文章编号: 1000-0887(2009) 06-0713-06
应用数学和力学编委会, ISSN 1000-0887

流体介质中微粒的分离-混合方程的推导*

唐纳德 O 贝松

(皇家技术学院 数值计算系, 斯德哥尔摩 S-10044, 瑞典)

(胡文瑞推荐)

摘要： 主要目的是从基本原理(即,基本的物理)出发,推导出流体中纤细的、单个分散微粒的分离-混合方程的重力项. 推出的微粒重力驱动通量,直接导致 Richardson-Zaki 相互关系式的最简单情况. 仅仅依靠推导,自然地引出由微粒和流体的物理参数表达的 Stokes 速度. 从基本物理原理出发的推导在以前的文献中还没有出现过. 它可应用于低浓度的纤细微粒.

关 键 词： 重力分离； Kynch 批通量； 基本原理； Burger 型方程

中图分类号： O359 **文献标识码：** A

DOI： 10.3879/j.issn.1000-0887.2009.06.010

引 言

流体介质中微粒的分离,充斥着从制药业[1]到制粉技术[2]不同领域. 不少人对流体中微粒的分离问题进行了详细研究,大部分的推测集中于微粒速度[3-5]. 在上述文献中,对各种不同的想法寻找沉淀速度并进行分析. Batchelor[3]用平均沉淀速度分析单个分散的微粒. Batchelor[4]和 Masliyah[5]研究了具有两种或更多不同半径球形微粒的沉淀速度. 然而,正如文献[6]指出的,这些文献中都没有给出微粒分离的具体方程. 后来又有一些研究[7-9]在文献[6]的基础上得以完成. Shojaei[7]给出了各种各样以 Kynch 批通量形式的沉淀速度[8]. 随后,在文献[6,8-9]中提出了各种各样的 Kynch 批通量. Richardson-Zaki 相互关系式[8-10]是一个著名的分离通量式.

Kynch[6]和 Garrido 等[8-9]没有给出通量函数中的比例常数,将参数假定为 Stokes 末速度. Gray[11]应用 Richardson-Zaki 相互关系式中的最简单的情况,来处理混合在表面小颗粒雪崩中微粒分离和扩散问题,找到的通量函数和文献[12]和[2]相同.

本文对微粒的重力分离,使用基本的物理原理,推导出通量函数. 通量函数中的比例常数由基本原理的推导自然地引出. 找到了等于 Stokes 末速度的常数. 而且,我们的结果与 Richardson-Zaki 相互关系式的最简单形式相一致. 在我们的工作中,仅包括重力,结果和 Richardson-Zaki 相互关系式作比较. 本文导出了 Brown 运动[14]以及重力分离流体中微粒的分离-混合方程.

* **收稿日期：** 2008-10-23； **修订日期：** 2009-03-02
作者简介： Donald O. Besong. 博士(联系人. E-mail: donbes@yahoo.com).
本文原文为英文,海治 译, 张禄坤 校.

1 Brown 运动的数学公式

1.1 微粒的空间分布

文献[14]已给出 Brown 运动公式的推导,这里仅仅是一个完整的说明. 假设介质中单个微粒在空间的扰动,相对于其平均位置是作等量的随机位移. 假设竖向位移为 z、不考虑重力作用,则微粒满足 Gauss 分布:

$$f(z,\bar{z},\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-(z-\bar{z})^2/(2\sigma^2)}, \tag{1}$$

其中 z 为微粒的竖向坐标,$\bar{z}$ 为竖向平均坐标,σ 为相对于 $\bar{z}$ 的标准差.

