

文章编号: 1000-0887(2009) 06-0639-09

Hilbert 空间中广义平衡问题与 k - 严格伪压缩映象的强收敛定理*

张石生， 饶若峰， 黄家琳

(宜宾学院 数学系, 四川 宜宾 644007)

(我刊编委张石生来稿)

摘要: 在 Hilbert 空间中引进并研究了一种新的迭代算法, 借以寻求广义平衡问题解集与 k - 严格伪压缩映象不动点集的一公共元. 所得到的结果, 推广并改进了最近一些人所发布的新结果.

关 键 词: k - 严格伪压缩映象; 平衡问题; α - 逆强单调映象; 变分不等式

中图分类号: O177.91 文献标识码: A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2009.06.002

引 言

设 H 是一实的 Hilbert 空间, C 是 H 的一非空闭凸子集. $F: C \times C \to \mathbf{R}$ 是一双变元函数, $A: C \to H$ 是一非线性映象. 记 T 的不动点集为 $F(T)$. 本文考虑下面的广义平衡问题: 求一点 $z \in C$ 使得

$$F(z, y) + \langle Az, y - z\rangle \geqslant 0, \qquad \forall y \in C. \tag{1}$$

问题(1) 的解集记为 Ω, 即

$$\Omega = \left\{z \in C: F(z, y) + \langle Az, y - z\rangle \geqslant 0, \ \forall y \in C\right\}.$$

当 $A \equiv 0$ 时, Ω 记为 $\Omega(F)$. 当 $F \equiv 0$ 时, Ω 记为 $\mathrm{VI}(C, A)$.

我们称 $S: C \to C$ 是一非扩张映象, 如果

$$\| Sx - Sy \| \leqslant \| x - y \|, \qquad \forall x, y \in C.$$

称 $T: C \to C$ 是 k - 严格伪压缩映象[1], 如果存在常数 $0 \leqslant k < 1$ 使得对任给 $x, y \in C$, 有

$$\| Tx - Ty \|^2 \leqslant \| x - y \|^2 + k \| (I - T)x - (I - T)y \|^2,$$

特别, 当 $k = 0$ 时, T 是非扩张的. 因此 k - 严格伪压缩映象类包含了非扩张映象类.

此前, 许多作者都研究过用迭代算法确定 Ω 和一非扩张映象不动点集的公共元. 诸如 Takahashi 等[2], Tada 等[3], 以及 Takahashi 等人[4] 等. 受上述文献的启发, 本文将研究用迭代方法来确定 Ω 和一 k - 严格伪压缩映象不动点集的公共元. 本文主要结果, 推广和改进了上述文献的主要结果.

---

* 收稿日期: 2008-12-06; 修订日期: 2009-03-31

基金项目: 四川省教委青年科学基金资助项目(08ZB002) ; 四川省自然科学基金资助项目(2008ZC001)

作者简介: 张石生(1934—) , 男, 云南曲靖人, 教授(联系人. E-mail: changss@ yahoo. cn) .

1 预备知识

假设 H 是一Hilbert空间, C 是 H 的一非空闭凸子集. 对任给 $x\in H$, 存在 C 的唯一最近点, 不妨记之为 $P_C(x)$, 使得对一切 $y\in C$ 有 $\|x-P_Cx\|\leqslant\|x-y\|$. 这样的 P_C 就称之为 H 到 C 上的度量投影. 我们还知道, P_C 是强非扩张的, 即

$$\|P_Cx-P_Cy\|^2\leqslant\langle P_Cx-P_Cy,x-y\rangle,\qquad\forall x,y\in H.$$

众所周知, Hilbert 空间 H 满足 Opial 条件[5], 即, 对任给序列 $\{x_n\}$ 当 $x_n\rightharpoonup x$ 时, 不等式

$$\liminf_{n\to\infty}\|x_n-x\|<\liminf_{n\to\infty}\|x_n-y\|$$

对所有 $y\in H$ 且 $y\neq x$ 都成立.

映象 $A:C\to H$ 称为 $\alpha-$ 逆强单调的, 如果存在 $\alpha>0$ 使得

$$\langle x-y,Ax-Ay\rangle\geqslant\alpha\|Ax-Ay\|^2,\qquad\forall x,y\in C.$$

引理 1.1[6] 设 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 是 Banach 空间 E 中的有界序列, $\{\beta_n\}$ 是 $[0,1]$ 中的数列, 满足 $0<\liminf_{n\to\infty}\beta_n\leqslant\limsup_{n\to\infty}\beta_n<1$. 如果对每一 $n\geqslant1$, $x_{n+1}=(1-\beta_n)y_n+\beta_nx_n$, 并且 $\limsup_{n\to\infty}(\|y_{n+1}-y_n\|-\|x_{n+1}-x_n\|)\leqslant0$. 则 $\lim_{n\to\infty}\|y_n-x_n\|=0$.

