

传送带系统主参数共振分析*

杨志安, 李高峰

(唐山学院 唐山市结构与振动工程实验室, 河北 唐山 063000)

(陈立群推荐)

摘要: 基于 Coriolis 加速度和 Lagrange 应力公式, 利用 Newton 定律得到了运动带的横向振动运动方程. 运用多尺度法得到了传送带系统主参数共振的近似解. 分析了调谐参数、带的横截面积、黏弹性参数、轴向速度不仅影响非平凡稳态响应的幅值, 并且影响其存在区域, 揭示了一些新的动力学现象.

关键词: 传送带; 主参数共振; 多尺度法

中图分类号: O321 文献标识码: A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2009.06.009

引 言

皮带传动是机械工程中最普遍应用的传动装置之一. Abrate^[1] 分析了功率传动带与运转中要产生轴向、横向及扭转运动. 对适用于分析皮带自由振动和受迫振动的模型进行了讨论, 并讨论了皮带和张力的、输送速度、抗弯刚度、支承柔度、大位移、带和带轮的缺陷造成的影响. Moon 和 Wickert^[2] 通过实验法和解析法研究了功率传送带系统的非线性振动. 通过摄动法可得到近似共振响应的振幅, 比较实验测试和直接数字仿真获得的非线性模型. Pellicano^[3] 研究了传动带的主共振和参数共振的非线性, 从实验和理论上进行了分析, 并考虑了轮的偏心对其影响, 对比了简化模型和实验数据. Zhang 和 Zu^[4-7] 对黏弹性传动带的非线性振动分别进行了自由振动分析和强迫振动分析, 运用多尺度法和摄动法^[8], 得到了非线性振动的频率和振幅. 分析了参数激励的黏弹性传动带的非线性振动的动态响应和稳定性. 研究了弹性参数、黏弹性参数、轴向运动速度和几何非线性等对频率和振幅的影响. Chen^[9-10] 研究了粘弹性轴向变速运动弦的稳态响应及其稳定性, 对轴向运动弦的响应的研究以及其控制进行了全面地评论. 本文研究传送带系统主参数共振, 并分析了带的横截面积、谐调值、黏弹性参数、轴向运动速度等对系统的影响.

1 运动方程

设两个刚性轮由具有非线性材质的皮带联接, 关于传送带系统的结构简图如图 1 所示.

* 收稿日期: 2008-09-22; 修订日期: 2009-05-13

基金项目: 河北省自然科学基金资助项目(A200900997)

作者简介: 杨志安(1963—), 男, 河北秦皇岛人, 教授, 博士(联系人. Tel: + 86-315-2028305; E-mail: yangzhian@eyou.com).

由图 1 可知主动轮半径为 r_1 , 从动轮半径为 r_2 . 研究密度为 ρ , 横截面积为 A , 初张力为 P_0 , 横向位移为 $V(x, t)$, 轴向运动速度为时间 t 的已知函数 $c(t)$ 的运动带. 基于 Coriolis 加速度和 Lagrange 应力公式, 利用 Newton 第二定律, 仅考虑 y 方向的横向振动, 可导出运动带的横向运动方程^[11]:

$$\left[\frac{P_0}{A} + \sigma \right] V_{xx} + V_x \alpha_x = \rho \left[\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + 2c \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t} + c^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{dc}{dt} \frac{\partial V}{\partial x} \right], \quad (1)$$

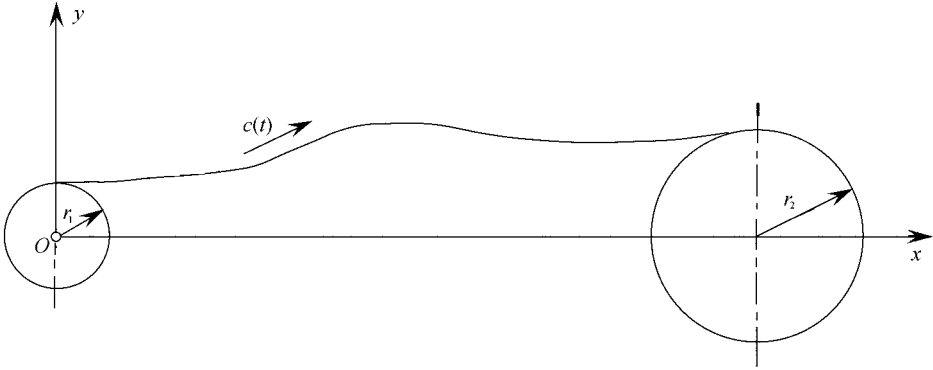


图 1 力学模型

其中 V_x, V_t 分别表示 V 对 x, t 的偏导数, σ 为应力.

系统的齐次边界条件为

$$V(0, t) = 0, \quad V(L, t) = 0. \quad (2)$$

由一维线性微分黏弹性构成规律可得

$$\sigma(t) = E^* \varepsilon(t), \quad (3)$$

其中 E^* 是线性微分算子, 由传送带材料的黏弹性特性决定. 应用线性微分黏弹性构成规律, 方程(3)考虑 Lagrange 应变成分, 应力为

$$\sigma(t) = E^* \left[\frac{1}{2} V_x^2 \right]. \quad (4)$$

将方程(4)代入方程(1)得

$$\rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + 2\rho c \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t} + \left[\rho c^2 - \frac{P_0}{A} \right] \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \rho \frac{dc}{dt} \frac{\partial V}{\partial x} = V_{xx} E^* \left[\frac{1}{2} V_x^2 \right] + V_x \left\{ E^* \left[\frac{1}{2} V_x^2 \right] \right\}_x. \quad (5)$$

设轴向运动速度为平均速度与小简谐波的叠加^[12]

$$c(t) = c_0 + c_1 \cos(\Omega t), \quad (6)$$

将式(6)代入式(5), 并将所得结果变换为无量纲形式, 得到

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} + 2(\gamma_0 + \gamma_1 \cos(\omega \tau)) \frac{\partial^2 v}{\partial \tau \partial \xi} + \left[\gamma_0^2 + \frac{\gamma_1^2}{2} + 2\gamma_0 \gamma_1 \cos(\omega \tau) + \frac{\gamma_1^2}{2} \cos(2\omega \tau) - 1 \right] \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - \omega \gamma_1 \sin(\omega \tau) \frac{\partial v}{\partial \xi} = N(v), \quad (7)$$

