

非定常对流扩散方程的局部和并行有限元算法*

刘庆芳, 侯延仁

(西安交通大学 理学院, 西安 710049)

(周哲玮推荐)

摘要: 对基于两重网格的非定常对流扩散方程的局部和并行有限元算法进行了研究. 算法的理论依据是两重网格的思想, 解的低频分量可以用一个整体的粗网格空间来逼近, 高频分量可以用局部和并行的细网格空间来逼近. 因此, 这种局部和并行算法仅仅涉及一个粗网格上的整体逼近和细网格上的局部校正. 得到了算法的误差估计, 一些数值例子验证了算法的有效性.

关键词: 局部和并行算法; 有限元法; 对流扩散方程

中图分类号: O241.82 文献标识码: A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2009.06.013

引言

并行有限元算法在科学和工程中的应用已经引起了人们的广泛兴趣. Xu 和 Zhou^[1-3] 对于一类线性和非线性椭圆边值问题首先提出一种新的局部并行有限元算法. 随后 He 等^[4-5] 和马逸尘等^[6] 将这种算法应用到定常的 Stokes 和 Navier-Stokes 方程. 算法的理论基础是解的全局行为主要由低频分量决定, 局部行为主要由高频分量来决定. 算法的主要思想是用一个全局粗网格去逼近低频分量然后用在局部细网格上并行地得到高频分量. 这种算法来源于许进超提出的两重网格算法^[7-8].

本文将上面提到的局部并行算法来解决非定常对流扩散问题. 它可以认为是 Xu 和 Zhou^[1-3], He 等^[4-5] 和马逸尘等^[6] 工作的进一步发展. 据我们所知, 几乎还没有文献将这种局部和并行有限元算法用于求解时间相关的方程. 由于非定常问题涉及时间步进, 因此, 将并行算法用于非定常的方程在提高计算效率方面更具有意义. 本文结构: 第 1 节给出了一些符号和假设; 第 2 节提出局部和并行算法及其误差估计; 第 3 节给出了一些数值例子来验证第 2 节的理论分析.

1 预备知识

我们考虑非定常对流扩散方程

* 收稿日期: 2008-11-16; 修订日期: 2009-05-06

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10871156); 新世纪优秀人才支持计划资助项目(NCEP-06-0829)

作者简介: 刘庆芳(1982-), 女, 济南人, 博士(联系人, E-mail: qfliu08@hotmail.com).

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + b \cdot \nabla u = f, & \forall (x, t) \in \Omega \times [0, T], \\ u(x, 0) = u_0, & \forall x \in \Omega, \\ u = 0, & \forall (x, t) \in \partial \Omega \times [0, T]. \end{cases} \quad (1)$$

其中 Ω 是 R^d ($d = 2, 3$) 中的有界区域, 具有 Lipschitz 连续的边界 $\partial \Omega$, $u(x, t)$ 是一个标量函数, $b \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega)^d)$, f 是体积力, T 代表一个有限时间.

本文中记 $X = H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), v|_{\partial \Omega} = 0\}$. X 被赋予内积 $((u, v)) = (\nabla u, \nabla v)$ 和范数 $\|u\| = ((u, u))^{1/2}$, 其中 $\forall u, v \in X$ 且 (\cdot, \cdot) 表示通常的 L^2 内积.

设 h 是一个正实数, T_h 是区域 Ω 的一个正规三角剖分 K 或者正规矩形剖分 K . $X^h \subset X$ 是由这样的剖分生成的有限元空间. 设 $P_h: X \rightarrow X^h$ 代表 L^2 正交投影满足 $(P_h w, v_h) = (w, v_h)$ 其中 $\forall v \in X, v_h \in X^h$. 本文用 $\|\cdot\|_\alpha$ 代表 $H^\alpha(\Omega)$ 范数, 其中 $\forall \alpha \in R$, 用 c 来代表一个与剖分无关的常数, 尽管在不同的地方这个常数可能表示的内容不同.