本文假设双变元函数 $F:C\times C\to\mathbf{R}$ 满足以下条件:

(A_1) 对一切 $x\in C$ 有 $F(x,x)=0$;

(A_2) F 是单调的, 即对任给 $x,y\in C$ 有 $F(x,y)+F(y,x)\leqslant0$;

(A_3) 对任给 $x,y,z\in C$ 有

$$\lim_{t\downarrow0^+}F(tz+(1-t)x,y)\leqslant F(x,y);$$

(A_4) 对任给 $x\in C$, $y\to F(x,y)$ 是凸的, 且是下半连续的.

引理 1.2[7-8] 设 C 是 H 的一非空闭凸子集, $F:C\times C\to\mathbf{R}$ 是双变元函数, 满足条件(A_1) ~ (A_4), 则, 对任给 $r>0$ 和 $x\in H$, 存在 $z\in C$ 使得

$$F(z,y)+\frac{1}{r}\langle y-z,z-x\rangle\geqslant0,\qquad\forall y\in C.$$

进一步, 若记 $T_rx=\left\{z\in C:F(z,y)+\frac{1}{r}\langle y-z,z-x\rangle\geqslant0,\ \forall y\in C\right\}$, 则我们有

1) T_r 是单值的;

2) T_r 是强非扩张的, 即, 对任给 $x,y\in H$, 有

$$\|T_rx-T_ry\|^2\leqslant\langle T_rx-T_ry,x-y\rangle;$$

3) $F(T_r)=\Omega(F)$;

4) $\Omega(F)$ 是闭凸的.

引理 1.3[2] 设 C,H,F 和 $T_r(x)$ 满足引理 1.2 中相同的条件. 则有

$$\|T_sx-T_ty\|^2\leqslant\frac{s-t}{s}\langle T_sx-T_ty,T_sx-x\rangle$$

对任意 $s,t>0$ 和 $x\in H$ 均成立.

引理 1.4[9] 设 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 是 3 个非负实数列, 满足

$$a_{n+1}\leqslant(1-\lambda_n)a_n+b_n+c_n,\qquad n\geqslant n_0,$$

其中 n_0 是某非负整数, $\lambda_n\in[0,1]$, $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n=\infty$, $b_n=o(\lambda_n)$ 以及 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n<\infty$, 则 $a_n\to0\ (n\to\infty)$.

2 主要结果

定理 2.1 设 H 是一 Hilbert 空间, C 是一非空闭凸子集, $A: C \to H$ 是一 α- 逆强单调映象, $B: C \to H$ 是一 β- 逆强单调映象. 设 $F: C \times C \to \mathbf{R}$ 是一双变元函数, 满足条件 $(A_1) \sim (A_4)$, $T: C \to C$ 是一 k- 严格伪压缩映象, 且 $F(T) \cap \Omega \neq \emptyset$. f 是 C 上的压缩映象, 设其压缩常数为 $h \in (0,1)$. $x_1 \in C$ 是任意给定的点, $\{z_n\} \subset C$, 序列 $\{x_n\} \subset C$ 是由以下式定义的迭代程序:

$$\begin{cases} F(z_n, y) + \langle Ax_n + Bz_n, y - z_n \rangle + \dfrac{1}{r_n}\langle y - z_n, z_n - x_n \rangle \geqslant 0, & \forall y \in C, \\ x_{n+1} = \beta_n x_n + (1 - \beta_n)(\gamma y_n + (1 - \gamma) T y_n), & \forall n \in \mathbf{N}, \\ y_n = \alpha_n f(x_n) + (1 - \alpha_n) z_n, \end{cases} \tag{2}$$

其中 $\gamma \in [k, 1)$, $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\} \subset [0, 1]$, 以及 $\{r_n\} \subset (0, \infty)$. 假设 $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty}(r_{n+1} - r_n) = 0$, $0 < a \leqslant r_n \leqslant b < 2\alpha$ 以及 $0 < c \leqslant \beta_n \leqslant d < 1$, 则 $\{x_n\}$ 强收敛于点 $z = P_{F(T)\cap\Omega} f(z)$.

证明 定义映象 $S: C \to C$ 如下:

$$Sx = \gamma x + (1 - \gamma) Tx, \qquad \forall x \in C. \tag{3}$$

则我们断言, $S: C \to C$ 是非扩张的, 且 $F(S) = F(T)$.