方程(1)与扩散方程的解相比较,有

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c}{\partial z^2}, \tag{2}$$

其中 c 为浓度,D 为扩散系数,方程(2)的解为[12]

$$c = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}}\mathrm{e}^{-(z-\bar{z})^2/(4Dt)}. \tag{3}$$

比较方程(1)和(3),有 $\sigma = \sqrt{2Dt}$. 可见,Brown 运动为扩散方程(2)所控制. 方程(2)也可以用克分子比来表示,甚至用胶体中固态微粒的体积分数来表示:

$$\frac{\partial u_{\mathrm{s}}}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u_{\mathrm{s}}}{\partial z^2}. \tag{4}$$

1.2 流体中微粒的 Einstein 扩散系数 D

在 Stokes 定律和 Bolzmann 定律[13]的基础上,Einstein 给出了介质中悬浮微粒扩散系数的表达式.

考虑流体中的悬浮微粒受外力 F 作用. 令系统坐标轴为 z,悬浮微粒在 z 方向上运动,并获得末速度 $v = F/\zeta$,其中 $\zeta = 6\pi\eta a$ 为 Stokes 给出的摩擦因数. 这里,η 为流体介质的动黏度,a 为悬浮微粒的半径. 假设除了流体介质外,悬浮微粒间没有相互作用. 系统限于 z 方向,因而,在 z 方向上会产生一个浓度梯度,其扩散流与外力 F 引起的流向正相反.

最终,浓度梯度变得足够大,釉至于两个相反的流向相互抵消,从而

$$\frac{nF}{\zeta} = -D\frac{\partial n}{\partial z}, \tag{5}$$

其中 $n = n(z)$ 为微粒的当地浓度. 平衡时,$n(z)$ 由 Boltzmann 定律给出:

$$n(z) \sim \mathrm{e}^{-Fz/(kT)}, \tag{6}$$

其中 T 为流体的温度,k 为 Boltzmann 常数. 将方程(6)代入到方程(5)得到

$$D = \frac{kT}{6\pi\eta a}. \tag{7}$$

它就是悬浮液中微粒的扩散系数,考虑了因流体黏性产生的所有抵抗力.

1.3 Brown 运动时的 Einstein 驱动力和迁移率

通过对流体中微粒 Brown 运动的分析,Einstein 系统地导出了微粒的扩散方程[14]. 假设每单位体积悬浮液中的微粒数为 n, 则 Brown 扩散产生的驱动力为[14]

$$-\frac{kT}{n}\frac{\partial n}{\partial z}. \tag{8}$$

迁移率[14]为

$$\frac{nD}{kT}. \tag{9}$$

方程(8)乘以方程(9)得到通量为

$$J^D = -D\frac{\partial n}{\partial z} \text{ 或 } J^D = -Dn_t\frac{\partial u}{\partial z}, \tag{10}$$

其中 n_t 为系统中微粒的总数．为了形象化 n_t，将流体设想成与固体微粒一样是由相同尺寸的微粒所组成的．

2 微粒重力分离的数学公式

2.1 以前对微粒重力分离的研究

文献[7]给出了形式如下的各种各样的沉淀速度公式：

$$v = v_\infty(1-u)f(u), \tag{11}$$

其中 v 为流量或微粒速度，$f(u)$ 为微粒体积分数的函数，混合比为 u．在文献[10]中，按通常将 v_∞ 假设为流体中微粒的 Stokes 末速度：

$$v_\infty = \frac{2a^2g(\rho_s-\rho_f)}{9\eta}, \tag{12}$$

其中 g 为重力加速度，ρ_s 和 ρ_f 分别为固体微粒和流体的密度．a 为微粒的半径，η 为流体动黏度．方程(11)中任意通量 v 称为 Kynch 批通量，即 $f_b k(u)$[9]．

