如下:

由于

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i = \frac{1}{\Delta x^2} |\delta_{xx}^1 - \sum_{k=2}^n \frac{2}{2k!} \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x}\right)^{2k}| f_i + o(\Delta x^{2n}). \quad (2)$$

假设已知二阶导数  $2(n-1)$  阶精度的中心差分表达式

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i = \frac{1}{\Delta x^2} |\delta_{xx}^1 - \sum_{k=2}^{n-1} A_k \delta_{xx}^k| f_i + o(\Delta x^{2(n-1)}). \quad (3)$$

为了计算  $A_n$ , 将式(1)代入式(2), 可得

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_i = \frac{1}{\Delta x^2} |\delta_{xx}^1 - \sum_{k=2}^n \frac{2}{2k!} \left(|\delta_{xx}^1 - \sum_{k=2}^n A_k \delta_{xx}^k| f_i\right)^k| f_i + o(\Delta x^{2n}). \quad (4)$$

利用多项式展开定理, 忽略高阶小量, 即可得到  $A_n$  的值如下: 当  $n \geq 3$  时,

$$A_n = \sum_{k=2}^n \frac{2}{(2k)!} \sum_{\substack{n_1 \geq 0 \\ n_1 + 2n_2 + \dots + (n-1)n_{n-1} = n \\ n_1 + n_2 + \dots + n_{n-1} = k}} \frac{k!}{n_1! n_2! \dots n_{n-1}!} (-1)^{n_1 + n_2 + \dots + n_{n-1}} \prod_{j=2}^{n-1} (A_j)^{n_j}, \quad (5)$$

最终可以得到,  $A_2 = 1/12, A_3 = -1/90, \dots$  同理  $A_k$  的其它值根据式(5)即可很容易地得到.

一阶导数的中心差分表达式如下:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = \frac{1}{\Delta x} |\delta_x - \sum_{k=2}^n B_k \delta_x (\delta_{xx}^{k-1})| f_i + o(\Delta x^{2n}), \quad (6)$$

式中,  $B_2 = -1/6, B_3 = 1/30, \dots$ , 同理  $B_k$  的其它值采用文献[1]中的推导方式也可很容易地得到.

一阶导数向前差分如下:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = \frac{1}{\Delta x} |\delta_x^+ - \sum_{k=2}^n C_k (\delta_x^+)^{k-2\lceil k/2 \rceil} (\delta_{xx}^{k/2})| f_i + o(\Delta x^n), \quad (7)$$

式中,  $\lceil \cdot \rceil$  为取整符号,  $C_2 = -1/2, C_3 = -1/6, C_4 = 1/12, C_5 = 1/30, \dots$ . 同理  $C_k$  的其它值采用文献[1]中的推导方式也很容易得到.

一阶导数完全向前单侧差分格式表达式如下:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = \frac{1}{\Delta x} \left| \delta_x^+ - \sum_{k=2}^n D_k (\delta_x^+)^k \right| f_i + o(\Delta x^n), \tag{8}$$

式中,  $D_2 = -1/2, D_3 = 1/3, \dots$ , 同理  $D_k$  的其它值采用文献[1]中的推导方式也很容易得到.

由于一阶导数向后差分与向前差分的表达方式与上类似, 在此不再列出.

## 2 在均分网格下“显式紧致”格式与传统差分格式的比较

传统差分格式得到某点高精度二阶导数和一阶导数表达式的方法是首先确定达到要求精度应采用的节点, 得出该点导数含待定系数的表达式, 接下来利用 Taylor 展开法<sup>[2]</sup> 联立方程组求解待定系数. 欲得到  $i$  点  $2n$  阶精度的一阶导数和二阶导数表达式, 以中心差分格式为例, 求解过程如下:

为了使一阶导数和二阶导数满足  $2n$  阶精度, 需选用  $2n+1$  个节点, 分别是

$$i-n, i-(n-1), \dots, i-1, i, i+1, \dots, i+(n-1), i+n,$$

则有

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_i = \sum_{l=-n}^n \frac{A_l f_{i+l}}{\Delta x}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_i = \sum_{l=-n}^n \frac{B_l f_{i+l}}{\Delta x^2}. \tag{10}$$