事实上, 对任给 $x, y \in C$, 由 k- 严格伪压缩映象定义有

$$\begin{aligned} \| Sx - Sy \|^2 = {} & \gamma \| x - y \|^2 + (1 - \gamma) \| Tx - Ty \|^2 - \\ & \gamma(1 - \gamma) \| (I - T)x - (I - T)y \|^2 \leqslant \\ & \gamma \| x - y \|^2 + (1 - \gamma) \| x - y \|^2 - \\ & (\gamma - k)(1 - \gamma) \| (I - T)x - (I - T)y \|^2 \leqslant \\ & \| x - y \|^2, \end{aligned}$$

这说明 $S: C \to C$ 是非扩张的.

另外, 对任给 $x \in F(T)$, 由式(3)有

$$Sx = \gamma x + (1 - \gamma) Tx = x.$$

于是, 对任给 $x \in F(S)$, 由式(3)有

$$(1 - \gamma) Tx = Sx - \gamma x = (1 - \gamma) x.$$

综上所述, 我们的断言得证.

现我们定义一双变元函数 $G: C \times C \to \mathbf{R}$ 如下:

$$G(x, y) = F(x, y) + \langle Bx, y - x \rangle, \qquad \forall x, y \in C.$$

下证函数 G 也满足条件 $(A_1) \sim (A_4)$.

事实上, 易证对任意 $x \in C$ 有 $G(x, x) = 0$, 即条件 (A_1) 成立. 其次, 对任给 $y, z \in C$, 由 B 是 α- 逆强单调映象, 对任意 $y, z \in C$ 不难证得 $G(z, y) + G(y, z) \leqslant 0$. 故条件 (A_2) 满足. 由映象 $x \mapsto \langle Bx, y - x \rangle$ 的连续性, 我们可推证 G 满足 (A_3). 下面我们证明对任给 $x \in C$, $y \mapsto G(x, y)$ 是凸函数. 事实上, 我们有

$$\begin{aligned} G(x, ty + (1 - t)z) = {} & F(x, ty + (1 - t)z) + \langle Bx, ty + (1 - t)z - x \rangle \leqslant \\ & tF(x, y) + (1 - t) F(x, z) + t\langle Bx, y - x \rangle + (1 - t)\langle Bx, z - x \rangle = \\ & tG(x, y) + (1 - t) G(x, z). \end{aligned}$$

现证函数 $y \mapsto G(x,y)$ 是下半连续的.

事实上, 若 $\{y_n\} \subset C$ 且 $y_n \to y \in C$, 则

$$G(x,y) = F(x,y) + \langle Bx, y-x\rangle \leqslant \liminf_{n\to\infty} F(x,y_n) + \lim_{n\to\infty}\langle Bx, y_n - x\rangle = \liminf_{n\to\infty} G(x,y_n).$$

故条件(A4) 也满足.

以上表明, 式(2) 实际上等价于下式:

$$\begin{cases} G(z_n,y) + \langle Ax_n, y-z_n\rangle + \dfrac{1}{r_n}\langle y-z_n, z_n-x_n\rangle \geqslant 0, & \forall y \in C, \\ x_{n+1} = \beta_n x_n + (1-\beta_n)Sy_n, & \forall n \in \mathbf{N}, \\ y_n = \alpha_n f(x_n) + (1-\alpha_n)z_n, \end{cases} \tag{4}$$

其中 $S: C \to C$ 是式(3) 给出的非扩张映象, $G(x,y)$ 是满足条件(A1) ~ (A4) 的双变元函数. 我们不妨重新定义 Ω 如下:

$$\Omega = \{z \in C: G(z,y) + \langle Az, y-z\rangle \geqslant 0,\ \forall y \in C\}. \tag{5}$$

以下我们证明由式(4) 所定义的序列$\{x_n\}$强收敛于z, 其中 $z = P_{F(S)\cap\Omega}f(z)$, $S: C\to C$ 是式(3) 给出的非扩张映象, Ω 如式(5) 所定义.

首先我们证明 $\Omega = F(T_{r_n}(I - r_nA))$, 从而 Ω 是闭凸的.

事实上, 由于双变元函数 G 满足条件(A1) ~ (A4), 故由引理 1.2 知, 对任给 $r > 0$ 和 $x \in C$, 我们可定义一映象 $T_r: H \to C$ 如下:

$$T_r(x) = \left\{z \in C: G(z,y) + \frac{1}{r}\langle y-z, z-x\rangle \geqslant 0,\ \forall y \in C\right\},$$

并且, T_r 满足引理 1.2 所有结论.

