

纤维体积分数可变的复合材料梁计及转动惯量和剪切变形时的固有频率*

Y·比德几里里¹, A·图斯², H·M·贝拉巴赫²,
I·米查贝², E·A·阿达·贝达牙², S·贝奈沙³

- (1. 特勒姆森大学 科学和工程学院 机械工程系, 阿尔及利亚;
2. 西迪贝勒阿巴斯大学 材料和水文实验室, 阿尔及利亚;
3. 西迪贝勒阿巴斯大学 数学实验室, 阿尔及利亚)

(陈立群推荐)

摘要: 研究纤维体积分数沿着厚度可变的对称复合材料梁的振动. 分析中考虑了一阶剪切变形和转动惯量. 该解法可适应任意边界条件. 纤维体积分数沿着梁的厚度方向以坐标的 m 幂次多项式形式连续渐变. 可变的纤维体积分数, 在对称复合材料梁中形成功能梯度材料(FGM), 会引起梁的某些振动特性的改变. 结果显示, 剪切变形、纤维体积分数和边界条件, 对复合材料梁的固有频率和振型的影响.

关键词: 自由振动; 功能梯度材料; 一阶剪切变形理论

中图分类号: O343.8 **文献标识码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2009.06.006

引 言

复合材料在航空航天、汽车、核能、船舶、生物医学和土木工程中有着广泛的应用. 这类材料具有强度/重量比高、刚度/重量比高、出色的抗疲劳特性和改变纤维排列方向的能力, 以此满足设计的要求. 由于这类材料都是由两层或多层材料组成, 由此带来了很多困难的问题, 如像内部开裂、脱层和纤维开裂. 因此需要了解这类材料的结构特性, 如位移、应力沿厚度的分布、固有频率、折断荷载、边界条件和外加荷载作用的影响等.

在航空航天工业中经常用到复合材料梁. 在航行器的设计和发展中, 航行器的安全是一个重要的设计因素, 一个有效的理论必须能够准确地预知这些复合材料梁的结构特征. 很多作者得到了梁问题的解析解. 经典的梁理论是由 Euler-Bernoulli^[1] 提出的, 由于该理论忽略了横向剪切和法向应变, 所以仅适用于高度不能很大的梁. Miller 和 Adams^[2] 在不考虑剪切变形和转动惯量的情况下, 研究了正交各向异性固定自由梁的振动特性. Vinson 和 Sierakowski^[3] 在经典层合理论的基础上提出了一种梁理论, 该文献还给出了不考虑剪切变形和转动惯量时,

* 收稿日期: 2008-08-12; 修订日期: 2009-04-01

作者简介: A. Tounsi, 教授, 博士(联系人, E-mail: tou_abdel@yahoo.com).

本文原文为英文, 黄绍红译, 张禄坤校.

复合材料简支梁自由振动的精确解. 为了克服经典梁理论的缺陷, Timoshenko^[4-5] 最先提出了考虑横向剪切变形作用的梁理论. 由于拉伸模量与横向剪切模量的比值高, 横向剪切变形对复合材料的影响是明显的, 因而经典的层合理论不能充分精确地预测固有频率. Teoh 和 Huang^[6] 利用能量方法, 考虑横向剪切变形和转动惯量, 给出了固定-自由正交各向异性梁自由振动的理论分析. Sankar^[7] 提出的梁理论, 类似于简单的 Euler-Bernoulli 梁理论, 适用于其弹性呈指数变化的功能梯度梁, 并分析了热应力. 其后, Sankar 和 Tzeng^[8] 得到了横向荷载作用下, 材料性质呈指数变化功能梯度梁的弹性解. Chakraborty 等^[9] 发展了一种剪切变形梁的精确有限元法, 用以研究双材料功能梯度梁的静态、自由振动和波传播问题. Martin 和 Leissa^[10] 研究了纤维含量可变的复合材料矩形板的平面应力问题. 含有平行于板边纤维的单层复合材料是宏观正交各向异性且非均匀的. 文献[11] 将分析中得到的应力作为一阶振动和弯曲的输入, 对可变纤维间距的复合材料进行了研究. 近来, Mefia 等^[12] 对加强混凝土耦合剪力墙, 含有可变间距纤维的粘结复合材料加强板, 进行了地震分析.