文献[6]和[8-9]给出了各种各样不同的 Kynch 批通量．一个众所周知的分离通量形式为 Richardson-Zaki 相互关系式[8,10]：

$$v = v_\infty u(1-u)^n, \qquad n \geqslant 1. \tag{13}$$

2.2 流体中微粒分离方程的重新推导

以下将重新推导流体中受重力作用时微粒的通量．使用文献[1,6,13]中的全部假设，即：

(ⅰ) 相对于容器来说微粒尺寸很小；

(ⅱ) 沉淀速度仅依赖于当地微粒密度；

(ⅲ) 壁面效应可以忽略；

(ⅳ) 所有微粒具有相同的形状和尺寸；

(ⅴ) 所有微粒处于稀释的微粒系统中，不然微粒之间会产生相互作用；

(ⅵ) 没有整体运动．有整体运动时，重力作用通量仅和整体速度相关．

常常假设微粒是在重力作用下作 Brown 运动，由基本原理导出重力通量函数．为了便于和 Richardson-Zaki 相互关系式的结果进行比较，这里仅考虑重力作用．

2.2.1 重力通量

考虑一含微粒的悬浮液，用 ρ_s 表示微粒材料的密度，ρ_f 表示流体的密度，u_s 表示固体微粒的体积分数，u_f 表示流体的体积分数，有 $u_f = 1-u_s$．系统是一个 $1-D$ 的圆柱体，高为 H．圆柱体的轴为 z，方向向上，底部 $z=0$．

当所有压力 P 为静水压时，作用在任何固体或流体 z 处的压力为

$$P = \int_z^H(\rho_s u_s + \rho_f u_f)g\,dz = P_{tot} - \int_0^z(\rho_s u_s + \rho_f u_f)g\,dz, \tag{14}$$

其中 $$P_{tot} = \int_0^H(\rho_s u_s + \rho_f u_f)g\,dz$$

为贮液池底部的总压力，它是一个常量．每个固体微粒的势能，被称作高位势能，表示为

$\rho_s gz$. 则水头为

$$\psi = P - \rho_s gz. \tag{15}$$

式(15)与多孔介质中流体速度的 Darcy 定理[16]相同. 根据水头得到固体微粒的驱动力:

$$-\frac{\partial \psi}{\partial z} = -(\rho_s u_s + \rho_f u_f)g + \rho_s g = \Delta\rho(1 - u_s)g, \tag{16}$$

其中 $\Delta\rho = \rho_s - \rho_f$, $-\partial\psi/\partial z$ 有量纲:力 / 体积. 因此,作用在微粒上的力由 $-\partial\psi/\partial z$ 乘上微粒的体积或半径 a. 因此每一微粒上的驱动力为

$$F_G = (4/3)\pi a^3 \Delta\rho(1 - u_s)g.$$

将上式乘以迁移率(9),得到每单位体积微粒上产生的重力通量:

$$J_s^G = \frac{4}{3}\pi a^3 \frac{n_s D}{kT}\Delta\rho(1 - u_s)g \text{ 或 } J_s^G = \frac{4}{3}\pi a^3 \frac{u_s n_t D}{kT}\Delta\rho(1 - u_s)g. \tag{17}$$

2.3 分离-混合方程

将 Brown 运动产生的通量和重力通量相比较:

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} = -\frac{\partial J_s^D}{\partial z} - \frac{\partial J_s^G}{\partial z}, \tag{18}$$

得到

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u_s}{\partial z^2} + \frac{4}{3}\pi a^3 \frac{D}{kT}\Delta\rho g \frac{\partial}{\partial z}[u_s(u_s - 1)], \tag{19}$$

其中 D 由方程(7)给出,依赖于微粒半径和流体介质的动黏性,即

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u_s}{\partial z^2} + D_g \frac{\partial}{\partial z}[u_s(u_s - 1)], \tag{20}$$

其中 $$D_g = \frac{4}{3}\pi a^3 \frac{D}{kT}\Delta\rho g.$$

D_g 正好是微粒的 Stokes 末速度,见式(12).