由于

$$\begin{aligned} z \in \Omega &\Leftrightarrow z \in C \text{ 满足 } G(z,y) + \langle Az, y-z\rangle \geqslant 0 \text{ 对一切 } y \in C \text{ 成立} \\ &\Leftrightarrow z \in C \text{ 满足 } G(z,y) + \frac{1}{r_n}\langle z-(I-r_nA)z, y-z\rangle \geqslant 0 \text{ 对一切 } y \in C \text{ 成立} \\ &\Leftrightarrow z = T_{r_n}(I-r_nA)z \Leftrightarrow z \in F(T_{r_n}(I-r_nA)), \end{aligned}$$

我们有 $\Omega = F(T_{r_n}(I-r_nA))$. 进一步, 由对 r_n 的假设知$I - r_nA$ 是非扩张的, 从而对任给 $n \in \mathbf{N}$, $T_{r_n}(I-r_nA)$ 是强非扩张映象. 因而 Ω 是闭凸集, 从而投影映象$P_{F(S)\cap\Omega}$的定义是确定的.

现我们证明存在一点 $z \in F(S)\cap\Omega$ 满足$z = P_{F(S)\cap\Omega}f(z)$.

事实上, 因 $P_{F(S)\cap\Omega}f$ 是由C 到$F(S)\cap\Omega \subset C$ 的映象, 且满足条件:

$$\|P_{F(S)\cap\Omega}f(x) - P_{F(S)\cap\Omega}f(y)\| \leqslant h\|x-y\|, \qquad \forall x, y \in C.$$

于是由 Banach 压缩映象原理知, 存在唯一元 $z \in F(S)\cap\Omega \subset C$ 满足$z = P_{F(S)\cap\Omega}f(z)$.

其次, 我们证明序列$\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, $\{f(x_n)\}$, $\{Ax_n\}$ 和$\{T_{r_n}x_n\}$ 皆有界.

事实上, 对任给 $p \in F(S)\cap\Omega(G)$, 由 $z_n = T_{r_n}(I-r_nA)x_n$ 和$p = T_{r_n}(I-r_nA)p$ 我们有

$$\|z_n - p\| = \|T_{r_n}(I-r_nA)x_n - T_{r_n}(I-r_nA)p\| \leqslant \|x_n - p\|. \tag{6}$$

于是由式(4) 和(6) 有

$$\|y_n - p\| = \|\alpha_n(f(x_n)-p) + (1-\alpha_n)(z_n-p)\| \leqslant \alpha_n\|f(x_n) - f(p) + f(p) - p\| + (1-\alpha_n)\|z_n - p\| \leqslant$$

$$\alpha_n h\|x_n-p\|+\alpha_n\|f(p)-p\|+(1-\alpha_n)\|x_n-p\|=$$
$$(1-\alpha_n(1-h))\|x_n-p\|+\alpha_n\|f(p)-p\|\leqslant$$
$$\max\left\{\|x_n-p\|,\frac{1}{1-h}\|f(p)-p\|\right\}. \tag{7}$$

现由式(4)、(6)和(7)有

$$\|x_{n+1}-p\|=\|\beta_n(x_n-p)+(1-\beta_n)(Sy_n-p)\|\leqslant$$
$$\beta_n\|x_n-p\|+(1-\beta_n)\|y_n-p\|\leqslant$$
$$\max\left\{\|x_n-p\|,\frac{1}{1-h}\|f(p)-p\|\right\}.$$

于是由归纳法可证

$$\|x_{n+1}-p\|\leqslant\max\left\{\|x_1-p\|,\frac{1}{1-h}\|f(p)-p\|\right\},\qquad\forall n\in\mathbf{N}.$$

这就意味着$\{x_n\}$是H 中的有界序列. 从而 序列$\{y_n\}$,$\{z_n\}$,$\{f(x_n)\}$,$\{Ax_n\}$和$\{T_{r_n}x_n\}$ 都有界.

以下我们证明

$$\|x_{n+1}-x_n\|\to 0\qquad(n\to\infty). \tag{8}$$

令$u_n=(I-r_nA)x_n$, 由引理1.3知, 存在常数$M>0$使得

$$\|T_{r_{n+1}}u_n-T_{r_n}u_n\|^2\leqslant\frac{r_{n+1}-r_n}{r_{n+1}}\langle T_{r_{n+1}}u_n-T_{r_n}u_n,T_{r_{n+1}}u_n-u_n\rangle\leqslant$$
$$\frac{|r_{n+1}-r_n|}{r_{n+1}}(\|T_{r_{n+1}}u_n-T_{r_n}u_n\|\cdot\|T_{r_{n+1}}u_n-u_n\|)\leqslant$$
$$\frac{|r_{n+1}-r_n|}{a}M.$$