本文对纤维的体积分数沿着厚度变化时, 可产生剪切挠曲变形的复合材料梁给出了精确解. 在对称复合材料梁中, 由于纤维体积分数可变, 形成功能梯度材料(FGM)^[13-14], 会对某些振动特性产生影响. 本文解法适用任意边界条件, 本文结果可作为近似解的参考.

1 数学描述

考虑一对称复合材料梁(图 1). 类似于文献[15-16]的层合板解法, 基于一阶剪切变形理论, 假设复合材料梁的位移场为

$$U(x, z, t) = u(x, t) + z\phi(x, t), \quad W(x, z, t) = w(x, t), \quad (1)$$

其中 u, w 为中面上一点的位移, ϕ 为垂直于中面的转动.

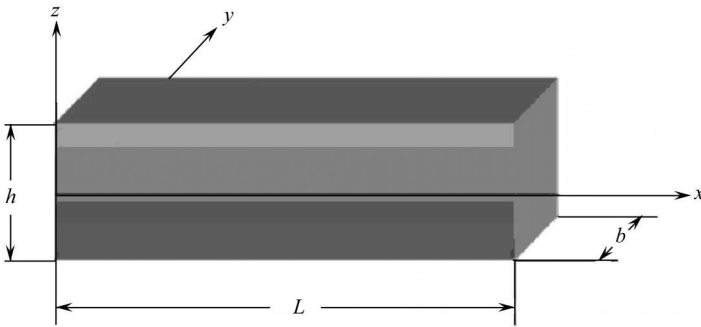


图 1 功能梯度梁的几何关系及坐标系

应变方程为

$$\epsilon_x = \epsilon_x^0 + z k_x, \quad \gamma_{xz} = \phi + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (2)$$

其中 $\epsilon_x^0 = \partial u / \partial x$, $k_x = \partial \phi / \partial x$.

根据本构关系, 两个应变分量(式(2))与其对应的应力分量之间关系为

$$\sigma_{xx} = E(z) \epsilon_x, \quad \tau_{xz} = G(z) \gamma_{xz}. \quad (3)$$

单轴向增强的刚度系数为

$$E(z) = E_f V_f(z) + E_m (1 - V_f(z)), \quad (4)$$

$$\frac{1}{G(z)} = \frac{V_f(z)}{G_f} + \frac{(1 - V_f(z))}{G_m}, \quad (5)$$

其中, 下标 f 和 m 分别表示纤维和基体. 方程(4)和(5)对混合材料是简单的近似结果, 但对于单向、连续的纤维复合材料是精确的^[10, 13, 17]. V_f 为纤维的体积分数, 沿厚度变化, 且 $V_1 = V_f(h/2)$, $V_2 = V_f(0)$. 正如文献^[13-14], 假设该对称梁纤维的体积分数为^[13-14]

$$V_f(z) = V_2 + (V_1 - V_2) \left[2 \frac{|z|}{h} \right]^m, \quad (6)$$

其中 m 为体积分数指数, 其值大于或等于 0. 图 2 示出取不同指数时, 体积分数沿厚度的分布.

本构方程可以写为

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ M_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{11} \\ B_{11} & D_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ k_x \end{Bmatrix}, \quad (7)$$

$$Q_{xz} = A_{55} \gamma_{xz}, \quad (8)$$

其中

$$(N_x \quad M_x) = \int_A \sigma_x(1, z) dA, \quad (9)$$

这里, A_{11} , B_{11} , D_{11} 分别为功能梯度材料梁的拉伸刚度、挠曲-拉伸耦合刚度和挠曲刚度, 且

$$\{A_{11}, B_{11}, D_{11}\} = b \int_{-h/2}^{h/2} E(z) \{1, z, z^2\} dz, \quad (10)$$

并定义 A_{55} 为剪切系数:

$$A_{55} = bK \int_{-h/2}^{h/2} G(z) dz, \quad (11)$$

其中 K 为剪切修正因子, 当横向剪应力呈抛物线变化时, 取值为 $5/6$.