其中

$$\begin{cases} v = \frac{V}{L}, \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad \tau = t \left(\frac{P_0}{\rho AL^2} \right)^{1/2}, \quad y_0 = c_0 \left(\frac{\rho l}{P_0} \right)^{1/2}, \\ y_1 = c_1 \left(\frac{\rho l}{P_0} \right)^{1/2}, \quad \omega = \Omega \left(\frac{\rho AL^2}{P_0} \right)^{1/2}, \quad E = \frac{E^* A}{P_0}. \end{cases} \quad (8)$$

非线性算子 $N(v)$ 定义为

$$N(v) = E \left[\frac{1}{2} v \xi^2 \right] v \xi \xi + v \xi \left\{ E \left[\frac{1}{2} v \xi^2 \right] \right\} \xi. \quad (9)$$

式(10)和式(11)是黏弹性模型有效运动的归纳方程. 本文普遍运用 Kelvin 黏弹性模型, 描述带材料的黏弹性性质. Kelvin 黏弹性模型相应的线性无量纲微分算子 E 是

$$E = E_e + E_v \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad (10)$$

其中

$$E_e = \frac{E_0 A}{P_0}, \quad (11)$$

$$E_v = \eta \sqrt{\frac{A}{\rho P_0 L^2}}. \quad (12)$$

E_0 是带的弹性模量, η 是阻尼器的动态粘滞度.

将式(10)代入式(9), 通过偏微分的推导, Kelvin 黏弹性模型的非线性算子 $N(v)$ 变为

$$N(v) = \frac{3}{2} E_e v \xi^2 v \xi \xi + E_v \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{2} v \xi^2 \right] v \xi \xi + v \xi E_v \frac{\partial}{\partial \tau} (v \xi v \xi \xi). \quad (13)$$

其中式(13)右边的第1项是关于弹性的非线性项, 后边的两项是关于黏弹性的非线性项.

引入下列质量、陀螺和刚度算子

$$M = I, \quad G = 2 y_0 \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad K = (y_0^2 - 1) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}, \quad (14)$$

其中算子 M 和 K 在亚临界轴向速度下对称正定, 表示 Coriolis 加速度分量算子 G 是反对称的.

因此将式(7)改写为标准的形式

$$\begin{aligned} M v \xi \xi + G v \xi + K v &= N(v) - 2 y_1 \cos(\omega \tau) \frac{\partial^2 v}{\partial \tau \partial \xi} - \\ &\left[\frac{y_1^2}{2} + 2 y_0 y_1 \cos(\omega \tau) + \frac{y_1^2}{2} \cos(2\omega \tau) \right] \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \omega y_1 \sin(\omega \tau) \frac{\partial v}{\partial \xi}. \end{aligned} \quad (15)$$

2 主参数共振分析

引入小无量纲参数 ε , 将式(15)改写为带弱非线性项和弱参数激励项的连续陀螺系统:

$$\begin{aligned} M v \xi \xi + G v \xi + K v &= \varepsilon \left\{ N(v) - 2 \delta y_0 \cos(\omega \tau) \frac{\partial^2 v}{\partial \tau \partial \xi} - \right. \\ &\left. \frac{\delta y_0^2}{2} (\delta + 4 \cos(\omega \tau) + \delta \cos(2\omega \tau)) \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \delta y_0 \omega \sin(\omega \tau) \frac{\partial v}{\partial \xi} \right\}, \end{aligned} \quad (16)$$

其中 $\varepsilon \delta = y_1 / y_0$.

将多尺度法直接应用于式(16), 求得一阶近似解为

$$v(\xi, \tau, \varepsilon) = v_0(\xi, T_0, T_1) + \varepsilon v_1(\xi, T_0, T_1) + \dots, \quad (17)$$

其中快尺度 $T_0 = \tau$ 刻画接近 ω 或 ω_k (相应于受摄动线性系统的一个固有频率), 慢尺度 $T_1 = \varepsilon \tau$ 刻画由于非线性和可能的共振导致的幅值和相位调制.

利用偏微分规则, 时间派生项为

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \dots, \quad (18)$$

将式(17)代入式(16), 比较 ε 同次幂系数得到

$$M \frac{\partial^2 v_0}{\partial T_0^2} + G \frac{\partial v_0}{\partial T_0} + K v_0 = 0, \quad (19)$$

$$M \frac{\partial^2 v_1}{\partial T_0^2} + G \frac{\partial v_1}{\partial T_0} + K v_1 = -2M \frac{\partial^2 v_0}{\partial T_0 \partial T_1} - G \frac{\partial v_0}{\partial T_1} + N(v_0) - 2\delta y_0 \cos(\omega \tau) \frac{\partial^2 v_0}{\partial T_0 \partial \xi} - \frac{\delta y_0^2}{2} (\delta + 4\cos(\omega \tau) + \delta \cos(2\omega \tau)) \frac{\partial^2 v_0}{\partial \xi^2} + \delta y_0 \omega \sin(\omega \tau) \frac{\partial v_0}{\partial \xi}. \quad (20)$$

方程式(20)的右边所有激励分量都是按 v_0 求得.