从而

$$\|z_{n+1}-z_n\|=\|T_{r_{n+1}}(I-r_{n+1}A)x_{n+1}-T_{r_n}(I-r_nA)x_n\|\leqslant$$
$$\|T_{r_{n+1}}(I-r_{n+1}A)x_{n+1}-T_{r_{n+1}}(I-r_nA)x_n\|+\|T_{r_{n+1}}u_n-T_{r_n}u_n\|\leqslant$$
$$\|x_{n+1}-x_n\|+|r_{n+1}-r_n|\cdot\|Ax_n\|+\sqrt{\frac{|r_{n+1}-r_n|}{a}M}.$$

由此

$$\|Sy_{n+1}-Sy_n\|\leqslant\|y_{n+1}-y_n\|=$$
$$\|\alpha_{n+1}(f(x_{n+1})-f(x_n))+(\alpha_{n+1}-\alpha_n)(f(x_n)-z_n)+$$
$$(1-\alpha_{n+1})(z_{n+1}-z_n)\|\leqslant$$
$$\alpha_{n+1}\|f(x_{n+1})-f(x_n)\|+|\alpha_{n+1}-\alpha_n|\cdot\|f(x_n)-z_n\|+$$
$$\|x_{n+1}-x_n\|+|r_{n+1}-r_n|\cdot\|Ax_n\|+\sqrt{\frac{|r_{n+1}-r_n|}{a}M}.$$

因而由 α_n 和r_n 的假设条件知

$$\limsup_{n\to\infty}(\|Sy_{n+1}-Sy_n\|-\|x_{n+1}-x_n\|)\leqslant 0.$$

由引理1.1, 我们有

$$Sy_n-x_n\to 0. \tag{9}$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\|x_{n+1}-x_n\|=\lim_{n\to\infty}(1-\beta_n)\|Sy_n-x_n\|=0.$$

现在我们证明

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - z_n\| = 0. \tag{10}$$

事实上,对任意 $p \in F(S)\cap\Omega$, 由 $z_n = T_{r_n}(I - r_nA)x_n$, 我们有

$$\begin{aligned}
\|z_n - p\|^2 &= \|T_{r_n}(I - r_nA)x_n - T_{r_n}(I - r_nA)p\|^2 \leqslant \\
&\|(x_n - p) - r_n(Ax_n - Ap)\|^2 = \\
&\|x_n - p\|^2 - 2r_n\langle x_n - p, Ax_n - Ap\rangle + r_n^2\|Ax_n - Ap\|^2 \leqslant \\
&\|x_n - p\|^2 + r_n(r_n - 2\alpha)\|Ax_n - Ap\|^2.
\end{aligned} \tag{11}$$

于是由式(4)和(11)有

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\|^2 &= \|\beta_n(x_n - p) + (1 - \beta_n)(Sy_n - p)\|^2 \leqslant \\
&\beta_n\|x_n - p\|^2 + (1 - \beta_n)\|y_n - p\|^2 \leqslant \\
&\beta_n\|x_n - p\|^2 + (1 - \beta_n)\|\alpha_n(f(x_n) - p) + (1 - \alpha_n)(z_n - p)\|^2 \leqslant \\
&\beta_n\|x_n - p\|^2 + (1 - \beta_n)\left\{\alpha_n\|f(x_n) - p\|^2 + (1 - \alpha_n)\|z_n - p\|^2\right\} \leqslant \\
&\beta_n\|x_n - p\|^2 + (1 - \beta_n)\left\{\alpha_n\|f(x_n) - p\|^2 + \right. \\
&\left.(1 - \alpha_n)(\|x_n - p\|^2 + r_n(r_n - 2\alpha)\|Ax_n - Ap\|^2)\right\} \leqslant \\
&\|x_n - p\|^2 + \alpha_n(1 - \beta_n)\|f(x_n) - p\|^2 + \\
&(1 - \alpha_n)(1 - \beta_n)r_n(r_n - 2\alpha)\|Ax_n - Ap\|^2.
\end{aligned} \tag{12}$$

由 $0 < c \leqslant \beta_n \leqslant d < 1$, $\alpha_n \to 0$, 式(8)以及(12), 我们有

$$\|Ax_n - Ap\| \to 0. \tag{13}$$

另由引理 1.2 和式(4)知,

$$\begin{aligned}
\|z_n - p\|^2 &= \|T_{r_n}(I - r_nA)x_n - T_{r_n}(I - r_nA)p\|^2 \leqslant \\
&\langle (I - r_nA)x_n - (I - r_nA)p, z_n - p\rangle = \\
&\frac{1}{2}(\|(I - r_nA)x_n - (I - r_nA)p\|^2 + \|z_n - p\|^2 - \\
&\|(I - r_nA)x_n - (I - r_nA)p - (z_n - p)\|^2) \leqslant \\
&\frac{1}{2}(\|x_n - p\|^2 + \|z_n - p\|^2 - \|(x_n - z_n) - r_n(Ax_n - Ap)\|^2) = \\
&\frac{1}{2}(\|x_n - p\|^2 + \|z_n - p\|^2 - \|x_n - z_n\|^2 - \\
&r_n^2\|Ax_n - Ap\|^2 + 2r_n\langle x_n - z_n, Ax_n - Ap\rangle).
\end{aligned}$$