设 k 是时间离散长度, 并且 $N = [T/k]$. 那么解决对流扩散方程(1)的全离散的标准 Galerkin 算法为: $u^{h,0} = P_h u_0$, 对所有的 $1 \leq n \leq N$, 求 $u^{h,n} \in X^h$ 使得

$$(u^{h,n}, v) + ka(u^{h,n}, v) = (u^{h,n-1} - v) + k(f^n, v), \quad \forall v \in X^h, \quad (2)$$

其中

$$a(u, v) = a_0(u, v) + N(u, v),$$

$$a_0(u, v) = (\nabla u, \nabla v), \quad \forall u, v \in X.$$

$$N(u, v) = (b \cdot \nabla u, v),$$

假设对 $\forall t \in [0, T], f(t) \in X' = H^{-1}(\Omega)$ 和 $u(t) \in H^2(\Omega)$, 则有

$$\|u(t_n) - u^{h,n}\|_0 \leq c(k + h^2), \quad 1 \leq n \leq N. \quad (3)$$

定义一个 Laplace 算子的离散形式 $A_h: A_h = -P_h \Delta_h$, $(- \Delta_h u_h, v_h) = (u_h, v_h)$, $\forall u_h, v_h \in X^h$.

其中 A_h 在 X^h 上的限制是可逆的, 它的逆 A_h^{-1} 是自伴正定的. 定义 X^h 中的任意 r 阶范数

$$\|v_h\|_r = \|A_h^{r/2} v_h\|_{L^2}, \quad \forall v_h \in X^h. \quad \text{这个离散范数与它的连续情形有类似的性质. 特别地}$$

$$\|v_h\|_0 = \|v_h\|_{L^2}, \quad \|v_h\|_1 = \|v_h\|_{H_0^1}, \quad \|v_h\|_2 = \|A_h v_h\|_{L^2}, \quad \forall v_h \in X^h.$$

网格尺度函数 $h(x)$ 表示包含 x 点的有限元 τ 的直径 h_τ . 对网格的基本假设是剖分不能局部太细, 也就是说

A. 0. 存在 $\gamma \geq 1$ 满足

$$h_\Omega^\gamma \leq h(x), \quad \forall x \in \Omega, \quad h_\Omega = \max_{x \in \Omega} h(x).$$

不失一般性, 我们去掉 h_Ω 中的下标, 在后面的叙述中将网格尺度简记为 h .

给定一个网格剖分 $T_h(\Omega)$, 设 $X^h(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ 是 Ω 中的一个有限元子空间. 记 $X_0^h(\Omega) = X^h(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. 给定 $\Omega_0 \subset \Omega$, 我们定义 $X^h(\Omega_0)$ 和 $T_h(\Omega_0)$ 分别是在 $X^h(\Omega)$ 和 $T_h(\Omega)$ 在 Ω_0 上的限制, 并且 $X_0^h(\Omega_0) = \{v \in X^h(\Omega), \text{supp } v \subset \subset \Omega_0\}$.

我们对有限元空间有如下基本的假设:

A. 1. 逼近性质 存在 $r \geq 1$ 使得对 $\forall w \in H_0^1(\Omega)$ 满足

$$\inf_{v \in X_0^h(\Omega)} (\|w - v\|_{0, \Omega} + h \|w - v\|_{1, \Omega}) \leq ch^{s+1} \|w\|_{H^s, \Omega}, \quad 0 \leq s \leq r.$$

A. 2. 反估计 对 $\forall v \in X^h(\Omega_0)$ 满足

$$\|v\|_{1, \Omega_0} \leq ch^{-1} \|v\|_{0, \Omega_0}, \quad \|v\|_{0, \Omega_0} \leq ch^{-1} \|v\|_{-1, \Omega_0}.$$

A.3. 超收敛性质 对 $G \subset \subset \Omega$, 设 $\omega \in C_0^\infty(\Omega)$ 并且 $\text{supp } \omega \subset \subset G$, 那么对任意的 $w \in X^h(G)$, 存在 $v \in X_0^h(G)$ 使得

$$\|\omega w - v\|_{1,G} \leq ch \|w\|_{1,G}.$$

2 局部和并行算法

本节将首先提出对非正常流扩散方程的一个局部算法, 然后得到局部算法的误差估计. 最后在这个局部算法的基础上构造并行算法并且给出了并行算法的误差估计.