方程(19)的解^[13]为

$$v_0 = \phi_k(\xi) A_k(T_1) e^{i\omega_k T_0} + \phi_k(\xi) A_k(T_1) e^{-i\omega_k T_0}, \quad (21)$$

其中 ω_k 为第 k 阶固有频率, ϕ_k 为第 k 阶本征函数. 对线性运动带, ω_k 和 ϕ_k 为^[13]

$$\omega_k = k\pi(1 - \nu), \quad (22)$$

$$\phi_k = \sqrt{2} \sin(k\pi\xi) e^{ik\pi\xi}. \quad (23)$$

若涨落频率接近于系统某固有频率, 可能出现共振. 以下重点讨论主参数共振问题, 引入主参数调谐参数 σ , 由下式确定:

$$\omega = \omega_k + \varepsilon\sigma, \quad \sigma = O(1). \quad (24)$$

将式(21)和式(24)代入式(20), 可得

$$M \frac{\partial^2 v_1}{\partial T_0^2} + G \frac{\partial v_1}{\partial T_0} + K v_1 = NST - 2M i \omega_k \phi_k \frac{\partial A_k}{\partial T_1} e^{i\omega_k T_0} - G \phi_k \frac{\partial A_k}{\partial T_1} e^{i\omega_k T_0} + M_{2k} (3E_e + 2i\omega_k E_\nu) A_k^2 A_k e^{i\omega_k T_0} - \frac{\delta^2 y_0^2}{2} \phi_k A_k e^{i\omega_k T_0} - \frac{\delta^2 y_0^2}{4} \phi_k A_k e^{i(\omega_k + 2\varepsilon\sigma)T_0} + cc, \quad (25)$$

其中 M_{2k} 是非线性算子, 可定义为

$$M_{2k} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi_k}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial \phi_k}{\partial \xi} \frac{\partial \phi_k}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial \xi^2} \right], \quad (26)$$

而 NST 表示不会产生永年项的各项.

仅当可解条件成立时, 方程(25)有有界解. 得消除永年项的条件为

$$-2i\omega_k m_k \dot{A}_k - g_k \dot{A}_k + m_{2k} (3E_e + 2i\omega_k E_\nu) A_k^2 A_k - \frac{\delta^2 y_0^2}{2} l_k A_k - \frac{\delta^2 y_0^2}{4} h_k A_k e^{i2\varepsilon\sigma T_0} = 0, \quad (27)$$

其中

$$\begin{cases} m_k = \langle M \phi_k, \phi_k \rangle, & g_k = \langle G \phi_k, \phi_k \rangle, & m_{2k} = \langle M_{2k}, \phi_k \rangle, \\ l_k = \langle \phi_k'', \phi_k \rangle, & h_k = \langle \phi_k'', \phi_k \rangle. \end{cases} \quad (28)$$

而内积的定义为

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle = \int_0^1 \phi_n \phi_m d\xi. \quad (29)$$

将式(28)代入式(29), 可得

$$\begin{cases} m_k = \langle M\phi_k, \phi_k \rangle = 1, & g_k = \langle G\phi_k, \phi_k \rangle = 2ik\pi\gamma_0^2, \\ m_{2k} = \langle M_{2k}, \phi_k \rangle = -\frac{1}{4}k^4\pi^4(3 + 2\gamma_0^2 + 4\gamma_0^4), \\ l_k = \langle \phi_k'', \phi_k \rangle = -k^2\pi^2(1 + \gamma_0^2), & h_k = \langle \phi_k'', \phi_k \rangle = \frac{ik\pi}{2\gamma_0}(1 - e^{-2ik\pi\gamma_0}). \end{cases} \quad (30)$$

令

$$A_k(T_1) = \frac{a_k(T_1)}{2}e^{j\beta_k}, \quad A_k(T_1) = \frac{a_k(T_1)}{2}e^{-j\beta_k}. \quad (31)$$

将式(30)的 m_k, g_k, l_k, h_k 和式(31)代入式(27), 分离实虚部, 令 $\varphi_k = (\sigma T_1 - \beta_k)$, 进一步得确定系统主参数共振一次近似解的振幅 a_k 和相位 φ_k 应满足的微分方程:

$$\begin{cases} \dot{a}_k = C_1 a_k^3 + C_2 a_k \cos(2\varphi_k) + C_3 a_k \sin(2\varphi_k), \\ a_k \dot{\varphi}_k = \alpha_k + C_4 a_k^3 + C_5 a_k + C_3 a_k \cos(2\varphi_k) - C_2 a_k \sin(2\varphi_k), \end{cases} \quad (32)$$

其中

$$\begin{cases} C_1 = \frac{(1 - \gamma_0^2)E_v m_{2k}}{4}, & C_2 = -\frac{\delta\gamma_0^2}{16}(1 - \cos(2k\pi\gamma_0)), \\ C_3 = \frac{\delta\gamma_0^2}{16}\sin(2k\pi\gamma_0), & C_4 = \frac{3E_e m_{2k}}{8k\pi}, & C_5 = \frac{\delta^2\gamma_0^2 k\pi}{4}(1 + \gamma_0^2). \end{cases} \quad (33)$$

为确定系统对应主参数共振稳态运动定常解, 令 $D_1 a_k = 0, D_1 \varphi_k = 0$, 得到主参数共振的振幅 a_k 和相位 φ_k 应满足的代数方程:

$$\begin{cases} -C_1 a_k^3 = C_2 a_k \cos(2\varphi_k) + C_3 a_k \sin(2\varphi_k), \\ -(\alpha_k + C_4 a_k^3 + C_5 a_k) = C_3 a_k \cos(2\varphi_k) - C_2 a_k \sin(2\varphi_k). \end{cases} \quad (34)$$

两式平方后相加消去 φ_k , 得到振幅 a_k 与调谐参数 σ 之间的关系:

$$\begin{cases} a_k = 0, \\ (C_1^2 + C_4^2)a_k^4 + 2C_4(\sigma + C_5)a_k^2 + (\sigma + C_5)^2 - (C_2^2 + C_3^2) = 0. \end{cases} \quad (35)$$

式(35)称为系统主参数共振定常解幅频响应方程.