简化后,知

$$\begin{aligned}
\|z_n - p\|^2 \leqslant &\|x_n - p\|^2 - \|x_n - z_n\|^2 - \\
&r_n^2\|Ax_n - Ap\|^2 + 2r_n\langle x_n - z_n, Ax_n - Ap\rangle.
\end{aligned} \tag{14}$$

现由式(4)和(14)我们有

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\|^2 \leqslant &\beta_n\|x_n - p\|^2 + (1 - \beta_n)\|y_n - p\|^2 \leqslant \\
&\beta_n\|x_n - p\|^2 + (1 - \beta_n)(\alpha_n\|f(x_n) - p\|^2 + (1 - \alpha_n)\|z_n - p\|^2) \leqslant \\
&\beta_n\|x_n - p\|^2 + \alpha_n\|f(x_n) - p\|^2 + (1 - \beta_n)\|z_n - p\|^2 \leqslant \\
&\|x_n - p\|^2 + \alpha_n\|f(x_n) - p\|^2 - (1 - \beta_n)\|x_n - z_n\|^2 + \\
&2(1 - \beta_n)r_n\|x_n - z_n\| \cdot \|Ax_n - Ap\|,
\end{aligned}$$

因此

$$(1-d)\|x_n-z_n\|^2\leqslant\|x_n-p\|^2-\|x_{n+1}-p\|^2+\alpha_n\|f(x_n)-p\|^2+2(1-\beta_n)r_n\|x_n-z_n\|\cdot\|Ax_n-Ap\|.$$

于是由式(8)、(13)和 $\alpha_n\to 0$, 式(10)得证.

因为 $y_n=\alpha_n f(x_n)+(1-\alpha_n)z_n$, 于是有

$$\|y_n-z_n\|=\alpha_n\|f(x_n)-z_n\|\to 0. \tag{15}$$

故由式(10)和(15)有

$$\|y_n-x_n\|\to 0. \tag{16}$$

因 $\|Sy_n-y_n\|\leqslant\|Sy_n-x_n\|+\|x_n-y_n\|$, 故由式(9)及(16)我们有

$$\|Sy_n-y_n\|\to 0. \tag{17}$$

设 $z=P_{F(S)\cap\Omega}f(z)$, 以下我们证明

$$\limsup_{n\to\infty}\langle f(z)-z,y_n-z\rangle\leqslant 0. \tag{18}$$

事实上, 由上极限的定义, 可以取 $\{y_n\}$ 的某子列 $\{y_{n_i}\}$ 使得

$$\limsup_{n\to\infty}\langle f(z)-z,y_n-z\rangle=\lim_{i\to\infty}\langle f(z)-z,y_{n_i}-z\rangle. \tag{19}$$

由 $\{y_{n_i}\}$ 的有界性知, 存在 $\{y_{n_i}\}$ 的一子列, 不失一般性, 仍设为 $\{y_{n_i}\}$, 且使得 $y_{n_i}\rightharpoonup w$. 由于 C 是闭凸的, 故 C 是弱闭的. 因此 $w\in C$. 我们来证明 $w\in F(S)\cap\Omega$. 首先, 我们证 $w\in\Omega$. 事实上, 由式(15), 我们有 $z_{n_i}\rightharpoonup w$. 由 $z_n=T_{r_n}(I-r_nA)x_n$, 从而对任意 $y\in C$ 有

$$G(z_n,y)+\langle Ax_n,y-z_n\rangle+\frac{1}{r_n}\langle y-z_n,z_n-x_n\rangle\geqslant 0.$$

由条件(A2)有

$$\langle Ax_n,y-z_n\rangle+\frac{1}{r_n}\langle y-z_n,z_n-x_n\rangle\geqslant G(y,z_n).$$

将 n_i 替换 n, 则

$$\langle Ax_{n_i},y-z_{n_i}\rangle+\left\langle y-z_{n_i},\frac{z_{n_i}-x_{n_i}}{r_{n_i}}\right\rangle\geqslant G(y,z_{n_i}). \tag{20}$$