将各点的函数值在  $i$  点进行  $2n$  阶 Taylor 展开,

$$f_{i+l} = \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k} \Big|_i (l \cdot \Delta x)^k, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n. \tag{11}$$

将式(11)代入式(9)和(10), 令高阶小量为 0, 可得到的  $2n+1$  个方程, 需要求解的未知数有  $2n+1$  个, 分别联立求解一阶导数和二阶导数的待定系数后, 即可得到其表达式. 为求解待定系数  $\mathbf{A} = (A_{-n}, A_{-n+1}, \dots, A_{n-1}, A_n)^T$  以及  $\mathbf{B} = (B_{-n}, B_{-n+1}, \dots, B_{n-1}, B_n)^T$ , 需求解以下的代数方程组  $\mathbf{MA} = \mathbf{b}_A, \mathbf{MB} = \mathbf{b}_B$ , 可得到系数矩阵为

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2} \prod_{k=3}^{2n} \frac{(\Delta x)^k}{k!} \begin{pmatrix} (-n)^{2n} & \dots & (n-1)^{2n} & (n)^{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-n)^2 & \dots & (n-1)^2 & n^2 \\ (-n) & \dots & (n-1) & n \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

在系数矩阵  $\mathbf{M}$  中, 对于任意两个列向量:

$$\mathbf{y}_k = \begin{pmatrix} (-n+k)^{2n} \\ \vdots \\ (-n+k) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_m = \begin{pmatrix} (-n+m)^{2n} \\ \vdots \\ (-n+m) \\ 1 \end{pmatrix},$$

要满足  $k_1 \mathbf{y}_k + k_2 \mathbf{y}_m = 0$ , 且  $k \neq m$ , 则必存在  $k_1 = 0, k_2 = 0$ , 因此任意的列向量均线性无关, 即系数矩阵为满秩矩阵, 代数方程组存在唯一的解. 因此, 采用 Taylor 展开得到任意精度的表达式是唯一的.

“显式紧致”格式得到的一阶导数和二阶导数的表达式是关于差商的表达形式, 例如, 均分网格下,  $2n$  阶精度二阶导数表示为

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_i = \frac{1}{\Delta x^2} \left| \delta_{xx}^1 - \sum_{k=2}^n A_k \delta_{xx}^k \right| f_i,$$

一阶导数表示为

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{1}{\Delta x} \left| \delta_x - \sum_{k=2}^n B_k \delta_x \delta_{xx}^{k-1} \right| f_i,$$

差商算子  $\delta_{xx}^n f_i$  以及  $\delta_x \delta_{xx}^{n-1} f_i$  展开将会得到关于以下节点的表达式:

$$i-n, i-(n-1), \dots, i-1, i, i+1, \dots, i+(n-1), i+n.$$

展开  $\delta_{xx}^n f_i$  以及  $\delta_x \delta_{xx}^{n-1} f_i$  的证明过程如下: (数学归纳法)

由于  $\delta_{xx}^1 f_i$  展开后得到  $i-1, i, i+1$  节点的表达式,  $\delta_{xx}^1 f_i = f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}$ , 且由于  $\delta_{xx}^{k+1} f_i = \delta_{xx}^k f_{i-1} - 2\delta_{xx}^k f_i + \delta_{xx}^k f_{i+1}$ , 则可得

$$\delta_{xx}^2 f_i = \delta_{xx}^1 f_{i-1} - 2\delta_{xx}^1 f_i + \delta_{xx}^1 f_{i+1} = f_{i-2} - 4f_{i-1} + 4f_{i+1} + f_{i+2}.$$

根据规律假设展开  $\delta_{xx}^k$  得到  $i-k, i-(k-1), \dots, i-1, i, i+1, \dots, i+(k-1), i+k$  点的表达式, 又因  $\delta_{xx}^{k+1} f_i = \delta_{xx}^k f_{i-1} - 2\delta_{xx}^k f_i + \delta_{xx}^k f_{i+1}$ , 其中, 展开  $\delta_{xx}^k f_{i-1}$  得到  $i-1-k, i-1-(k-1), \dots, i-1, i, i+1, \dots, i-1+k$  节点的表达式, 展开  $\delta_{xx}^k f_i$  得到  $i-k, i-(k-1), \dots, i-1, i, i+1, \dots, i+(k-1), i+k$  节点的表达式, 展开  $\delta_{xx}^k f_{i+1}$  得到  $i+1-k, i+1-(k-1), \dots, i-1, i, i+1, \dots, i+k, i+1+k$  节点的表达式, 合并同类项后, 展开  $\delta_{xx}^{k+1} f_i$  可得到  $i-1-k, i-1-(k-1), \dots, i-1, i, i+1, \dots, i+1+k$  节点的表达式, 故展开  $\delta_{xx}^n f_i$  可以得到  $i-n, i-(n-1), \dots, i-1, i, i+1, \dots, i+(n-1), i+n$  节点表达式的结论成立.