1.1 运动方程

对本问题来说, 虚功原理的变分为

$$\begin{aligned} \delta \Pi = 0 = & \int_0^t \int_0^L [N_x \delta \varepsilon_x^0 + M_x \delta k_x + Q_{xz} \delta \gamma_{xz} + (I_1 u \delta + I_2 \phi) \delta u + \\ & I_1 u \delta u + (I_3 \phi + I_2 u \delta) \delta \phi] dx dt, \end{aligned} \quad (12)$$

其中

$$(I_1, I_2, I_3) = b \int_{-h/2}^{h/2} \rho(1, z, z^2) dz. \quad (13)$$

将方程(1)、(7)、(8)代入方程(12), 分部积分位移梯度, 并令 δu , δw , $\delta \phi$ 的系数分别为 0, 得到功能梯度复合材料梁的运动方程. 对一个纤维体积分数 V_f (方程(6)) 对称变化的复合梁来说, B_{11} 等于 0, 并且假设平面位移与弯曲引起的位移相比, 可忽略不计. 则运动方程简化为

$$A_{55} \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] - I_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (14)$$

$$D_{11} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - A_{55} \left[\phi + \frac{\partial w}{\partial x} \right] - I_3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0. \quad (15)$$

方程(14)、(15)用于确定纤维的体积分数可变且对称分布时, 复合材料梁的自由振动.

1.2 解方程

设方程的谐和解为

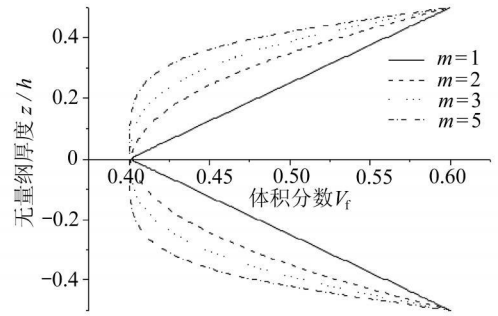


图 2 体积分数沿厚度的分布
($V_1 = 0.6$, $V_2 = 0.4$)

$$w = We^{i\alpha\zeta}, \quad (16)$$

$$\phi = \Psi e^{i\alpha\zeta}. \quad (17)$$

利用方程(16)和(17),方程(14)和(15)可表达为

$$\frac{d^2 \Psi}{d\zeta^2} + a^2 c^2 W + L \frac{d\Psi}{d\zeta} = 0, \quad (18)$$

$$c^2 \frac{d^2 \Psi}{d\zeta^2} - (1 - a^2 b^2 c^2) \Psi - \frac{1}{L} \frac{dW}{d\zeta} = 0, \quad (19)$$

其中

$$a^2 = \frac{I_1 L^4 \omega^2}{D_{11}}, \quad b^2 = \frac{I_3}{I_1 L^2}, \quad c^2 = \frac{D_{11}}{A_{55} L^2}, \quad \zeta = \frac{x}{L}. \quad (20)$$

消去 W 或 Ψ 后,方程(18)和(19)变换为两个去耦的微分方程:

$$\frac{d^4 W}{d\zeta^4} + a^2(b^2 + c^2) \frac{d^2 W}{d\zeta^2} - a^2(1 - a^2 b^2 c^2) W = 0, \quad (21)$$

$$\frac{d^4 \Psi}{d\zeta^4} + a^2(b^2 + c^2) \frac{d^2 \Psi}{d\zeta^2} - a^2(1 - a^2 b^2 c^2) \Psi = 0. \quad (22)$$

方程(21)和(22)的解为^[18]

情况(i) 当 $[(b^2 - c^2) + 4/a^2]^{1/2} > (b^2 + c^2)$ 时,

$$W = A_1 \cosh(a\alpha\zeta) + A_2 \sinh(a\alpha\zeta) + A_3 \cos(a\beta\zeta) + A_4 \sin(a\beta\zeta), \quad (23)$$

$$\Psi = B_1 \sinh(a\alpha\zeta) + B_2 \cosh(a\alpha\zeta) + B_3 \sin(a\beta\zeta) + B_4 \cos(a\beta\zeta), \quad (24)$$

其中

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1, (b^2 + c^2) + [(b^2 - c^2) + 4/a^2]^{1/2} \right\}^{1/2}. \quad (25)$$

情况(ii) 当 $[(b^2 - c^2) + 4/a^2]^{1/2} < (b^2 + c^2)$ 时,

$$W = A_1 \cos(a\alpha'\zeta) + iB_2 \sin(a\alpha'\zeta) + A_3 \cos(a\beta\zeta) + A_4 \sin(a\beta\zeta), \quad (26)$$

$$\Psi = iB_1 \sin(a\alpha'\zeta) + B_2 \cos(a\alpha'\zeta) + B_3 \sin(a\beta\zeta) + B_4 \cos(a\beta\zeta), \quad (27)$$

其中 $\alpha' = \alpha/i$.