对 $t\in(0,1]$ 和 $y\in C$, 我们设 $z_t=ty+(1-t)w$, 则 $z_t\in C$. 因此由式(20)有

$$\langle z_t-z_{n_i},Az_t\rangle\geqslant\langle z_t-z_{n_i},Az_t\rangle-\langle Ax_{n_i},z_t-z_{n_i}\rangle-\left\langle z_t-z_{n_i},\frac{z_{n_i}-x_{n_i}}{r_{n_i}}\right\rangle+G(z_t,z_{n_i})=$$
$$\langle z_t-z_{n_i},Az_t-Ax_{n_i}\rangle-\left\langle z_t-z_{n_i},\frac{z_{n_i}-x_{n_i}}{r_{n_i}}\right\rangle+G(z_t,z_{n_i}).$$

由 $\|z_{n_i}-x_{n_i}\|\to 0$, 我们有 $\|Az_{n_i}-Ax_{n_i}\|\to 0$. 进一步, 由 A 的单调性有 $\langle z_t-z_{n_i},Az_t-Ax_{n_i}\rangle\geqslant 0$. 因此, 由条件(A4)有

$$\langle z_t-w,Az_t\rangle\geqslant G(z_t,w),\qquad 当\ i\to\infty. \tag{21}$$

由条件(A1)、(A4)以及式(21), 我们还有

$$0=G(z_t,z_t)\leqslant tG(z_t,y)+(1-t)G(z_t,w)\leqslant tG(z_t,y)+(1-t)\langle z_t-w,Az_t\rangle=tG(z_t,y)+(1-t)t\langle y-w,Az_t\rangle,$$

从而

$$0\leqslant G(z_t,y)+(1-t)\langle y-w,Az_t\rangle.$$

令 $t\to 0+$, 对任意 $y\in C$, 我们有

$$0 \leqslant G(w, y) + \langle y - w, Aw \rangle.$$

从而 $w \in \Omega$.

现在, 我们证明 $w \in F(S)$. 若此不成立, 则有 $w \neq Sw$. 由 Opial 条件[5] 和式(17), 我们有

$$\liminf_{i \to \infty} \| y_{n_i} - w \| < \liminf_{i \to \infty} \| y_{n_i} - Sw \| = \liminf_{i \to \infty} \| y_{n_i} - Sy_{n_i} + Sy_{n_i} - Sw \| \leqslant \liminf_{i \to \infty} \| y_{n_i} - w \|.$$

这是个矛盾. 从而 $w \in F(S)$ 成立. 因 $w \in F(S) \cap \Omega$, 故由式(18) 以及度量投影的性质, 我们有

$$\limsup_{n \to \infty} \langle f(z) - z, y_n - z \rangle = \lim_{i \to \infty} \langle f(z) - z, y_{n_i} - z \rangle = \langle f(z) - z, w - z \rangle \leqslant 0.$$

现定义 $\eta_n = \max\left\{ \langle f(z) - z, y_n - z \rangle, 0 \right\}$, 则有 $\eta_n \geqslant 0$ 以及 $\eta_n \to 0, n \to \infty$.

最后我们证明

$$x_n \to z = P_{F(S) \cap \Omega} f(z).$$

事实上, 由式(4) 和(6) 有

$$\begin{aligned}
\| x_{n+1} - z \|^2 &\leqslant \beta_n \| x_n - z \|^2 + (1 - \beta_n) \| Sy_n - z \|^2 \leqslant \\
&\beta_n \| x_n - z \|^2 + (1 - \beta_n) \| y_n - z \|^2 \leqslant \\
&\beta_n \| x_n - z \|^2 + (1 - \beta_n) \left\{ (1 - \alpha_n)^2 \| z_n - z \|^2 + 2\alpha_n \langle f(x_n) - z, y_n - z \rangle \right\} \leqslant \\
&\beta_n \| x_n - z \|^2 + (1 - \beta_n)(1 - 2\alpha_n + \alpha_n^2) \| x_n - z \|^2 + \\
&2\alpha_n (1 - \beta_n) \langle f(x_n) - z, y_n - z \rangle \leqslant \\
&(1 - 2(1 - \beta_n)\alpha_n) \| x_n - z \|^2 + \alpha_n^2 \| x_n - z \|^2 + \\
&2\alpha_n (1 - \beta_n)(\langle f(x_n) - f(z), y_n - z \rangle + \langle f(z) - z, y_n - z \rangle) \leqslant \\
&(1 - 2(1 - \beta_n)\alpha_n) \| x_n - z \|^2 + \alpha_n^2 M_0 + \\
&2\alpha_n (1 - \beta_n)(h \| x_n - z \| \cdot \| y_n - z \| + \eta_n) \leqslant \\
&(1 - 2(1 - \beta_n)\alpha_n) \| x_n - z \|^2 + \alpha_n^2 M_0 + \\
&h\alpha_n (1 - \beta_n)(\| x_n - z \|^2 + \| y_n - z \|^2) + 2\alpha_n \eta_n,
\end{aligned} \tag{22}$$