由于  $\delta_x f_i = (f_{i+1} - f_{i-1})/2$ , 同理展开  $\delta_x \delta_{xx}^{n-1} f_i$  同样能够得到上述节点值的表达式, 其证明过程这里不再给出.

将差商算子展开后, 即可得到关于节点的表达形式:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \sum_{l=-n}^n \frac{D_l f_{i+l}}{\Delta x}, \tag{12}$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = \sum_{l=-n}^n \frac{C_l f_{i+l}}{\Delta x^2}. \tag{13}$$

表 1 传统差分格式与“显式紧致”格式表达式比较

表达式	传统 Taylor 展开	显式紧致	精度
一阶导数 中心形式	$\frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}$	$\frac{1}{\Delta x} \left  \delta_x \right  f_i$ (a)	2 阶
差分表达式	$\frac{f_{i-2} - 8f_{i-1} + 8f_{i+1} - f_{i+2}}{12\Delta x}$	$\frac{1}{\Delta x} \left  \delta_x - \frac{1}{6} \delta_x (\delta_{xx}^1) \right  f_i$ (b)	4 阶
	$\frac{-f_{i-3} + 9f_{i-2} - 45f_{i-1} + 45f_{i+1} - 9f_{i+2} + f_{i+3}}{60\Delta x}$	$\frac{1}{\Delta x} \left  \delta_x - \frac{1}{6} \delta_x (\delta_{xx}^1) + \frac{1}{30} \delta_x (\delta_{xx}^2) \right  f_i$ (c)	6 阶
一阶导数 向前差分 表达式	$\frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}$	$\frac{1}{\Delta x} \left  \delta_x^+ \right  f_i$ (d)	1 阶
	$\frac{-2f_{i+2} + 12f_{i+1} - 6f_i - 4f_{i-1}}{12\Delta x}$	$\frac{1}{\Delta x} \left  \delta_x^+ - \frac{1}{2} \delta_{xx}^1 - \frac{1}{6} \delta_x (\delta_{xx}^1) \right  f_i$ (e)	3 阶
	$\frac{3f_{i-2} - 30f_{i-1} - 20f_i + 60f_{i+1} - 15f_{i+2} + 2f_{i+3}}{60\Delta x}$	$\frac{1}{\Delta x} \left  \delta_x^+ - \frac{1}{2} \delta_{xx}^1 - \frac{1}{6} \delta_x (\delta_{xx}^1) + \frac{1}{12} \delta_{xx}^2 + \frac{1}{30} \delta_x (\delta_{xx}^2) \right  f_i$ (f)	5 阶
一阶导数 单侧(向前)	$\frac{-f_{i+2} + 4f_{i+1} - 3f_i}{2\Delta x}$	$\frac{1}{\Delta x} \left  \delta_x^+ - \frac{1}{2} (\delta_x^+)^2 \right  f_i$ (g)	2 阶
差分表达式	$\frac{-11f_i + 18f_{i+1} - 9f_{i+2} + 2f_{i+3}}{6\Delta x}$	$\frac{1}{\Delta x} \left  \delta_x^+ - \frac{1}{2} (\delta_x^+)^2 + \frac{1}{3} (\delta_x^+)^3 \right  f_i$ (h)	3 阶
	$\frac{-25f_i + 48f_{i+1} - 36f_{i+2} + 16f_{i+3} - 3f_{i+4}}{12\Delta x}$	$\frac{1}{\Delta x} \left  \delta_x^+ - \frac{1}{2} (\delta_x^+)^2 + \frac{1}{3} (\delta_x^+)^3 - \frac{1}{4} (\delta_x^+)^4 \right  f_i$ (i)	4 阶

可见,“显式紧致”格式展开得到的最终表达式(12)和(13)与传统差分格式(9)和(10)形式

相同. 因为二者在推导的过程中采用的方法均为 Taylor 展开, 不同的地方在于传统的差分格式采取的是联立代数方程组求解待定系数, 而前者采用的是逐阶迭代法, 又由于前面已证明采用 Taylor 展开得到的各阶精度表达式均是唯一的, 故最终所得到的待定系数值必定是相同的, 从而这两种表达形式一致.