设两个网格剖分尺度 H, h 满足 $0 \leq h \leq H \leq 1$. 局部算法可以描述为:

2.1 局部算法

(i) 求全局粗网格的解 $u_H^n \in X_0^H(\Omega)$ 使得

$$(u_H^n, v) + ka(u_H^n, v) = (u_H^{n-1}, v) + k(f^n, v), \quad \forall v \in X_0^H(\Omega); \quad (4)$$

(ii) 求局部细网格的校正 $e_h^n \in X_0^h(\Omega_0)$ 使得

$$(e_h^n, v) + ka(e_h^n, v) = (e_h^{n-1}, v) + k(f^n, v) - ((u_H^n - u_H^{n-1}), v) - ka(u_H^n, v), \quad \forall v \in X_0^h(\Omega_0); \quad (5)$$

(iii) 最终的逼近解

$$u_h^n|_D = u_H^n + e_h^n,$$

其中 $1 \leq n \leq N, D \subset \subset \Omega_0$ (参见图 1).

首先, 我们给出一个离散的 Gronwall 引理(见文献[9]).

引理 2.1 设 $n \geq 1$ 是非负整数, k, B, a_n, b_n, c_n, d_n 满足

$$a_m + k \sum_{n=1}^m b_n \leq k \sum_{n=1}^m d_n a_n + k \sum_{n=1}^m c_n + B, \quad \forall m \geq 1.$$

假设对任意的 n 有 $kd_n < 1$, 并且有 $\gamma_n = (1 - kd_n)^{-1}$, 那么

$$a_m + k \sum_{n=1}^m b_n \leq \exp\left(k \sum_{n=1}^m \gamma_n d_n\right) \left(k \sum_{n=1}^m c_n + B\right), \quad \forall m \geq 1.$$

给出局部误差估计之前, 我们需要 Xu 和 Zhou 在文献[1]中给出的一个结论.

引理 2.2 设 $D \subset \subset \Omega_0$ 和 $\omega \in C_0^\infty(\Omega)$ 满足 $\text{supp } \omega \subset \subset \Omega_0$, 则有

$$a_0(\omega w, \omega w) \leq 2a(w, \omega^2 w) + c \|w\|_{0,\Omega_0}^2, \quad \forall w \in H_0^1(\Omega). \quad (6)$$

引理 2.3 假设 $f \in L^\infty(0, T; X')$ 和 $D \subset \subset \Omega_0 \subset \subset \Omega$ 并且假设 A.1~ A.3 成立以及 $k \leq ch_{\Omega_0}^2$ 和 $w \in X^h(\Omega_0)$ 满足

$$(w, v) + ka(w, v) = (f, v), \quad \forall v \in X_0^h(\Omega_0), \quad (7)$$

那么

$$\|w\|_{0,D} + k^{1/2} \|w\|_{1,D} \leq c(\|w\|_{-1,\Omega_0} + \|f\|_{-1,\Omega_0}), \quad (8)$$

其中 $\|f\|_{-1,\Omega_0} = \|f\|_{L^\infty(0,T;X')}$.

证明 设 p 是一个整数满足 $p \geq 2\gamma - 1$, 并且 $\Omega_j (j = 1, 2, \dots, p)$ 满足

$$D \subset \subset \Omega_p \subset \subset \Omega_{p-1} \subset \subset \dots \subset \subset \Omega_1 \subset \subset \Omega_0.$$

因此我们可以选择一个子区域 $D_1 \subset \subset \Omega$ 满足 $D \subset \subset D_1 \subset \subset \Omega_p$, 选择一个函数 $\omega \in C_0^\infty(\Omega)$ 满足在 D_1 上 $\omega \equiv 1$ 并且 $\text{supp } \omega \subset \subset \Omega_p$. 那么, 由假设 A.3 知, 存在 $v \in X_0^h(\Omega_p)$ 使得

$$\|\omega^2 w - v\|_{1,\Omega_p} \leq ch_{\Omega_0} \|w\|_{1,\Omega_p},$$

由上式得到

$$a(w, \omega^2 w - v) \leq ch_{\Omega_0} \|w\|_{1, \Omega_p}^2$$

和

$$|(f, v)| \leq \|f\|_{-1, \Omega_0} \|v\|_{1, \Omega_p} \leq c \|f\|_{-1, \Omega_0} (h_{\Omega_0} \|w\|_{1, \Omega_p} + \|\omega w\|_{1, \Omega_p}).$$