其中 $M_0 = \sup_{n \geqslant 1} \left\{ \| x_n - z \|^2 + \| f(x_n) - z \|^2 \right\}$ 是一常数. 于是由式(4) 和(6) 有

$$\| y_n - z \|^2 \leqslant \alpha_n \| f(x_n) - z \|^2 + (1 - \alpha_n) \| z_n - z \|^2 \leqslant \alpha_n M_0 + (1 - \alpha_n) \| x_n - z \|^2 \leqslant \alpha_n M_0 + \| x_n - z \|^2.$$

则由式(22) 和 $0 < c \leqslant \beta_n \leqslant d < 1$ 有

$$\begin{aligned}
\| x_{n+1} - z \|^2 &\leqslant (1 - 2(1 - \beta_n)\alpha_n) \| x_n - z \|^2 + \alpha_n^2 M_0 + \\
&h\alpha_n (1 - \beta_n)(2 \| x_n - z \|^2 + \alpha_n M_0) + 2\alpha_n \eta_n \leqslant \\
&(1 - 2(1 - \beta_n)(1 - h)\alpha_n) \| x_n - z \|^2 + \alpha_n^2 M_0 + h\alpha_n^2 M_0 + 2\alpha_n \eta_n \leqslant \\
&(1 - 2(1 - d)(1 - h)\alpha_n) \| x_n - z \|^2 + (\alpha_n^2 M_0 + h\alpha_n^2 M_0 + 2\alpha_n \eta_n).
\end{aligned}$$

于是由引理 1.5 知

$$\| x_n - z \|^2 \to 0,$$

定理 2.1 证毕.

注 1) 定理 2.1 将文献[2-4] 由非扩张映象推广到严格伪压缩映象;

2) 在式(4)中, 特别地取 $B\equiv 0$ 以及 $f(x_n)\equiv u\in C$, 我们立即可得文献[2] 的定理 3.1.

[参 考 文 献]

[1] Browder F E, Petryshyn W V. Construction of fixed points of nonlinear mappings in Hilbert spaces [J]. J Math Anal Appl, 1967, **20**(2): 197-228.

[2] Takahashi S, Takahashi W. Strong convergence theorem for a generalized equilibrium problem and a nonexpansive mapping in a Hilbert space[J]. Nonlinear Analysis, 2008, **69**(3): 1025-1033. doi: 10.1016/j.na.2008.02.042.

[3] Tada A, Takahashi W. Strong convergence theorem for an equilibrium problem and a nonexpansive mapping[J]. J Optim Theory Appl, 2007, **133**: 359-370.

[4] Takahashi S, Takahashi W. Viscosity approximation methods for equilibrium problem and fixed point problems in Hilbert spaces[J]. J Math Anal Appl, 2007, **331**(1): 506-515.

[5] Opial Z. Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings [J]. Bull Amer Math Soc, 1967, **73**(4): 591-597.

[6] Suzuki T. Strong convergence of Krasnoselskii and Mann's type sequences for one-parameter nonexpansive semigroups without Bochner integrals[J]. J Math Anal Appl, 2005, **305**(1): 227-239.

[7] Blum E, Oettli W. From optimization and variational inequalities to equilibrium problems[J]. Math Student, 1994, **63**(1/4): 123-145.

[8] Combettes P L, Hirstoaga S A. Equilibrium problems in Hilbert space[J]. J Nonlinear Convex Anal, 2005, **6**: 117-136.

[9] Liu L S. Ishikawa and Mann iterative processes with errors for nonlinear strongly accretive mappings in Banach space[J]. J Math Anal Appl, 1995, **194**(1): 114-125.

Strong Convergence Theorem for a Generalized Equilibrium Problem and k-Strict Pseudocontraction in Hilbert Spaces

ZHANG Shi-sheng, RAO Ruo-feng, HUANG Jia-lin

(Department of Mathematics, Yibin University, Yibin, Sichuan 644007, P. R. China)

Abstract: The main purpose is to introduce and study a new iterative algorithom for finding a common element of the set of solutions for a generalized equilibrium problem and the set of fixed points for a k-strict pseudocontractive mapping in Hilbert space. The results presented extend and improve the corresponding results announced by many others.

Key words: k-strict pseudocontractive mapping; equilibrium problem; α-inverse-strongly monotone mapping; variational inequality