3 例 题

假设在一个封闭容器中,将精细的圆形石英微粒和水混合,温度 $T = 360$ K,压力 $P = 14$ MPa,初始体积分数为 0.5. 石英密度为 2 650 kg/m^3. 微粒半径相同,水温为 20℃并有大气压力. 当 $T = 293$ K 时,水的密度为 998.29 kg/m^3[17],水的黏度为 1.003×10^{-3} Pa·s[18]. 假设微粒的

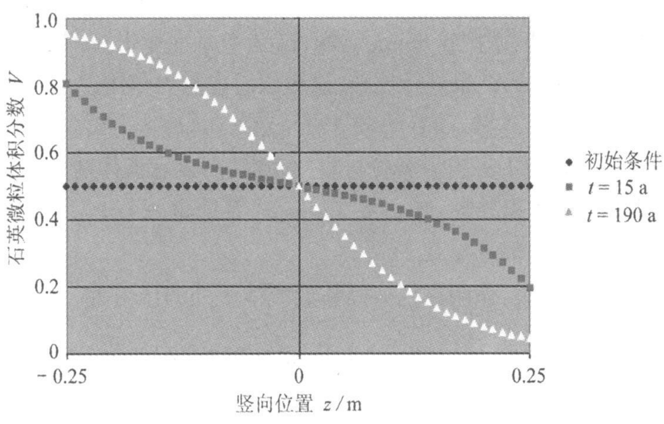

图 1 不同时间石英微粒在水中的分布(容器高 $H = 0.5$ m)

半径为 10^{-8} m,从方程(7)得到 $D = 2.4 \times 10^{-9}\ m^2/s$.

图1给出了不同时间水中石英微粒的体积分数,容器高 $H = 0.5$ m. 温度和压力与初始时一样统一为 $T = 360$ K、$P = 14$ MPa,体积分数都是0.5.

4 结 论

本文用基本原理,就流体中微粒的分离,推导出重力引起的重力通量. 我们的推导结果表明微粒的混合-分离方程并非是推测的形式. 该方程对应于Richardson-Zaki相互关系式的一个特殊情况[6],即幂次 $n = 1$. 在以前的研究中,$n = 1$[11]是作为最简单情况的选择,但在本文中它通过推导得到证明. 本文的推导尚未在已有文献中看到. 由此我们可以推断:n 是一个衡量差别的指标,从稀释微粒浓缩这种简单情况,直到与此相反的沉积. 因此,当固体微粒浓度较低,并伴有微粒作Brown扩散运动时,推断出流体中微粒的分离方程. 它证明了以前工作中建议的方程形式. 希望激起学生和有兴趣的个人对各领域分离问题的研究.

和Richardson-Zaki相互关系式相比较,下列诸点值得强调:

1) 在定义的Richardson-Zaki相互关系式中,速度(或重力通量函数)以这样一种方式来定义:当浓度可能达到最大或者最小时,其值应为0,对分离通量来说这是一个必要条件. 本文基本原理的结果正是这些特性的一个函数.

2) 在Richardson-Zaki相互关系式中,方程(13)中的 v_∞ 假定为Stokes速度. 本文的推导同样导出Stokes速度.

3) 在Richardson-Zaki相互关系式中,方程(13)中的 $(1 - u)$ 含有未知幂次 n,有赖以后相关的实验确定. n 是以后沉淀的结果. 本文的推导把我们引向最简单的情况,即 $n = 1$,同时,因为考虑过无阻碍,我们断定:n 表示微粒运动的阻碍度.

4) 在文献[11]中,分离通量假设为 $F = -S_r u(1 - u)$. 因此,建议 $n = 1$ 等于我们导出的重力通量函数. 而且建议常数 S_r 为最大浸透速度、容器长度和宽度的函数. 在本文中,通过基本原理的推导,Stokes速度替换诸参数进入函数 $-S_r = v_\infty$. 注意到以前的工作中,v_∞ 仅曾被建议过. 推导过程显示,该假设是正确的,并等于Stokes的末速度.

5) Richardson-Zaki相互关系式中建议的重力通量函数为 $v_\infty u(1 - u)^n$. 在文献[19]中,正如式(13)可见,最简单情况是 $v_\infty u(1 - u)$,它与本文的推导结果相一致.

本文的结果可以推广到微粒的多重扩散. 希望得到该问题在有限空间中的解析解,这是今后要进行的工作.

