文章编号: 1000-0887(2009) 06-0648-07

带有小参数变分问题的极小化序列*

倪明康[1,2], 林武忠[1,2]

(1. 华东师范大学 数学系, 上海 200062;
2. 上海高校计算科学 E-研究院, 上海交通大学研究所, 上海 200030)

(戴世强推荐)

摘要: 针对一类含有小参数的变分问题构造了零次渐近解, 并证明了当小参数趋向于 0 时, 该零次渐近解就是原问题的极小化序列.

关 键 词: 小参数; 变分问题; 极小化序列
中图分类号: O175.14 文献标识码: A
DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2009.06.003

引 言

在第二界国际数学家大会上, Hilbert 提出了 23 个重大数学问题, 其中最后一个问题就是关于变分法的直接求解问题. 因为各类变分问题的最后求解都可归结为解 Euler 方程的边值问题. 然而在大多数情况下 Euler 方程的精确解无法求出, 因此需要另外的求解方法. 不妨讨论下面变分问题:

$$J(u) = \int_0^T F(t, y, u)\,\mathrm{d}t \to \min_D, \tag{1}$$

$$\dot{y} = u, \tag{2}$$

$$y(0) = y^0, \quad y(T) = y^T. \tag{3}$$

鉴于上述原因, 对变分问题更恰当的提法是在定义域 D 上寻求序列 $\{v_s = (y_s, u_s)\}$, 使得 $J(v_s) \to \inf_D J$. 序列 $\{v_s\}$ 称为问题的极小化解[1-3]. 一般而言, 原问题的解在 D 中不一定存在, 这时它称为退化问题. 但是问题(1) ~ (3) 的极小化序列 $\{v_s\}$ 总是存在的. 如果原问题有解 v^*, 则 $v_s \to v^*$, $J(v_s) \to \min_D J$, 所以求极小化序列就特别有意义, 构造极小化序列的方法很多, 最常用的方法是用折线构造极小化序列, 其中每个元素是连续和按段光滑的, 对变分学而言, 这种序列的最大缺点是光滑性条件差, 虽然可作插值函数保证其光滑性, 但这样做毕竟很复杂. 所以直接寻找光滑的极小化序列是我们研究的目标之一.

本文的主要目的是构造变分学中光滑的极小化序列. 我们通过引进弱平方罚函数[4], 使

* 收稿日期: 2008-12-28; 修订日期: 2009-04-13
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10671070); 上海市教育委员会 E-研究院建设资助项目(E03004); 上海市重点学科建设资助项目(B407)
作者简介: 倪明康(1963—), 男, 教授, 俄罗斯自然科学院外籍院士(联系人. E-mail: xiaovikdo@163.com).

原问题变成带有小参数的奇摄动问题．用边界层函数法[5]构造一致有效的渐近解．当小参数趋向 0 时, 该渐近解就是光滑的极小化序列.

假设给定泛函 $J_0(u)$, 引进扩张泛函 $I_\mu(u)$:

$$I_\mu(u) = J_0(u) + \mu J_1(u), \qquad 0 < \mu \ll 1, \tag{4}$$

使得问题(2)、(3)、(4)的解存在, 这里, μ 是小参数, $\mu J_1(u)$ 是摄动项． 求 $I_\mu(u)$ 的解 $v_\mu^* \in C^2_{[0,T]}$ 就是一个典型的摄动问题． 根据奇摄动理论[3], 若该摄动问题的解 v_μ^* 存在, 则 n 项渐近解 $v_n(t,\mu)$ (简记为 v_μ) 在 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 上一致收敛于 v_μ^*, 即 $\lim_{\mu\to 0} v_n(t,\mu) = v_\mu^*$, $I_\mu(v_\mu) \to \min J$． 因此当 n (n 是渐近级数的阶) 固定时, n 项渐近解 v_μ 是 $\mu \to 0$ 时的极小化序列． 根据实际需要 n 可任意确定. 但这里必须强调下面两点: 1) 原问题是扩张问题的退化问题; 2) 可适当选取 $J_1(u)$, 使得 $I_\mu(u)$ 的解存在. 下面通过对某一类变分问题的讨论, 介绍上述构造极小化序列方法.