分析式(35)得到不同形式的解:

a) 当 $(\sigma + C_5)^2 < (C_2^2 + C_3^2)$ 时

$$\begin{cases} a_{k1} = 0, \\ a_{k2,3} = \sqrt{\frac{C_4(\sigma + C_5) + \sqrt{(C_1^2 + C_4^2)(C_2^2 + C_3^2) - C_1^2(\sigma + C_5)^2}}{C_1^2 + C_4^2}}; \end{cases} \quad (36)$$

b) 当 $(\sigma + C_5)^2 > (C_2^2 + C_3^2), (\sigma + C_5)^2 < (1 + C_4^2/C_1^2)(C_2^2 + C_3^2), \sigma > 0$ 时

$$\begin{cases} a_{k1} = 0, \\ a_{k2,3} = \sqrt{\frac{C_4(\sigma + C_5) + \sqrt{(C_1^2 + C_4^2)(C_2^2 + C_3^2) - C_1^2(\sigma + C_5)^2}}{C_1^2 + C_4^2}}, \\ a_{k4,5} = \sqrt{\frac{C_4(\sigma + C_5) - \sqrt{(C_1^2 + C_4^2)(C_2^2 + C_3^2) - C_1^2(\sigma + C_5)^2}}{C_1^2 + C_4^2}}; \end{cases} \quad (37)$$

c) 在其它区域只有 $a_k = 0$.

系统的一次近似解为

$$v(t) = a_k \cos(\tau + \varphi_k). \quad (38)$$

3 定常解的稳定性分析

先讨论平凡解的稳定性. 将式(27)中的非线性项略去, 得到

$$A_k' - \frac{i\delta^2 \gamma_0^2 k\pi}{4}(1 + \gamma_0^2)A_k - \frac{i\delta^2 \gamma_0^2}{16}(1 - e^{-2ik\pi\gamma_0})A_k e^{2i\sigma T_1} = 0. \quad (39)$$

为将式(32)变换为常系数方程, 引入变换

$$A_k = (a_r + ia_i)e^{\beta T_1 + i\sigma T_1}. \quad (40)$$

将式(40)代入式(39)并在所得方程中分离实部和虚部, 令 $a_r' = 0$, $a_i' = 0$ 可得到

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\beta - \frac{\gamma_0 \delta^2}{16}(1 - \cos(2k\pi\gamma_0)) \right] a_r + \left[C_5 - \sigma - \frac{\gamma_0 \delta^2}{16} \sin(2k\pi\gamma_0) \right] a_i = 0, \\ \left[\sigma - C_5 - \frac{\gamma_0 \delta^2}{16} \sin(2k\pi\gamma_0) \right] a_r + \left[\beta + \frac{\gamma_0 \delta^2}{16}(1 - \cos(2k\pi\gamma_0)) \right] a_i = 0. \end{array} \right. \quad (41)$$

受扰动的平凡解为非平凡解, 故式(41)的系数行列式为 0, 即

$$\beta^2 - \frac{\delta^4 \gamma_0^2}{64} \sin^2(k\pi\gamma_0) + (\sigma - C_5)^2 = 0. \quad (42)$$

若条件

$$\frac{\delta^4 \gamma_0^2}{64} \sin^2(k\pi\gamma_0) - (\sigma - C_5)^2 > 0 \quad (43)$$

成立时 β 有正实部, 由式(40)知, 在此条件下式(39)的零解不稳定. Liapunov 线性化稳定性表明原非线性系统的不稳定性与相应线性系统相同. 故当

$$- \frac{\delta^2 \gamma_0}{8} |\sin(k\pi\gamma_0)| + C_5 < \sigma < \frac{\delta^2 \gamma_0}{8} |\sin(k\pi\gamma_0)| + C_5 \quad (44)$$

时, 主参数共振的平凡解不稳定.

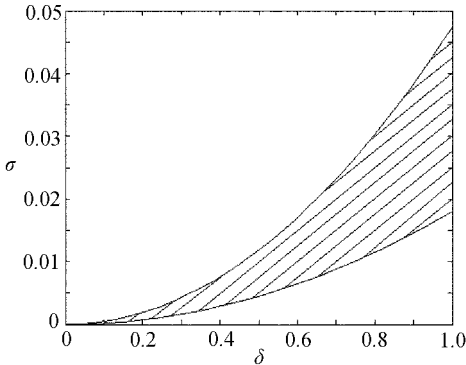


图 2 平凡解的不稳定区域($\gamma_0 = 0.2$)

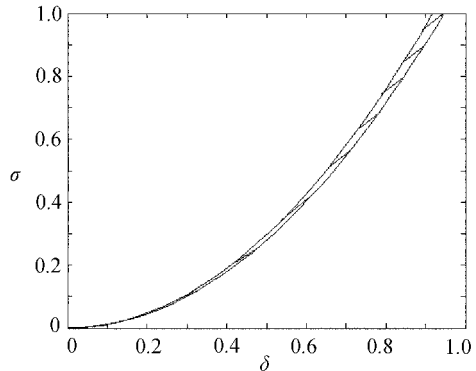


图 3 平凡解的不稳定区域($\gamma_0 = 0.9$)

图 2 和图 3 是调谐值 σ 和参数 δ 的关系图, 当 $\gamma_0 = 0.2$, $\gamma_0 = 0.9$ 时参数共振平凡解的不稳定区域.

图 4 和图 5 是调谐值 σ 和参数 γ_0 的关系图, 当 $\delta = 0.2$, $\delta = 0.9$ 时参数共振平凡解的不稳定区域.