以上证明了一阶导数中心差分格式采用“显式紧致”形式与传统差分形式实质相同, 在此基础上很容易推导一阶导数向前差分、向后差分、完全单侧差分以及二阶导数采用上述两种形式实质也相同, 不再给出证明过程.

表 1 列出了均分网格下, 给定精度的一阶导数中心差分格式、向前以及完全单侧差分格式的传统表达形式与“显式紧致”表达形式的比较, 在“显式紧致”表达形式后的标注分别对应该表达式展开差商算子的化简过程, 并且化简后可以得到与传统的差分表达式完全一致的形式.

从表 1 可以看出传统的利用 Taylor 展开联立方程组求解待定系数与“显式紧致”求解方法所得到的结果是一致的, 更高精度以及二阶导数的表达式在此不再赘述, 但均可以得到一致的结果.

注 表 1 中

$$(a) \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_i = \frac{1}{\Delta x} \delta_x f_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x};$$

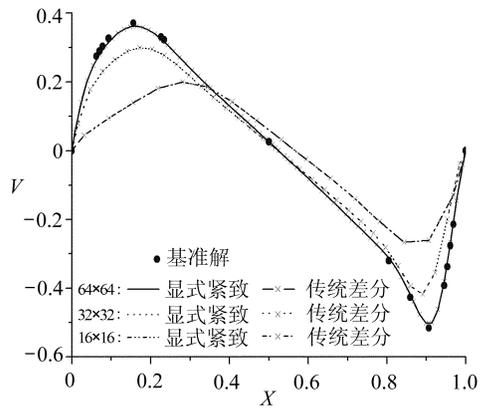
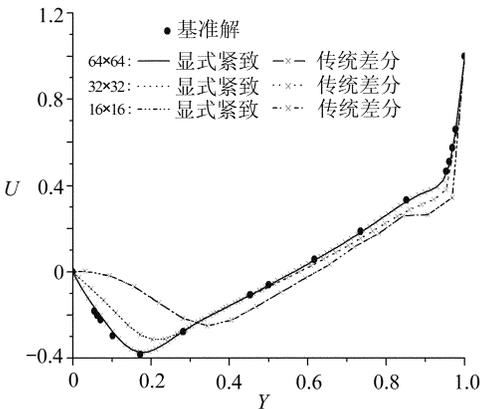
$$(b) \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_i = \frac{1}{\Delta x} \left[ \delta_x - \frac{1}{6} \delta_x (\delta_{xx}^1) \right] f_i = \frac{1}{\Delta x} \left[ \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2} - \frac{1}{6} \delta_x (f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}) \right] = \frac{1}{\Delta x} \left[ \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2} - \frac{1}{6} \left( \frac{f_{i+2} - f_i}{2} - 2 \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2} + \frac{f_i - f_{i-2}}{2} \right) \right] = \frac{f_{i-2} - 8f_{i-1} + 8f_{i+1} - f_{i+2}}{12\Delta x};$$

$$(c) \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_i = \frac{1}{\Delta x} \left[ \delta_x - \frac{1}{6} \delta_x (\delta_{xx}^1) + \frac{1}{30} \delta_x (\delta_{xx}^2) \right] f_i = \frac{1}{\Delta x} \left[ \frac{f_{i-2} - 8f_{i-1} + 8f_{i+1} - f_{i+2}}{12} + \frac{1}{30} \delta_x \delta_{xx} (f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}) \right] = \frac{1}{\Delta x} \left[ \frac{f_{i-2} - 8f_{i-1} + 8f_{i+1} - f_{i+2}}{12} + \frac{1}{30} \delta_x (f_{i+2} - 4f_{i+1} + 6f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}) \right] = \frac{1}{\Delta x} \left[ \frac{f_{i-2} - 8f_{i-1} + 8f_{i+1} - f_{i+2}}{12} + \frac{1}{30} \left( \frac{f_{i+3} - f_{i+1}}{2} - 4 \frac{f_{i+2} - f_i}{2} + 6 \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2} - 4 \frac{f_i - f_{i-2}}{2} + \frac{f_{i-1} - f_{i-3}}{2} \right) \right] = \frac{-f_{i-3} + 9f_{i-2} - 45f_{i-1} + 45f_{i+1} - 9f_{i+2} + f_{i+3}}{60\Delta x};$$