1　一类特殊变分问题

我们考虑下面一类变分问题:

$$J(u) = \int_0^T [a(y,t) + b(y,t)u]\,\mathrm{d}t \to \min_u, \tag{5}$$

$$\dot{y}(t) = u(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{6}$$

$$y(0) = y^0, \qquad y(T) = y^T, \tag{7}$$

其中 $a(y,t)$, $b(y,t)$ 是光滑函数.

首先把式(5)~(7)化成更简单的形式. 为此引入函数[1]

$$\varphi(y,t) = \int b(y,t)\,\mathrm{d}y,$$

这时泛函(5)可写成

$$J(u) = \varphi(y^T, T) - \varphi(y^0, 0) - \int_0^T P(y,t)\,\mathrm{d}t \to \min_y$$

或者

$$J(u) = -\int_0^T P(y,t)\,\mathrm{d}t \to \min_u,$$

这里

$$P(y,t) = -a(y,t) + \varphi_t(y,t).$$

(H_1) 假设 $P(y(t),t) = \max_y P(y,t)$.

由(H_1)可知

$$P_y(y,t) = 0, \quad P_{y^2}(y,t) < 0. \tag{8}$$

显然, $y(t)$ 不总是满足边值条件(7), 即 $y(0) \neq y^0$, $y(T) \neq y^T$． 所以式(5)~(7)是个退化问题[2].

下面我们将在 $C^2_{[0,T]}$ 中寻找收敛于 $(y(t), u(t))$ 的极小化序列 $\{(y_s(t), u_s(t))\}$, 其中 $y_s(0) = y^0$, $y_s(T) = y^T$.

引进扩张泛函 $I_\mu(u)$, 讨论下面摄动问题:

$$I_\mu(u) = \int_0^T \left(-P(y,t) + \frac{1}{2}\mu^2 u^2\right)\mathrm{d}t \to \min_u, \tag{9}$$

$$\dot{y} = u(t), \qquad 0 < t < T, \tag{10}$$

$$y(0) = y^0, \qquad y(T) = y^T. \tag{11}$$

由奇摄动理论可知, 在 $t = 0$ 和 $t = T$ 处会产生边界层, 记 $v = (y, u)$, 构造式(9) ~ (11) 如下形式的渐近解:

$$v(t, \mu) = \bar{v}(t, \mu) + \Pi v(\tau_0, \mu) + Rv(\tau_1, \mu), \tag{12}$$

其中

$$\bar{v}(t, \mu) = \bar{v}_0(t) + \mu \bar{v}_1(t) + \cdots \tag{13}$$

是正则级数.

$$\begin{cases} \Pi y(\tau_0, \mu) = \Pi_0 y(\tau_0) + \mu \Pi_1 y(\tau_0) + \cdots, \\ \Pi u(\tau_0, \mu) = \mu^{-1} \Pi_0 u(\tau_0) + \Pi_1 u(\tau_0) + \cdots, \qquad \tau_0 = \dfrac{y}{\mu} \end{cases} \tag{14}$$

是左边界层级数.

$$\begin{cases} Ry(\tau_1, \mu) = R_0 y(\tau_1) + R_1 y(\tau_1) + \cdots, \\ Ru(\tau_1, \mu) = \mu^{-1} R_0 u(\tau_1) + R_1 u(\tau_1) + \cdots, \qquad \tau_1 = \dfrac{y - T}{\mu} \end{cases} \tag{15}$$

是右边界层级数.

为了确定渐近展开式(12)中的系数项 $\bar{v}_i(t)$, $\Pi_i v(\tau_0)$, $R_i v(\tau_1)$, $i \geqslant 0$, 需要把式(13) ~ (15) 代入式(9) ~ (11), 首先按变量 t, τ_0, τ_1 进行分离, 再比较 μ 的同次幂, 便可得到确定这些系数的一系列问题.