再讨论非平凡解的稳定性. 线性化方程式(32), 将其在 (a_k, φ_k) 处线性化, 形成关于扰动量 Δa_k 和 $\Delta \varphi_k$ 的自治微分方程:

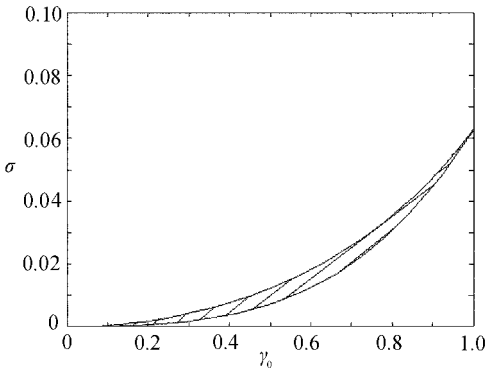


图4 平凡解的不稳定区域($\delta_0=0.2$)

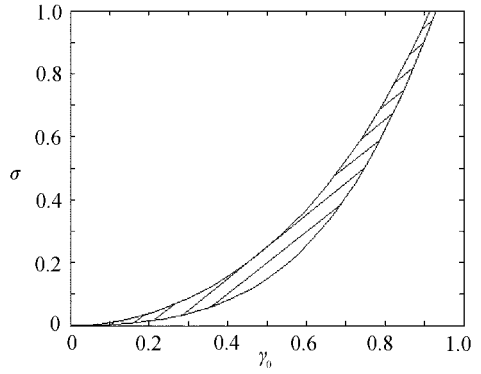


图5 平凡解的不稳定区域($\delta_0=0.9$)

$$\begin{cases} \Delta a_k' = (3C_1 a_k^2 + C_2 \cos(2\varphi_k) + C_3 \sin(2\varphi_k)) \Delta a_k + \\ \quad 2(C_3 a_k \cos(2\varphi_k) - C_2 a_k \sin(2\varphi_k)) \Delta \varphi_k, \\ \Delta \varphi_k' = 2C_4 a_k \Delta a_k - 2(C_2 \cos(2\varphi_k) + C_3 \sin(2\varphi_k)) \Delta \varphi_k. \end{cases} \quad (45)$$

利用式(34)消去上两式中的 φ_k , 得到

$$\begin{cases} \Delta a_k' = 2C_1 a_k^2 \Delta a_k - 2(\sigma a_k + C_4 a_k^3 + C_5 a_k) \Delta \varphi_k, \\ \Delta \varphi_k' = 2C_4 a_k \Delta a_k + 2C_1 a_k^2 \Delta \varphi_k. \end{cases} \quad (46)$$

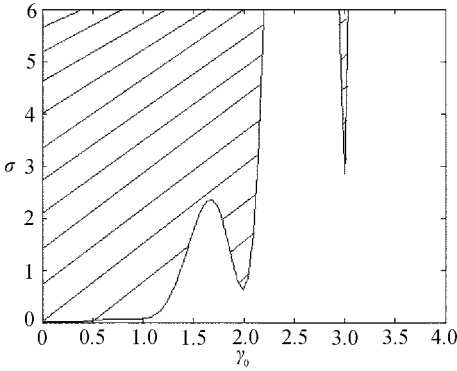


图6 非平凡解的稳定区域($\delta_0=0.2$)

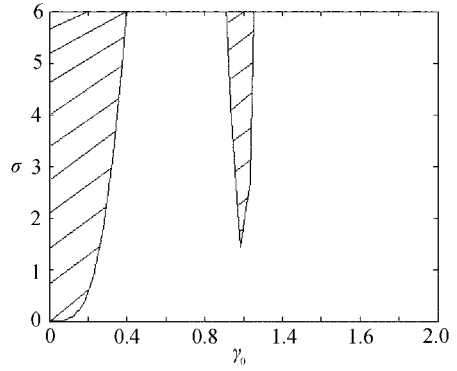


图7 非平凡解的稳定区域($\delta_0=0.9$)

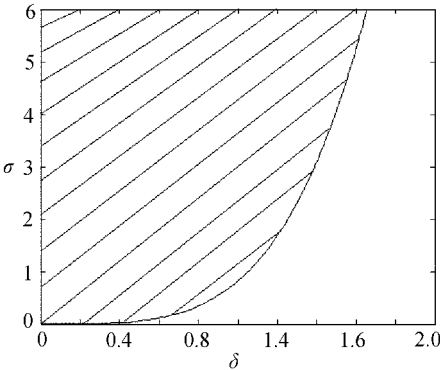


图8 非平凡解的稳定区域($\gamma_0=0.2$)

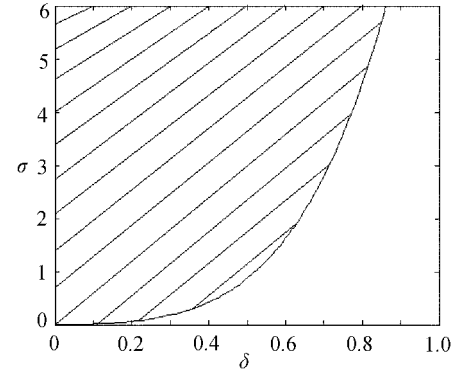


图9 非平凡解的稳定区域($\gamma_0=0.9$)

得到式(46)的 Jacobi 矩阵

$$J = \begin{pmatrix} 2C_1 a_k^2 - 2(\alpha_k + C_4 a_k^3 + C_5 a_k) & \\ 2C_4 a_k & 2C_1 a_k^2 \end{pmatrix}. \quad (47)$$

根据 Liapunov 线性化稳定性理论, 非平凡解的稳定性由矩阵 J 的特征值确定. 如果特征值具有负实部, 则稳态解稳定. 而如果至少有一个特征值实部为正, 则稳态解不稳定. 矩阵 J 的特征方程为

$$\lambda^2 - 4C_1 a_k^2 \lambda + 4(C_1^2 + C_4^2) a_k^4 + 4C_4(\sigma + C_5) a_k^2 = 0. \quad (48)$$

非零解的稳定条件为

$$\begin{cases} C_1 < 0, \\ 4a_k^2[(C_1^2 + C_4^2) a_k^2 + 4C_4(\sigma + C_5)] > 0. \end{cases} \quad (49)$$

将 a_k 代入式(49)可得

$$\begin{cases} C_1 < 0, \\ (C_1^2 + C_4^2)(C_2^2 + C_3^2) > C_1^2(\sigma + C_5)^2, \end{cases} \quad (50)$$

其中的系数由式(33)确定.