$$(d) \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_i = \frac{1}{\Delta x} \delta_x^* f_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x};$$

$$(e) \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_i = \frac{1}{\Delta x} \left[ \delta_x^* - \frac{1}{2} \delta_{xx}^1 - \frac{1}{6} \delta_x^* (\delta_{xx}^1) \right] f_i = \frac{1}{\Delta x} \left[ f_{i+1} - f_i - \frac{1}{2} (f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}) - \frac{1}{6} \delta_x^* (f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}) \right] = \frac{1}{\Delta x} \left[ f_{i+1} - f_i - \frac{1}{2} (f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}) - \frac{1}{6} (f_{i+2} - 3f_{i+1} + 3f_i - f_{i-1}) \right] =$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2f_{i+2} + 12f_{i+1} - 6f_i - 4f_{i-1}}{12\Delta x}; \\
 \text{(f)} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i &= \frac{1}{\Delta x} \left[ \delta_x^+ - \frac{1}{2} \delta_{xx}^1 - \frac{1}{6} \delta_x^+ (\delta_{xx}^1) + \frac{1}{12} \delta_{xx}^2 + \frac{1}{30} \delta_x^+ (\delta_{xx}^2) \right] f_i = \\
 & -\frac{2f_{i+2} + 12f_{i+1} - 6f_i - 4f_{i-1}}{12\Delta x} + \frac{1}{12\Delta x} (f_{i+2} - 4f_{i+1} + 6f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}) + \\
 & \frac{1}{30\Delta x} \delta_x^+ (f_{i+2} - 4f_{i+1} + 6f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}) = \\
 & -\frac{2f_{i+2} + 12f_{i+1} - 6f_i - 4f_{i-1}}{12\Delta x} + \frac{1}{12\Delta x} (f_{i+2} - 4f_{i+1} + 6f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}) + \\
 & \frac{1}{30\Delta x} (f_{i+3} - 5f_{i+2} + 10f_{i+1} - 10f_i + 5f_{i-1} - f_{i-2}) = \\
 & \frac{3f_{i-2} - 30f_{i-1} - 20f_i + 60f_{i+1} - 15f_{i+2} + 2f_{i+3}}{60\Delta x}; \\
 \text{(g)} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i &= \frac{1}{\Delta x} \left[ \delta_x^+ - \frac{1}{2} (\delta_x^+)^2 \right] f_i = \frac{1}{\Delta x} \left[ f_{i+1} - f_i - \frac{1}{2} \delta_x^+ (f_{i+1} - f_i) \right] = \\
 & \frac{1}{\Delta x} \left[ f_{i+1} - f_i - \frac{1}{2} (f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i) \right] = \frac{-f_{i+2} + 4f_{i+1} - 3f_i}{2\Delta x}; \\
 \text{(h)} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i &= \frac{1}{\Delta x} \left[ \delta_x^+ - \frac{1}{2} (\delta_x^+)^2 + \frac{1}{3} (\delta_x^+)^3 \right] f_i = \\
 & \frac{1}{\Delta x} \left[ \frac{-f_{i+2} + 4f_{i+1} - 3f_i}{2} + \frac{1}{3} \delta_x^+ (f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i) \right] = \\
 & \frac{1}{\Delta x} \left[ \frac{-f_{i+2} + 4f_{i+1} - 3f_i}{2} + \frac{1}{3} (f_{i+3} - 3f_{i+2} + 3f_{i+1} - f_i) \right] = \\
 & -\frac{11f_i + 18f_{i+1} - 9f_{i+2} + 2f_{i+3}}{6\Delta x}; \\
 \text{(i)} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i &= \frac{1}{\Delta x} \left[ \delta_x^+ - \frac{1}{2} (\delta_x^+)^2 + \frac{1}{3} (\delta_x^+)^3 - \frac{1}{4} (\delta_x^+)^4 \right] f_i = \\
 & \frac{1}{\Delta x} \left[ \frac{-11f_i + 18f_{i+1} - 9f_{i+2} + 2f_{i+3}}{6} - \frac{1}{4} \delta_x^+ (f_{i+3} - 3f_{i+2} + 3f_{i+1} - f_i) \right] = \\
 & \frac{1}{\Delta x} \left[ \frac{-11f_i + 18f_{i+1} - 9f_{i+2} + 2f_{i+3}}{6} - \frac{1}{4} (f_{i+4} - 4f_{i+3} + 6f_{i+2} - 4f_{i+1} + f_i) \right] = \\
 & -\frac{25f_i + 48f_{i+1} - 36f_{i+2} + 16f_{i+3} - 3f_{i+4}}{12\Delta x}.
 \end{aligned}$$