与耦合方程(18)和(19)相关的常数为

$$\begin{cases} B_1 = -\frac{a(\alpha'^2 + c^2)}{L\alpha} A_1, & B_2 = -\frac{a(\alpha'^2 + c^2)}{L\alpha} A_2, \\ B_3 = \frac{a(\beta^2 - c^2)}{L\alpha} A_3, & B_4 = -\frac{a(\beta^2 - c^2)}{L\beta} A_4. \end{cases} \quad (28)$$

通常,该梁有如下6个边界条件:

两端简支(SS) 当 $\zeta = 0, 1$:

$$W = 0, \quad \frac{d\Psi}{d\zeta} = 0; \quad (29)$$

固支-固支(CC) 当 $\zeta = 0, 1$:

$$W = 0, \quad \Psi = 0; \quad (30)$$

自由端自由端(FE) 当 $\zeta = 0, 1$:

$$\frac{d\Psi}{d\zeta} = 0, \quad \frac{1}{L} \frac{dW}{d\zeta} + \Psi = 0. \quad (31)$$

上述边界条件可组合成另外3种边界条件:简支-自由(SF),固支-自由(CF),固支-简支(CS).利用情况(i)和情况(ii)下的解,梁的6种边界条件,可表示为如下矩阵方程:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ L_1 & L_2 & L_3 & L_4 \\ L_5 & L_6 & L_7 & L_8 \\ L_9 & L_{10} & L_{11} & L_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (32)$$

为简单计, 附录仅对情况 (i) 下的解给出 SS 和 CF 梁的系数 L_1, L_2, \dots 与情况 (i) 对应, 梁的 6 种边界条件下的频率方程为

SS

$$\sin(a\beta) = 0; \quad (33)$$

CC

$$2 - 2\cosh(a\alpha)\cos(a\beta) + \frac{a}{(1 - a^2b^2c^2)^{1/2}}[a^2c^2(b^2 - c^2)^2 + (3c^2 - b^2)]\sinh(a\alpha)\sin(a\beta) = 0; \quad (34)$$

FF

$$2 - 2\cosh(a\alpha)\cos(a\beta) + \frac{a}{(1 - a^2b^2c^2)^{1/2}}[a^2c^2(b^2 - c^2)^2 + (3b^2 - c^2)]\sinh(a\alpha)\sin(a\beta) = 0; \quad (35)$$

SF

$$\frac{\alpha}{\beta}\tanh(a\alpha) - \frac{\alpha^2 + b^2}{\alpha^2 + c^2}\tan(a\beta) = 0; \quad (36)$$

CF

$$2 + [a^2(b^2 - c^2) + 2]\cosh(a\alpha)\cos(a\beta) - \frac{a(b^2 + c^2)}{(1 - a^2b^2c^2)}\sinh(a\alpha)\sin(a\beta) = 0; \quad (37)$$

CS

$$\frac{\alpha(\alpha^2 + b^2)}{\beta(\alpha^2 + c^2)}\tanh(a\alpha) - \tan(a\beta) = 0. \quad (38)$$

与情况 (ii) 相应的频率方程为

SS

$$\sin(a\beta) = 0; \quad (39)$$

CC

$$2 - 2\cos(a\alpha')\cos(a\beta) + \frac{a}{(a^2b^2c^2 - 1)^{1/2}}[a^2c^2(b^2 - c^2)^2 + (3c^2 - b^2)]\sin(a\alpha')\sin(a\beta) = 0; \quad (40)$$

FF

$$2 - 2\cos(a\alpha')\cos(a\beta) + \frac{a}{(a^2b^2c^2 - 1)^{1/2}}[a^2b^2(b^2 - c^2)^2 + (3b^2 - c^2)]\sin(a\alpha')\sin(a\beta) = 0; \quad (41)$$

SF

$$\frac{\alpha'}{\beta}\tan(a\alpha') + \frac{\alpha^2 + b^2}{\alpha^2 + c^2}\tan(a\beta) = 0; \quad (42)$$

CF

$$2 + [a^2(b^2 - c^2)^2 + 2]\cos(a\alpha')\cos(a\beta) -$$

$$\frac{a(b^2 + c^2)}{(a^2 b^2 c^2 - 1)^{1/2}} \sin(a\alpha') \sin(a\beta) = 0; \tag{43}$$

CS

$$\frac{\alpha'(\alpha^2 + b^2)}{\beta(\alpha^2 + c^2)} \tanh(a\alpha') + \tan(a\beta) = 0. \tag{44}$$

应该说明, 当 $\omega^2 < A_{55}/I_3$ 时, 与情况(i) 相应的频率方程是适用的; 当 $\omega^2 > A_{55}/I_3$ 时, 与情况(ii) 相应的频率方程是适用的.