对泛函(9)有下面的渐近表达式[6]:

$$\min_u I_\mu(u) = \min_{u_0} I_0(u_0) + \sum_{i=1}^{n} \mu^i \min_{u_i} I_i(u_i) + \cdots,$$

其中

$$I_i(u_i) = I_i(u_i, u_{i-1}, \cdots, u_0), \quad u_k = \arg I_k(u_k), \qquad k = 1, \cdots, i-1.$$

写出确定 $\bar{v}_0$ 的问题

$$I_0(u_0) = J(u_0) = -\int_0^T P(\bar{y}_0, t)\,\mathrm{d}t \to \min_{\bar{y}_0}, \tag{16}$$

$$\dot{\bar{y}}_0 = \bar{u}_0(t).$$

由(H_1)可得 $\bar{y}_0 = \bar{y}(t)$, $\bar{u}_0 = \dot{\bar{y}}(t)$.

而 $\Pi_0 v(\tau_0)$ 满足下面变分问题:

$$\Pi_0 I = \int_0^{+\infty} \left[P(\bar{y}(0), 0) - P(\bar{y}(0) + \Pi_0 y, 0) + \frac{1}{2} \Pi_0^2 u \right] \mathrm{d}\tau_0 \to \min_{\Pi_0 u}, \tag{17}$$

$$\Pi_0 \dot{y} = \Pi_0 u(\tau_0), \tag{18}$$

$$\Pi_0 y(0) = y^0 - \bar{y}(0), \quad \Pi_0 y(+\infty) = 0. \tag{19}$$

对 $R_0 v(\tau_1)$ 也得类似问题:

$$R_0 I = \int_{-\infty}^0 \left[P(\bar{y}(T), T) - P(\bar{y}(T) + R_0 y, T) + \frac{1}{2} R_0^2 u \right] \mathrm{d}\tau_1 \to \min_{R_0 u}, \tag{20}$$

$$R_0 \dot{y} = R_0 u(\tau_1), \tag{21}$$

$$R_0 y(0) = y^T - \bar{y}(T), \quad R_0 y(-\infty) = 0. \tag{22}$$

为了讨论方便起见, 对式(17) ~ (19) 作变换

$$y = y(0) + \Pi_0 y(\tau_0),\ u = \Pi_0 u(\tau_0).$$

问题(17) ~ (19)重新写成

$$I = \int_0^{+\infty}\left[P(y_0, 0) - P(y, 0) + \frac{1}{2}u^2\right]\mathrm{d}\tau_0 \to \min_u, \tag{23}$$

$$\dot{y} = u, \tag{24}$$

$$y(0) = y^0,\ y(+\infty) = y(0). \tag{25}$$

再做变量替换 $\mathrm{d}\tau_0 = \mathrm{d}y/u$, 则式(23) ~ (25)可写成

$$I = \int_{y^0}^{y(0)}\left[P(y(0), 0) - P(y, 0) + \frac{1}{2}u^2\right]\frac{\mathrm{d}y}{u} \to \min_{u(y)}, \tag{26}$$

由极值的必要条件可得

$$u^* = \sqrt{2}[P(y_0, 0) - P(y, 0)]^{1/2}. \tag{27}$$

把式(27)代入式(24)得到确定极值轨线 y^* 的方程

$$\dot{y} = \sqrt{2}[P(y(0), 0) - P(y, 0)]^{1/2} \equiv G(y). \tag{28}$$

(H$_2$) 假设问题(25)、(28)有解 $y = y^*(t)$.

考虑到 $G'_y(0) = (-P_{y^2}(y^0, 0))^{1/2} < 0$, 所以 $\Pi_0 y(\tau_0)$ 有指数估计, 再根据式(18)可得 $\Pi_0 u(\tau_0)$ 也有类似的指数估计, 这样归结为下面引理.

引理 1.1 如果满足条件(H$_1$)、(H$_2$), 则有不等式

$$|\Pi_0 v(\tau_0)| \leqslant C_0 e^{\kappa_0\tau_0},\qquad \tau_0 < 0,$$

其中 C_0, κ_0 都是正数.