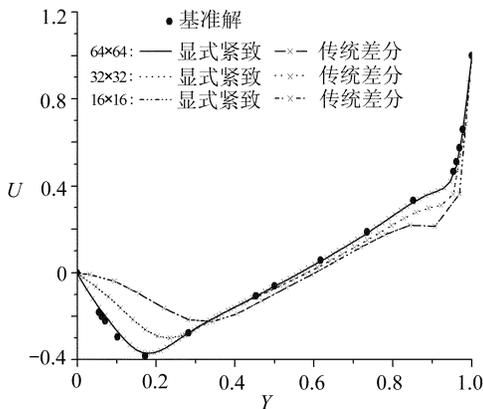
(a)  $x = 0.5$  处的速度  $U$

(b)  $y = 0.5$  处的速度  $V$

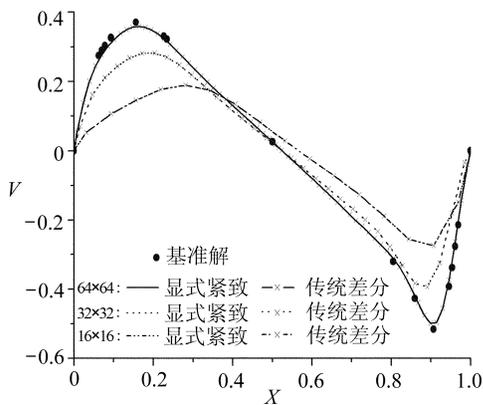
图 1 一阶导数采用四阶中心差分格式

下面再给出将两种形式的差分格式应用于顶盖驱动流算例<sup>[3]</sup> 计算结果的比较. 在算例中扩散项均采用四阶中心差分格式, 边界点均采用二阶中心差分格式. 对一阶导数分别以四阶精度的中心差分格式和三阶精度的迎风差分格式为例, 对每一种格式分别采用“显式紧致”和

传统差分形式进行对比计算, 得到速度、流函数的比较如图 1、图 2 和图 3. 图中  $X, Y$  为  $x, y$  方向的无量纲长度,  $U, V$  为  $x, y$  方向的无量纲速度. 图 1 为一阶导数四阶中心差分格式的上述两种实现形式的对比, 分别在 3 套网格 ( $64 \times 64, 32 \times 32, 16 \times 16$ ) 下进行计算, 结果显示在这 3 套不同疏密的网格下,  $X, Y$  中垂线上速度  $U, V$  分布均重合. 图 2 为一阶导数三阶迎风差分格式的上述两种实现形式的对比, 可得到与图 1 相同的结论. 图 3 表示在  $64 \times 64$  的网格下对于相同精度的格式, 采用“显式紧致”和传统差分表达形式得到的流函数, 图 3(a) 为四阶中心差分格式, 图 3(b) 为三阶迎风差分格式, 且图中实线表示“显式紧致”表达形式, 虚线表示传统差分表达形式. 容易看出, 无论是对于四阶中心差分格式还是三阶迎风差分格式, 两种表达形式得到的结果均完全重合. 综合以上各图可知, 采用“显式紧致”表达形式与传统差分形式实质相同.