2 数值结果

功能梯度梁各组分材料的性质为

$$E_m = 3.5 \text{ GPa}, G_m = 1.6 \text{ GPa}, \rho_m = 1200 \text{ kg/m}^3,$$

$$E_f = 137.76 \text{ GPa}, \rho_f = 1450 \text{ kg/m}^3.$$

为了说明本文公式的有效性, 表 1 示出简支复合材料功能梯度梁 ($m = 1$), 长跨型 ($L/h = 120$) 和短跨型 ($L/h = 15$) 梁前面 5 个固有频率的比较.

表 1 简支功能梯度材料梁 ($m = 1$) 固有频率的比较

| L/h | 振型 n | ω / kHz | |
|--------------------|--------|-----------------------|----------|
| | | 剪切变形理论 | 经典梁理论 |
| 120 ($h = 0.25$) | 1 | 0.004 7 | 0.004 7 |
| | 2 | 0.018 7 | 0.018 7 |
| | 3 | 0.041 8 | 0.041 8 |
| | 4 | 0.073 6 | 0.073 6 |
| | 5 | 0.113 6 | 0.113 6 |
| 15 ($h = 1$) | 1 | 0.034 6 | 0.003 75 |
| | 2 | 0.114 8 | 0.149 8 |
| | 3 | 0.209 6 | 0.335 6 |
| | 4 | 0.306 7 | 0.593 0 |
| | 5 | 0.402 6 | 0.919 0 |

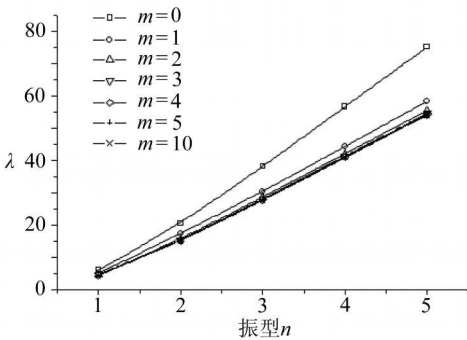


图 3 材料分布参数 m 对梁的频率参数 λ 和振型的影响 (两端简支, $V_1 = 0.6, V_2 = 0.4$)

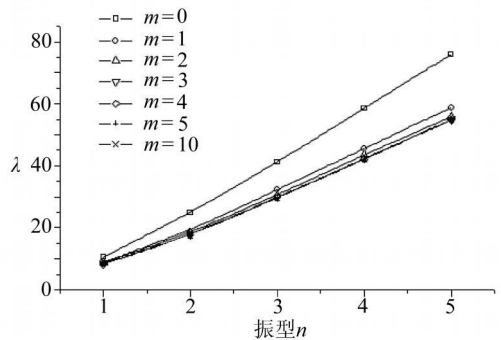


图 4 材料分布参数 m 对梁的频率参数 λ 和振型的影响 (两端固支, $V_1 = 0.6, V_2 = 0.4$)

在所有情况下, 取梁的宽度为单位 1. 对长跨型梁, 剪切变形理论(SDT) 和经典梁理论(CBT) 得出的结果总是相同的, 说明剪切变形没有产生影响. 对短跨型梁, CBT 解得出的固有

频率都大于预期, 说明剪切变形对高阶振型有影响.

无量纲频率参数为

$$\lambda = \frac{\omega L^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_f}{E_f}} \quad (45)$$

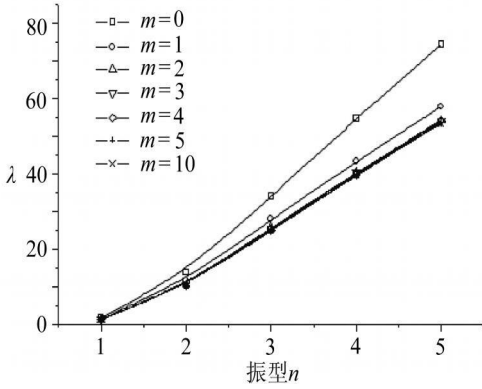


图5 材料分布参数 m 对梁的频率参数 λ 和振型的影响(一端固支一端自由, $V_1 = 0.6, V_2 = 0.4$)