同样对右边界层函数 $R_0 v(\tau_1)$ 也有类似结论.

引理 1.2 如果满足条件(H$_1$)、(H$_2$), 则下面不等式成立:

$$|R_0 v(\tau_1)| \leqslant C_0 e^{-\kappa_0\tau_1},\qquad \tau_1 > 0,$$

这里 C_0, κ_0 也都是正数.

把 (y^*, u^*) 代入式(26)

$$I^* = \sqrt{2}\int_{y^0}^{y(0)}[P(y(0), 0) - P(y^*, 0)]^{1/2}\mathrm{d}y.$$

记 $V_0 = (Y_0(t, \mu), U_0(t, \mu))$ 为渐近解的零次近似, 其中

$$Y_0 = y(t) + \Pi_0 y(\tau_0) + R_0 y(\tau_1),$$

$$U_0 = \mu^{-1}(\Pi_0 u(\tau_0) + R_0 u(\tau_1)) + u_0(t).$$

根据文献[4]有下面结论:

$$|v_\mu^* - V_0| \leqslant C_0\mu,\ |I_\mu^* - \inf J| = O(\mu^2).$$

但是这样得到的 V_0 还不是允许解, 因为

$$Y_0(0, \mu) - y^0 = p_0(\mu) \neq 0,\ Y_0(T, \mu) - y^1 = p_1(\mu) \neq 0,$$

其中 $p_i(\mu) = O(e^{-T/\mu})$, $i = 0, 1$.

为了得到允许解 $v_{0\mu} = (y_{0\mu}, u_{0\mu})$ 需要加上磨光函数 $\theta_0(t, \mu)$, 这时

$$y_{0\mu} = Y_0(t, u) + \theta_0(t, \mu),\ u_{0\mu} = \dot{Y}_0(t, \mu),$$

这里 $\theta_0(t, \mu) = Ae^{-t/\mu} + Be^{-(t-T)/\mu}$, 而

$$A = (-p_0(\mu) + e^{-T/\mu}p_1(\mu))(1 - e^{-2T/\mu})^{-1},$$

$$B = (-p_1(\mu) + e^{-T/\mu}p_0(\mu))(1 - e^{-2T/\mu})^{-1}.$$

这时经过磨光加工得到的函数 $\hat{v}_{0\mu}$ 是允许解, 因为它满足两端边值

$$y_{0\mu}(0) = Y_0(0, \mu) + \theta_0(0, \mu) = y^0 + p_0(\mu) + A + Be^{T/\mu} = y^0,$$

$$y_{0\mu}(T) = Y_0(T, \mu) + \theta_0(T, \mu) = y^1 + p_1(\mu) + Ae^{-T/\mu} + B = y^1.$$

对允许解 $v_{0\mu}$ 仍有下面估计:

$$|v_0 - v_\mu^*| = O(\mu), \quad |J(U_0) - \inf J| = O(\mu^2).$$

综上所述, 可得下面的定理.

定理 1.1 如果满足条件(H_1)、(H_2), 那么 $v_{0\mu}$ 是问题(5)~(7)的极小化序列.

2 例 子

让我们来看下面例子:

$$J(v) = \int_0^2 (y - 1)^2 \mathrm{d}t \to \min_y, \tag{29}$$

$$\dot{y}(t) = u(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2, \tag{30}$$

$$y(0) = y(2) = 0. \tag{31}$$

显然, 当 $y = 1$ 时, $\min J = 0$, 因为常数 $y(t) = 1$ 不满足边值条件, 所以问题(29)~(31)在 $D = \left\{ y(t) \in C^2_{[0, T]} : y(0) = y(2) = 0 \right\}$ 上无解.