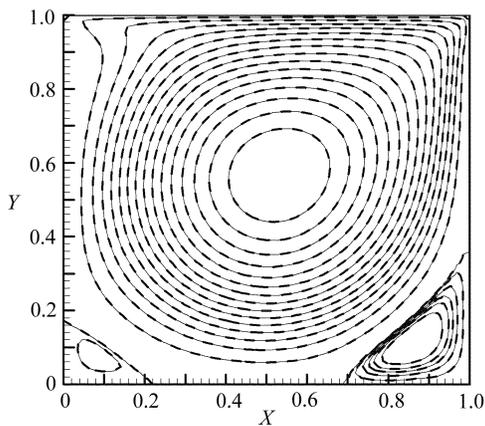


(a)  $x = 0.5$  处的速度  $U$

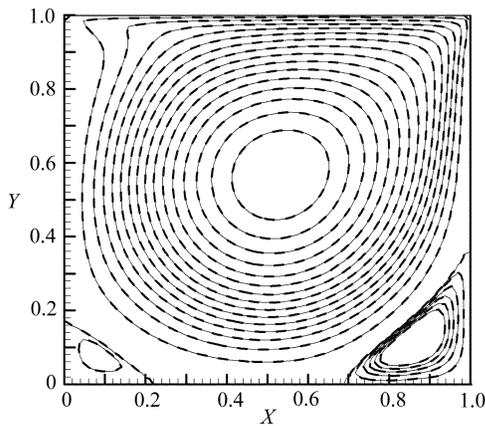


(b)  $y = 0.5$  处的速度  $V$

图 2 一阶导数采用三阶迎风差分格式



(a) 四阶中心差分格式



(b) 三阶迎风差分格式

图 3 两种差分表达形式得到的流函数在两种格式下的比较

### 3 结 论

综上所述, 林建国等<sup>[1]</sup>提出的“显式紧致”格式其实质为传统差分格式的另一种更为紧凑的表达形式, 因此它不具有紧致格式的优点, 但这种得到表达形式的方法相对于传统的求解方

法更为简单、方便,更易于从低阶形式向高阶形式扩展,更容易推导及编程实现,不失为推导得到高阶精度表达式的一种新方法.本文中仅研究了差分格式的截断精度,然而差分格式应用于CFD问题求解时,仅考虑这些是不够的,差分格式的数值稳定性也必须考虑,这些在其他文章中进行研究.

### [参 考 文 献]

- [1] 林建国,谢志华,周俊陶.任意精度的三点紧致显格式及其在CFD中的应用[J].应用数学和力学,2007,28(7):843-852.
- [2] 陶文铨.数值传热学[M].西安:西安交通大学出版社,2001,32-35.
- [3] Ghia U, Ghia KN, Shin CT. High- Re solutions for incompressible flow using the Navier- Stokes equations and a multigrid method[J]. Journal of Computational Physics, 1982, 48(3): 387- 411.

## Comments on the Paper “Three- Point Explicit Compact Difference Scheme With Arbitrary Order of Accuracy and Its Application in CFD”

ZHANG Hong- na<sup>1,2</sup>, YU Bo<sup>1</sup>, WANG Yi<sup>1</sup>,  
WEI Jin- jia<sup>3</sup>, LI Feng- chen<sup>2</sup>

- (1. Beijing Key Laboratory of Urban Oil and Gas Distribution Technology, China University of Petroleum (Beijing), Beijing 102249, P. R. China;
2. School of Energy Science and Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, P. R. China;
3. State Key Laboratory of Multiphase Flow in Power Engineering, Xi' an Jiaotong University, Xi' an 710049, P. R. China)

**Abstract:** It was proved the explicit compact difference scheme, which was proposed by Lin et al. (Three- point explicit compact difference scheme with arbitrary order of accuracy and its application in CFD. Applied Mathematics and Mechanics, 2007, 28(7): 843- 852) has the same performance as the conventional finite difference schemes and it is actually another expression form of the conventional finite difference schemes. Though the proposed expression doesn't have advantages of a compact difference scheme, it is easier to be obtained and implemented in a code compared to the conventional expression in which the coefficients should be obtained by solving equations especially for higher accurate schemes.

**Key words:** explicit compact difference scheme; conventional finite difference scheme; central difference scheme; upwind difference scheme