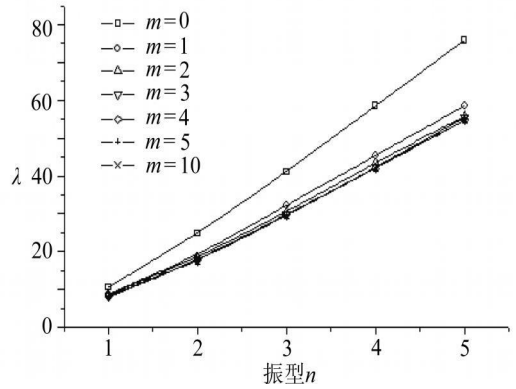


图6 材料分布参数 m 对梁的频率参数 λ 和振型的影响(一端固支一端简支, $V_1 = 0.6, V_2 = 0.4$)

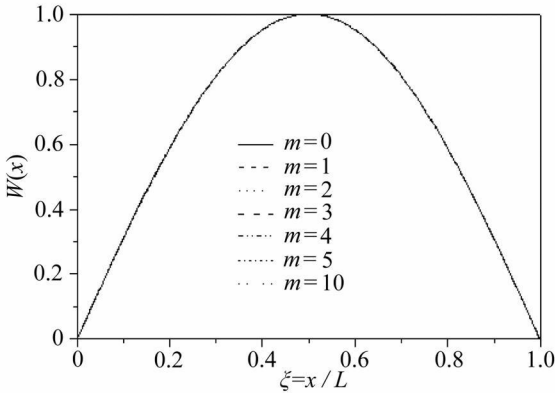


图7(a) 一阶振型

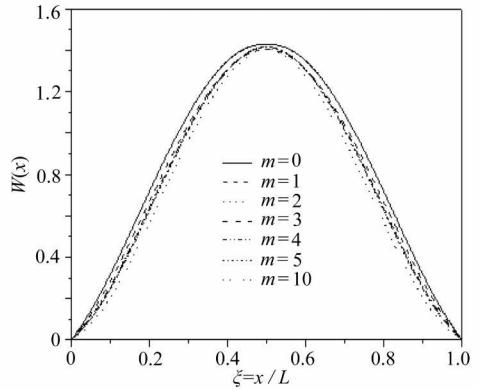


图8(a) 一阶振型

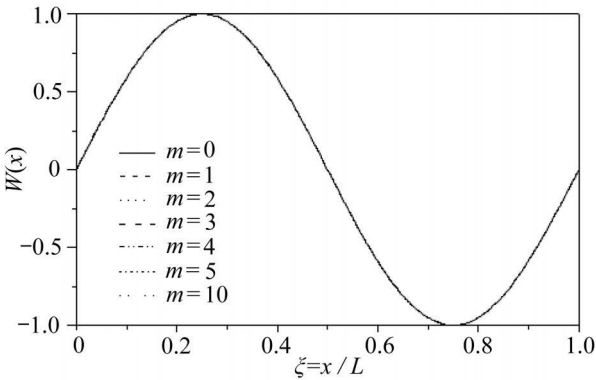


图7(b) 二阶振型

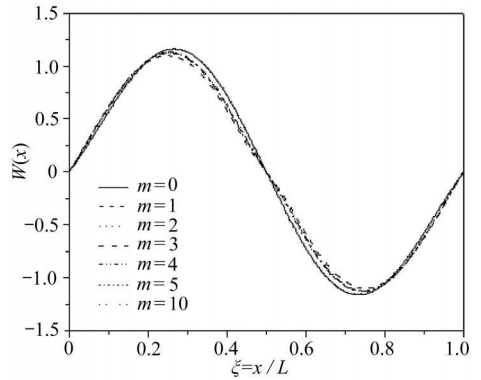


图8(b) 二阶振型

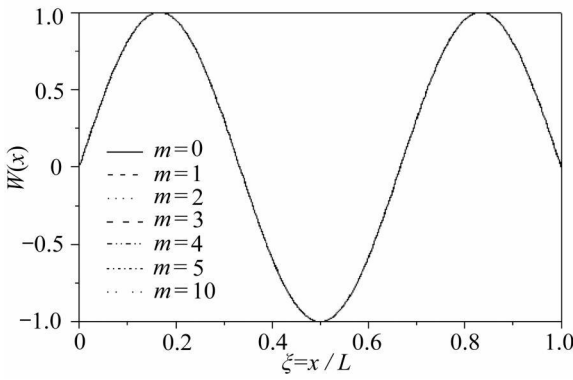


图 7(c) 二阶振型

图 7 不同体积分数指数 m 对简支梁前 3 阶振型的影响 ($V_1 = 0.6, V_2 = 0.4$)