[参 考 文 献]

[1] Smallwood R H, Tindale W B, Trowbridge E A. The physics of red cell sedimentation[J]. *Phys Med Biol*, 1985, **30**(2): 125-137.

[2] Dolgunin V N, Ukolov A A. Segregation modeling of particle rapid gravity flow[J]. *Powder Technol*, 1995, **83**(2): 95-103.

[3] Batchelor G K. Sedimentation in a dilute dispersion of spheres[J]. *J Fluid Mech*, 1972, **52**(2): 245-268.

[4] Batchelor G K. Sedimentation in a dilute polydisperse system of interacting spheres—part 1: general theory[J]. *J Fluid Mech*, 2006, **119**: 379-408.

[5] Masliyah J H. Hindered settling in a multiple-species particle system[J]. *Chem Eng Sci*, 1979, **34**:

1166-1168.

[6] Kynch G J. A theory of sedimentation[J]. *Trans Faraday Soc*, 1952, **48**: 166-176.

[7] Shojaei A, Arefinia R. Analysis of the sedimentation process in reactive polymeric suspensions[J]. *Chem Eng Sci*, 2006, **61**(23): 7565-7578.

[8] Garrido P, Bürger R, Concha F. Settling velocities of particulate systems—11: Comparison of the phenomenological sedimentation-consolidation model with published experimental results[J]. *Int J Miner Process*, 2000, **60**(3/4): 213-227.

[9] Bürger R, Damasceno J J R, Karlsen K H. A mathematical model for batch and continuous thickening of flocculated suspensions in vessels with varying cross-section[J]. *Int J Miner Process*, 2004, **73**(2/4): 183-208.

[10] Richardson J F, Zaki W N. Sedimentation and fluidization—part Ⅰ[J]. *Chem Eng Res Des*, 1954, **32**: 35-53.

[11] Gray J, Chugunov V A. Particle-size segregation and diffusive remixing in shallow granular avalanches [J]. *J Fluid Mech*, 2006, **569**: 365-398.

[12] Savage S B, Lun C K K. Particle size segregation in inclined chute flow of dry cohesionless granular solids[J]. *J Fluid Mech*, 1988, **189**: 311-335.

[13] Carslaw H S, Jaeger J C. *Conduction of Heat in Solids*[M]. Oxford: Clarenden Press, 1959.

[14] Mazo R M. *Brownian Motion: Fluctuations, Dynamics, and Applications*[M]. Oxford: Oxford University Press, 2002.

[15] Nelson E. *Dynamical Theories of Brownian Motion*[M]. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1967.

[16] Firoozabadi A. *Thermodynamics of Hydrocarbon Reservoirs*[M]. McGraw-Hill, 1999.

[17] Boyd C E. *Water Quality: An Introduction*[M]. Kluwer Academic Pub, 2000.

[18] Yoo K H, Boyd C E. *Hydrology and Water Supply for Pond Aquaculture*[M]. New York, London: Springer, 1994.

[19] Bürger R, García A, Karlsen K H, *et al*. A kinematic model of continuous separation and classification of polydisperse suspensions[J]. *Comput Chem Eng*, 2008, **32**(6): 1173-1194.

Derivation of a Segregation-Mixing Equation for Particles in a Fluid Medium

Donald O. Besong

(*Department of Numerical Methods and Computing (NADA), Royal Institute of Technology, S-10044 Stockholm, Sweden*)

Abstract: The main purpose is to show that the gravity term of the segregation-mixing equation of fine mono-disperse particles in a fluid can be derived from elementary physics(i. e. first principles). The derivation of the gravity-driven flux of particles leads to the simplest case of the Richardson and Zaki correlation. Stokes velocity also naturally appears from the physical parameters of the particles and fluid by means of derivation only, for the first time. This derivation from first principle physics has never been presented before. It is applicable in small concentrations of fine particles.

Key words: gravity segregation; Kynch batch flux; first principles derivation; Burger-type equation