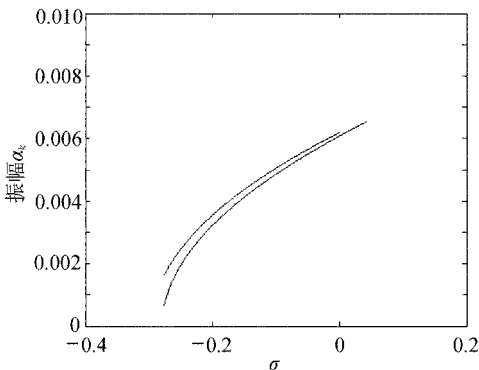
图6和图7是是调谐值 σ 和参数 ν_0 的关系图, 当 $\delta = 0.2$, $\delta = 0.9$ 时参数共振非平凡解的稳定区域.

图8和图9是是调谐值 σ 和参数 δ 的关系图, 当 $\nu_0 = 0.2$, $\nu_0 = 0.9$ 时参数共振非平凡解的稳定区域. 在计算中 $k = 1$, $E_e = 400$, $E_v = 25$.

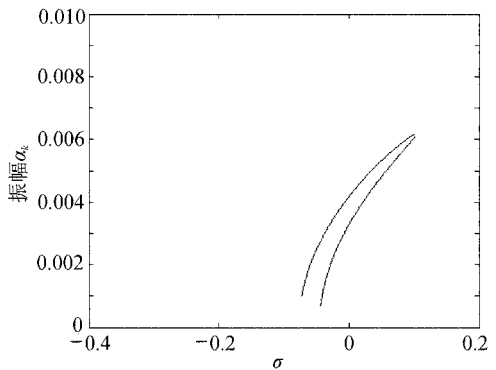
4 数值结果分析

由式(35)可以计算系统的主参数共振的响应曲线, 分析不同参数 σ , δ , ν_0 对响应曲线的影响. 分析平均轴向运动速度、速度变化的幅值和频率等对稳态响应幅值的影响.

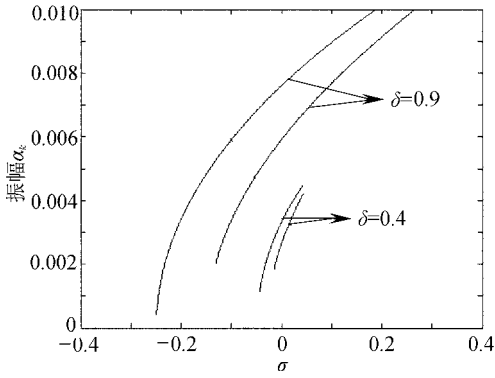
在分别将无量纲化的平均轴向运动速度固定为 $\nu_0 = 0.9$, $\nu_0 = 0.5$ 和 $\delta = 0.5$ 时, 稳态响应的幅值和存在边界随调谐参数 σ 的变化如图10(a)和图10(b). 在将无量纲化的平均轴向运动速度固定为 $\nu_0 = 0.5$ 时, 稳态响应的幅值和存在边界随调谐参数 σ 的变化如图10(c)所示, 增大 δ 时, 响应幅值增大, 两分支解之间的区域变大. 在将无量纲化的平均轴向运动速度固定为 $\nu_0 = 0.9$ 时, 稳态响应的幅值和存在边界随调谐参数 σ 的变化如图10(d)所示, 增大 δ 时, 两分支解之间的区域变大. 响应幅值随调谐参数 σ 的增加而增大.