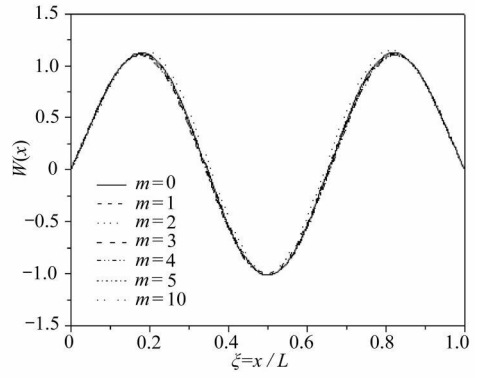


图 8(c) 二阶振型

图 8 不同体积分数指数 m 对固定梁前 3 阶振型的影响 ($V_1 = 0.6, V_2 = 0.4$)

图 3~ 图 6 给出了, $L/h = 15$ 时, 对不同的材料分布, 不同边界条件下的无量纲频率参数. 结果表明, 体积分数指数 m 对于基振型的影响非常小. 但是, 对于较高阶振型 n , 特别是当 $m \ll 1$ 时, 体积分数指数 m 的影响是显著的; 当 $m > 1$ 时, 体积分数指数 m 的影响又很小.

图 7 给出不同材料分布时, 两端简支梁的前 3 阶振型的形状. 我们发现, 参数 m 对简支梁振型没有影响.

图 8 给出不同体积分数指数 m 对固支梁前 3 阶振型的影响. 与简支梁情况不同, 体积分数指数 m 对固定梁振型有影响.

3 结 论

本文应用一阶剪切变形理论, 研究了纤维体积分数可变的复合材料梁的自由振动. 假设梁的材料性质沿厚度方向呈幂律梯度连续变化. 对于梁通常遇到的各种边界条件, 给出了数值结果, 这些结果可作为近似解的参考.

附 录

两端简支梁

$$L_1 = -\frac{a^2(\alpha^2 + c^2)}{L}, L_2 = 0, L_3 = \frac{a^2(\beta^2 - c^2)}{L}, L_4 = 0, L_5 = \cosh(a\alpha), L_6 = \sinh(a\alpha),$$

$$L_7 = \cos(a\beta), L_8 = \sin(a\beta), L_9 = -\frac{a^2(\alpha^2 + c^2)}{L} \cosh(a\alpha), L_{10} = -\frac{a^2(\alpha^2 + c^2)}{L} \sinh(a\alpha),$$

$$L_{11} = \frac{a^2(\beta^2 - c^2)}{L} \cos(a\beta), L_{12} = \frac{a^2(\beta^2 - c^2)}{L} \sin(a\beta).$$

一端固支一端自由梁

$$L_1 = 0, L_2 = -\frac{\alpha^2 + c^2}{\alpha}, L_3 = 0, L_4 = -\frac{\beta^2 - c^2}{\beta}, L_5 = -(\alpha^2 + c^2) \cosh(a\alpha),$$

$$L_6 = -(\alpha^2 + c^2) \sinh(a\alpha), L_7 = (\beta^2 - c^2) \cos(a\beta), L_8 = (\beta^2 - c^2) \sin(a\beta),$$

$$L_9 = \left[\alpha - \frac{\alpha^2 + c^2}{\alpha} \right] \sinh(a\alpha), L_{10} = \left[\alpha - \frac{\alpha^2 + c^2}{\alpha} \right] \cosh(a\alpha),$$

$$L_{11} = -\left[\beta - \frac{\beta^2 - c^2}{\beta} \right] \sin(a\beta), L_{12} = \left[\beta - \frac{\beta^2 - c^2}{\beta} \right] \cos(a\beta).$$

[参 考 文 献]

[1] Zienkiewicz O C, Taylor R L. The Finite Element Method [M]. Vol 1. Singapore: McGraw-Hill, 1989.