可以这样构造极小化序列

$$y_s(t) = \begin{cases} st, & 0 \leqslant t < \dfrac{1}{s}, \\ 1, & \dfrac{1}{s} \leqslant t < 2 - \dfrac{1}{s}, \\ s(2 - t), & 2 - \dfrac{1}{s} \leqslant t \leqslant 2. \end{cases}$$

显然

$$J(u_s) = \int_0^{1/s} (y - 1)^2 \mathrm{d}t + \int_{1/s}^{2-1/s} (y - 1)^2 \mathrm{d}t + \int_{2-1/s}^{2} (y - 1)^2 \mathrm{d}t =$$

$$2\int_0^{1/s} (st - 1)^2 \mathrm{d}t = \frac{2}{3s} \to 0 \quad (\text{当 } s \to \infty).$$

但是, 这样得到的极小化序列仅是按段光滑的. 为了得到在 D 上的极小化序列, 我们引进扩张泛函:

$$I_\mu(u) = \int_0^2 \left[(y - 1)^2 + \frac{\mu^2}{2} u^2 \right] \mathrm{d}t \to \min_u, \tag{32}$$

$$\dot{y}(t) = u(t), \tag{33}$$

$$y(0) = y(2) = 0. \tag{34}$$

这是一个奇摄动问题. 我们将这样构造零次渐近解:

$$v_0(t, \mu) = v_0(t) + \Pi_0 v(\tau_0) + R_0 v(\tau_1) + O(\mu), \tag{35}$$

其中正则项 $v_0(t)$ 由下面问题确定:

$$J_0(u_0) = \int_0^2 (y_0 - 1)^2 \mathrm{d}t \to \min_{y_0}, \tag{36}$$

$$\dot{y}_0 = u_0. \tag{37}$$

根据条件(H_1)有

$y_0(t) = 1,\ u_0(t) = 0.$

左边界层函数 $\Pi v(\tau_0, \mu)$ 满足下面变分问题:

$$\Pi_0 J = \int_0^{-\infty}\left[(\Pi_0 y)^2 + \frac{1}{2}(\Pi_0 u)^2\right] d\tau_0 \to \min_{\Pi_0 u}, \tag{38}$$

$$\Pi_0 y'(\tau_0) = \Pi_0 u(\tau_0), \tag{39}$$

$$\Pi_0 y(0) = -1,\ \Pi_0 y(+\infty) = 0. \tag{40}$$

而右边界层函数 $Rv(\tau_1, \mu)$ 满足的变分问题为

$$R_0 J = \int_{-\infty}^0\left((R_0 y)^2 + \frac{1}{2}(R_0 u)^2\right) d\tau_1 \to \min_{R_0 u}, \tag{41}$$

$$R_0 y'(\tau_1) = R_0 u(\tau_1), \tag{42}$$

$$R_0 y(0) = -1,\ R_0 y(-\infty) = 0. \tag{43}$$

对变分(38)～(41)进行变量替换 $d\tau_0 = d\Pi_0 y/(\Pi_0 u)$,

$$\Pi_0 J = \int_{-1}^0\left((\Pi_0 y)^2 + \frac{1}{2}(\Pi_0 u)^2\right)\frac{d\Pi_0 y}{\Pi_0 u} \to \min_{\Pi_0 u}. \tag{44}$$

从极值必要条件可得

$$\Pi_0^* u = -\sqrt{2}\,\Pi_0^* y. \tag{45}$$

把式(45)代入式(39)得到极值曲线 $\Pi_0^* y$ 所满足的初值问题:

$$\Pi_0 y'(\tau_0) = -\sqrt{2}\,\Pi_0^* y, \tag{46}$$

$$\Pi_0 y(0) = -1. \tag{47}$$

问题(46)、(47)存在惟一解 $\Pi_0 y(\tau_0) = -e^{-\sqrt{2}\tau_0}$. 类似地, 式(41)～(43)也有惟一的解 $R_0 y(\tau_1) = -e^{\sqrt{2}\tau_1}$.