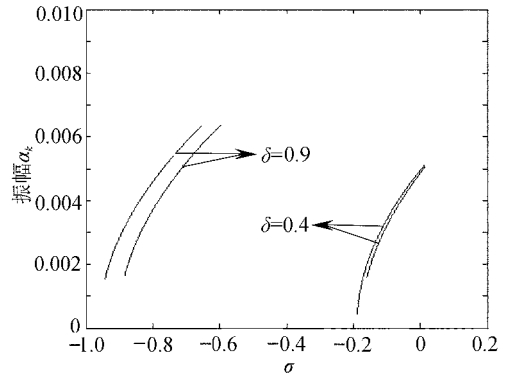
(a) $\nu_0 = 0.9$, $\delta = 0.5$



(b) $\nu_0 = 0.5$, $\delta = 0.5$

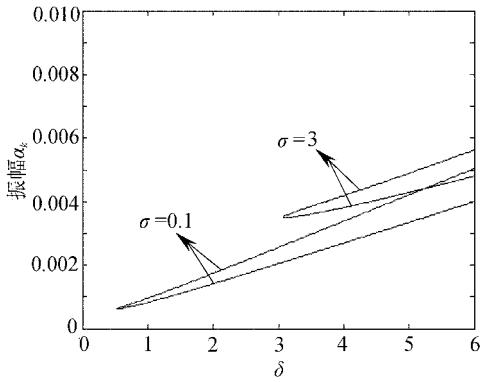


(c) $v_0 = 0.5$

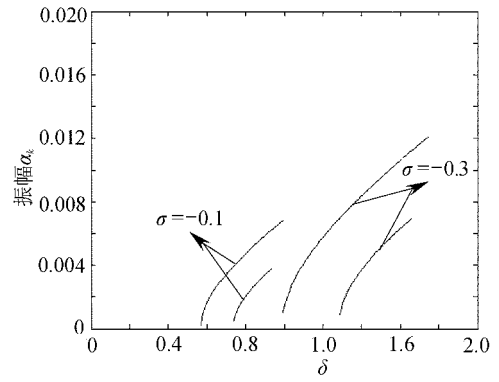


(d) $v_0 = 0.9$

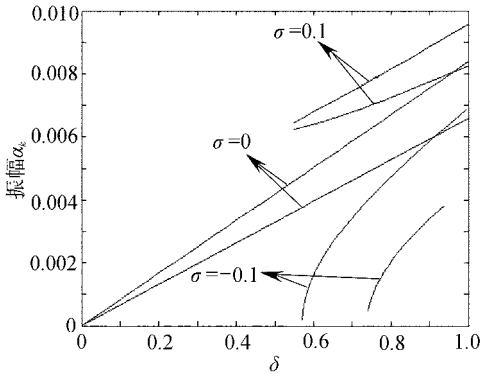
图 10 响应幅值随 σ 的变化



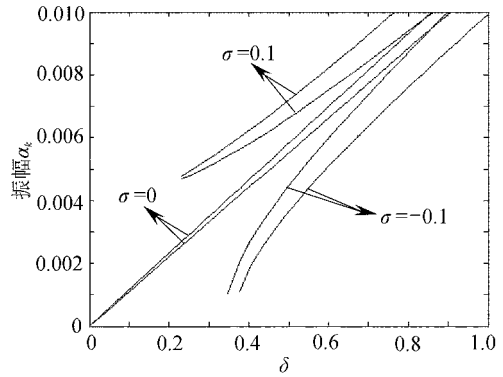
(a) $v_0 = 0.5, \sigma > 0$



(b) $v_0 = 0.5, \sigma < 0$



(c) $v_0 = 0.5$

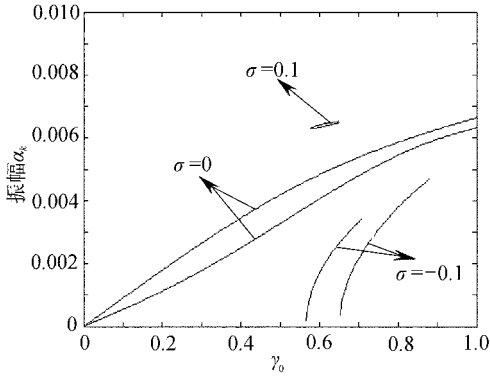


(d) $v_0 = 0.8$

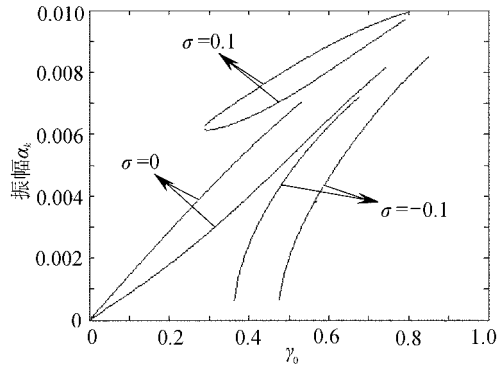
图 11 响应幅值随 δ 的变化

在将无量纲化的平均轴向运动速度固定为 $v_0 = 0.5$ 时, 稳态响应的幅值和存在边界随无量纲化的平均轴向运动速度变化幅值 δ 的变化如图 11(a) 和图 11(b) 所示. 平均轴向运动速度变化幅值不仅影响不平凡稳态响应的幅值, 而且影响其存在区域. 随着 δ 的增大, 稳态响应的幅值也不断增大. 如图 11(a) $\sigma > 0$ 时, 当 σ 是增大, 稳态响应的幅值也增大; 如图 11(b) $\sigma < 0$ 时, 当 σ 是减小, 稳态响应的幅值也增大. 如图 11(c) 和图 11(d) 无量纲化的平均轴向运动速度分别为 $v_0 = 0.5$ 和 $v_0 = 0.8$, 比较两图可知, 当 v_0 变大时两分支解之间的区域变小了;

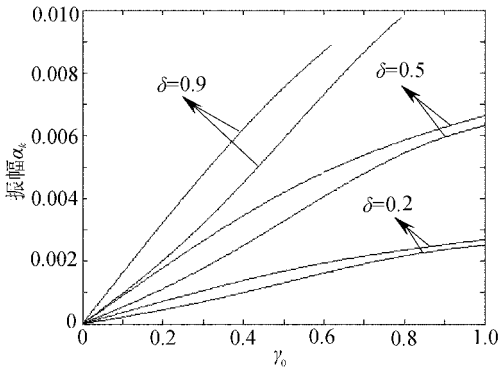
当 σ 相等时, 稳态响应的幅值变大了; 稳态响应的幅值的增大也变快了.



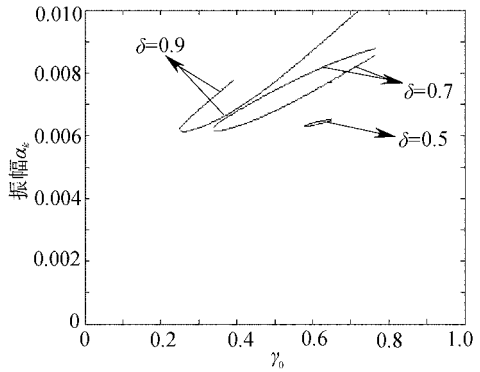
(a) $\delta = 0.5$



(b) $\delta = 0.8$

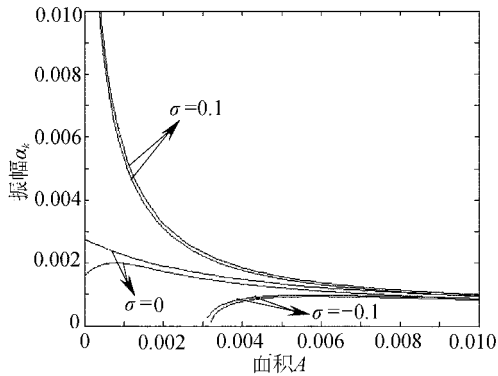


(c) $\sigma = 0$

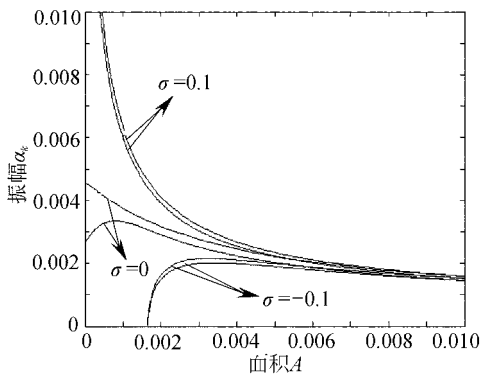


(d) $\sigma = 0.1$

图 12 响应幅值随 γ_0 的变化图



(a) $c_1 = 3$



(b) $c_1 = 5$

图 13 振幅皮带横截面积响应曲线

在将无量纲化的速度变化幅值固定为 $\delta = 0.5$, $\delta = 0.8$ 时, 稳态响应的幅值和存在边界随无量纲化的平均轴向运动速度 γ_0 的变化如图 12(a) 和图 12(b) 所示. 当 σ 是增大, 稳态响应的幅值也增大; 当 δ 增大时, 由两图比较可得, 两分支解之间的区域变大了, 相应 γ_0 值比较稳态响应的幅值也增大了. 无量纲化的平均轴向运动速度不仅影响非平凡稳态响应的幅值, 而且影响其存在区域. 如图 12(c) 和图 12(d) 分别固定 $\sigma = 0$ 和 $\sigma = 0.1$, 随无量纲化的平均轴向运

动速度变化幅值 δ 的增大, 稳态响应的幅值也增大. 当 σ 是增大时, 其存在区域减小了.