- [2] Miller A K, Adams D F. An analytic means of determining the flexural and torsional resonant frequencies of generally orthotropic beams[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1975, **41**(4): 433-439.
- [3] Vinson J R, Sierakowski R L. *The Behavior of Structures Composed of Composite Materials* [M]. Dordrecht, The Netherlands: Martinus Nijhoff, 1986, 141.
- [4] Timoshenko S P. On the correction for shear of differential equation for transverse vibration of prismatic bars[J]. *Philos Mag Ser 6*, 1921, **41**(245): 744-746.
- [5] Timoshenko S P. On the transverse vibration of bars of uniform cross-section[J]. *Philos Mag Ser 6*, 1922, **43**: 125-131.
- [6] Teoh L S, Huang C C. The vibration of beams of fiber reinforced material[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1977, **51**(4): 467-473.
- [7] Sankar B V. An elasticity solution for functionally graded beams[J]. *Composite Science and Technology*, 2001, **61**(5): 689-696.
- [8] Sankar B V, Tzeng J T. Thermal stresses in functionally graded beams[J]. *AIAA Journal*, 2002, **40**(6): 1228-1232.
- [9] Chakraborty A, Gopalakrishnan S, Reddy J N. A new beam finite element for the analysis of functionally graded materials[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2003, **45**(3): 519-539.
- [10] Martin A F, Leissa A W. Application of the Ritz method to plane elasticity problems for composite sheets with variable fibre spacing[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1989, **28**(8): 1813-1825.
- [11] Leissa A W, Martin A F. Vibration and buckling of rectangular composite plates with variable fiber spacing[J]. *Composite Structures*, 1990, **14**(4): 339-357.
- [12] Meftah S A, Yeghneim R, Tounsi A, et al. Seismic behavior of RC coupled shear walls repaired with CFRP laminates having variable fibers spacing[J]. *Construction and Building Materials*, 2007, **21**(8): 1664-1671.
- [13] Wetherhold R C, Seelman S, Wang J. The use of functionally graded materials to eliminate or control thermal deformation[J]. *Composite Science and Technology*, 1996, **56**(9): 1099-1104.
- [14] Benatta M A, Mechab I, Tounsi A, et al. Static analysis of functionally graded short beams including warping and shear deformation effects[J]. *Computational Materials Science*, 2008, **44**(2): 465-773.
- [15] Whitney J M, Pagano N J. Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates[J]. *J Appl Mech*, 1970, **37**(4): 1031-1036.
- [16] Chandrashekhara K, Krishnamurthy K, Roy S. Free vibration of composite beams including rotary inertia and shear deformation[J]. *Composite Structures*, 1990, **14**(4): 269-279.
- [17] Daniel I M, Ishai O. *Engineering Mechanics of Composite Materials* [M]. New York: Oxford University Press, 1994.
- [18] Huang T C. The effect of rotary inertia and of shear deformation on the frequency and normal mode equations of uniform beams with simple end condition[J]. *J Appl Mech*, 1961, **28**: 579-584.

Natural Frequencies of Composite Beams Having Variable Fiber Volume Fraction Including Rotary Inertia and Shear Deformation

Y. Bedjilili¹, A. Tounsi², H. M. Berrabah²,
I. Mechab², E. A. Adda Bedia², S. Benaissa³

(1. D partement de G nie M canique, Facult des Sciences de l' ing nieur,
Universit de Tlem cen, Alg rie;

2. Laboratoire des Mat riaux et Hydrologie,
Universit de Sidi Bel Abbes, Alg rie;

3. Laboratoire de Math matiques, Universit de Sidi Bel Abbes, Alg rie)

Abstract: The vibration analysis of symmetrically composite beams having a variable fiber volume fraction through the thickness was concerned with. First-order shear deformation and rotary inertia were included in the analysis. The solution procedure is applicable to arbitrary boundary conditions. Continuous gradation of the fiber volume fraction is modelled in the form of an m th power polynomial of the coordinate axis in thickness direction of the beam. By varying the fiber volume fraction within the symmetric composite beam to create a functionally graded material (FGM), certain vibration characteristics can be affected. Results have been presented to demonstrate the effect of shear deformation, fiber volume fraction and boundary conditions on the natural frequencies and mode shapes of composite beams.

Key words: free vibration; functionally graded materials; first-order shear deformation theory