这样我们就得到了零次近似

$$Y_0(t, \mu) = y_0(t) + \Pi_0 y(\tau_0) + R_0 y(\tau_1) = 1 - e^{-\sqrt{2}t/\mu} - e^{\sqrt{2}(t-2)/\mu}.$$

为了满足边值条件(31), 向 $Y_0(t, \mu)$ 添加磨光函数 $\theta_{0\mu}$, 即 $y_{0\mu} = Y_0(t, \mu) + \theta_0(t, \mu)$, 这里

$$\theta_0(t, \mu) = \frac{e^{-\sqrt{2}(t+2)/\mu} + e^{\sqrt{2}(t-4)/\mu}}{1 + e^{-2\sqrt{2}/\mu}}.$$

$$y_{0\mu} = 1 - e^{-\sqrt{2}t/\mu} - e^{-\sqrt{2}(t-2)/\mu} + \frac{e^{-\sqrt{2}(t+2)/\mu} + e^{\sqrt{2}(t-4)/\mu}}{1 + e^{-2\sqrt{2}/\mu}} =$$

$$1 - \frac{e^{-\sqrt{2}t/\mu} + e^{\sqrt{2}(t-2)/\mu}}{1 + e^{-2\sqrt{2}/\mu}}.$$

因为 $y_{0\mu}$ 满足边值条件

$$y_{0\mu}(0) = 1 - 1 = 0,\ y_{0\mu}(2) = 1 - 1 = 0.$$

所以它是允许解. 这时泛函的最优值是

$$J^*(U_0) = \int_0^2\left(\frac{e^{-\sqrt{2}t/\mu} + e^{\sqrt{2}(t-2)/\mu}}{1 + e^{-2\sqrt{2}/\mu}}\right)^2 dt = \frac{\sqrt{2}\mu}{2}(1 - e^{-4\sqrt{2}/\mu}) + 4e^{-2\sqrt{2}/\mu}.$$

显然, 当 $\mu \to 0$ 时, $J^*(U_0) \to \inf J = 0$. 因此$\left\{(y_{0\mu}, U_0)\right\}$是极小化序列.

[参　考　文　献]

[1] ±º½Î¶³± , ÅÄÅ¹À³ . Ãº¾Á ÄÀÄ º É¶Ã¼º¶ ±½À¸¶¿ºÑ ¶Ê¶¿º» º¿´Á½ÑÂ¿À À¹¾ÅË¶¿¿ÍÇ

Â±¿¶¿º»[M]. ÀÃ¼³± ±Å¼±, 1973.

[2] ÅÂ¾±ë . ÍÂÀ¸µ¶¿Í¶ ±µ±Éº ÁÄº¾±½Î¿À´À ÁÂ±½¶¿ºÑ[M]. ÀÃ¼³± ±Å¼±, 1977.

[3] ÅÂ¾±ë . Âº¿ÈºÁ ±ÃÊºÂ¶¿ºÑ³ ±µ±É±Ç ÁÂ±½¶¿ºÑ[M]. ÀÃ¼³± ±Å¼±, 1997.

[4] Tikhonov A N. Use of the regularization method in non-linear[J]. USSR Comput Math Math Phys, 1965, **5**(3): 93-107.

[5] ±º½Î¶³± , ÅÄÅ¹À³ . Ãº¾ÁÄÀÄºÉ¶Ã¼º¶ ¶ÄÀµÍ³ ¶ÀÂºº º¿´Å½ÑÂ¿ÍÇ À¹¾ÅË¶¿º»[M]. ÀÃ¼³± ÍÃÊ±Ñ ¼À½±, 1990.

[6] Dmitriev M G, NI Ming-kang. Asimptotics of contrast extremals in simplest vector variational problem [J]. Automation and Remote Control, 1998, (5): 41-52.

Minimizing Sequence of Variational Problems With Small Parameters

NI Ming-kang[1,2], LIN Wu-zhong[1,2]

(1. Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200062, P. R. China;
2. Division of Computational Science, E-Institute of Shanghai Universities, at SJTU, Shanghai 200030, P. R. China)

Abstract: A class of variational problems with small parameters had been studied. A zeroth order asymptotic solution of which was constructed. It was proved that the zeroth-order asymptotic solution is the minimizing sequence of variational problems when the small parameter approaches to zero.

Key words: small parameter; variational problem; minimizing sequence