由图 10、图 11、图 12 可知调谐参数 σ 、无量纲化的平均轴向速度 v_0 和平均轴向运动速度变化幅值 δ 不仅影响非平凡稳态响应的幅值, 而且影响其存在区域. 随着 v_0 和 δ 的增大, 稳态响应的幅值也增大了.

参数取值为

$$E_0 = 200 \text{ MPa}, d_1 = 125 \text{ mm}, d_2 = 280 \text{ mm}, L = 677.4 \text{ mm}, \eta = 1, \\ P_0 = 160 \text{ N}, k = 1, c_0 = 20 \text{ m/s}, \rho = 1235 \text{ kg/m}^3.$$

图 13 是振幅皮带横截面积响应曲线, $\sigma = -0.1, \sigma = 0, \sigma = 0.1$ 时随着皮带横截面积的增大, 振幅越来越小, 最后趋近一个比较接近的值, 还存在跳跃现象. 当调谐参数 σ 增加时, 振幅也相应变大了. 且当 $\sigma = 0$ 时, 在皮带横截面积接近 0 时, 两分支解之间的区域最大. 随着 $c_1 = 3$ 变化为 $c_1 = 5$, 振幅也随着增大, 最终的趋近值也变大了.

5 结 论

本文基于 Coriolis 加速度和 Lagrange 应力公式, 利用 Newton 第二定律仅考虑 y 方向的横向振动, 得到了运动带的横向振动运动方程. 运用多尺度法得到了方程的一次近似解. 用数值方法说明了相关参数对频率响应和存在条件的影响. 由此可知调谐参数 σ 、无量纲化的平均轴向速度 v_0 和平均轴向运动速度变化幅值 δ 不仅影响非平凡稳态响应的幅值, 而且影响其存在区域. 随着 v_0 和 δ 的增大, 稳态响应的幅值也增大了. 由主参数共振分析还得到黏弹性不仅减小了振动, 而且移动了稳定边界条件.

[参 考 文 献]

- [1] Abrate A S. Vibration of belts and belt drives[J]. Mechanism and Machine Theory, 1992, 27(6): 645-659.
- [2] Moon J, Wickert J A. Non-linear vibration of power transmission belts[J]. Journal of Sound and Vibration, 1997, 200(4): 419-431.
- [3] Pellicano F, Freglent A, Bertuzzi A, et al. Primary and parametric non-linear resonances of power transmission belt: experimental and theoretical analysis[J]. Journal of Sound and Vibration, 2001, 244(4): 669-684.
- [4] Zhang L, Zu J W. Non-linear vibrations of viscoelastic moving belts—part I: free vibration analysis [J]. Journal of Sound and Vibration, 1998, 216(1): 75-91.
- [5] Zhang L, Zu J W. Non-linear vibrations of viscoelastic moving belts—part II: forced vibration analysis[J]. Journal of Sound and Vibration, 1998, 216(1): 93-105.
- [6] Zhang L, Zu J W. Non-linear vibrations of parametrically excited viscoelastic moving belts—part I: dynamic response[J]. Journal of Applied Mechanics, 1999, 66(2): 396-402.
- [7] Zhang L, Zu J W. Non-linear vibrations of parametrically excited viscoelastic moving belts—part II: stability analysis[J]. Journal of Applied Mechanics, 1999, 66(2): 403-409.
- [8] Nayfeh A H, Mook D T. Nonlinear Oscillation [M]. New York Wiley-Interscience, 1979.
- [9] CHEN Li-qun. Analysis and control of transverse vibrations of axially moving strings[J]. ASME Applied Mechanics Reviews, 2005, 58(2): 9-116.
- [10] CHEN Li-qun. Principal parametric resonance of axially accelerating viscoelastic strings with an integral constitutive law[J]. Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical

- and Engineering Sciences, 2005, **461**(2061): 2701-2720.
- [11] CHEN Li-qun, Zu Jean W, WU Jun, et al. Transverse vibrations of an axially accelerating viscoelastic string with geometric nonlinearity[J]. Journal of Engineering Mathematics, 2004, **48**(2): 172-182.
- [12] 吴俊, 陈立群. 轴向变速运动弦线的非线性振动的稳态响应及其稳定性[J]. 应用数学和力学, 2004, **25**(9): 917-926.
- [13] Wickert J A, Mote Jr C D. Classical vibration analysis of axially moving continua[J]. Journal of Applied Mechanics, 1990, **57**(3): 738-743.

Parametric Resonances of Convection Belts System Analysis

YANG Zhi-an, LI Gao-feng

(Key Laboratory of Structure and Vibration of Tangshan, Tangshan College,
Tangshan, Hebei 063000, P.R. China)

Abstract: Based on Coriolis acceleration and Lagrangian strain formula, the transverse vibration system of convection belts equation generalized was derived by Newton's second law. The method of multiple scales was applied directly to the governing equations, and approximate solution of primary parameter resonance of the system was obtained. The detuning parameter, cross section area, elastic and viscoelastic parameters, and an axial moving speed have a significant effect on the amplitudes of steady-state response and their existence boundaries. Some new dynamical phenomena were revealed.

Key words: convection belts; primary parametric resonance; the method of multiple scales