由于 $v \in X_0^h(\Omega_p) \subset X_0^h(\Omega_0)$, 由(7)式得

$$(w, \omega^2 w) + ka(w, \omega^2 w) = (w, \omega^2 w - v) + ka(w, \omega^2 w - v) + (f, v).$$

结合(6)式和上式有

$$\begin{aligned} \|\omega w\|_{0, \Omega}^2 + k \| \omega w \|_{1, \Omega}^2 &\leq ch_{\Omega_0} \|w\|_{0, \Omega_p}^2 + ch_{\Omega_0} \|w\|_{1, \Omega_p}^2 + ck \|w\|_{0, \Omega_0}^2 + \\ &c \|f\|_{-1, \Omega_p} (h_{\Omega_0} \|w\|_{1, \Omega_p} + \|\omega w\|_{1, \Omega_p}) \end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned} \|w\|_{0, D} + k^{1/2} \|w\|_{1, D} &\leq ch_{\Omega_0}^{1/2} \|w\|_{0, \Omega_p}^2 + ck^{1/2} h_{\Omega_0}^{1/2} \|w\|_{1, \Omega_p} + \\ &ck^{1/2} \|w\|_{0, \Omega_0} + c \|f\|_{-1, \Omega_0}. \end{aligned} \quad (9)$$

对于 $\|w\|_{0, \Omega_p} + k^{1/2} \|w\|_{1, \Omega_p}$ 重复上述讨论, 得

$$\begin{aligned} \|w\|_{0, \Omega_j} + k^{1/2} \|w\|_{1, \Omega_j} &\leq ch_{\Omega_0}^{1/2} \|w\|_{0, \Omega_{j-1}} + ck^{1/2} h_{\Omega_0}^{1/2} \|w\|_{1, \Omega_{j-1}} + \\ &ck^{1/2} \|w\|_{0, \Omega_0} + c \|f\|_{-1, \Omega_0}, \quad j = 1, 2, \dots, p. \end{aligned} \quad (10)$$

注意到(9)式和(10)式, 假设A.2和引理中 k 满足的条件, 则有

$$\begin{aligned} \|w\|_{0, D} + k^{1/2} \|w\|_{1, D} &\leq ch_{\Omega_0}^{(p+1)/2} \|w\|_{0, \Omega_0} + ck^{1/2} h_{\Omega_0}^{(p+1)/2} \|w\|_{1, \Omega_0} + \\ &ck^{1/2} \|w\|_{0, \Omega_0} + c \|f\|_{-1, \Omega_0} \leq c (\|w\|_{-1, \Omega_0} + \|f\|_{-1, \Omega_0}). \end{aligned}$$

定理证毕.

与文献[7-8]中的经典的两重网格法类似的证明, 我们有

引理 2.4 假设 $u^{h, n}$ 分别 u_H^n 分别由(2)式和(4)式得到, 我们有

$$\begin{aligned} \|u^{h, m} - u_H^m\|_{-1, \Omega}^2 + k \sum_{i=1}^m \|u^{h, n} - u_H^n\|_{0, \Omega}^2 + \\ k \sum_{i=1}^m \|d_i(u^{h, n} - u_H^n)\|_{2, \Omega}^2 \leq cH^6, \quad 1 \leq m \leq N, \end{aligned}$$

其中
$$d_i(u^{h, n} - u_H^n) = \frac{u^{h, n} - u_H^n - (u^{h, n-1} - u_H^{n-1})}{k}.$$

定理 2.1 在引理 2.3 的假设下, 若 $u_h^n \in X^h(\Omega_0)$ 是由局部算法(4)和(5)得到, 则有

$$\|u^{h, n} - u_h^n\|_{0, D} \leq cH^3, \quad 1 \leq n \leq N. \quad (11)$$

证明 首先, 由(2)式和局部算法(4)和(5)得到

$$(u^{h, n} - u_h^n, v) + ka(u^{h, n} - u_h^n, v) = (u^{h, n-1} - u_h^{n-1}, v), \quad \forall v \in X^h(\Omega_0).$$

由引理 2.3, 有

$$\begin{aligned} \|u^{h, n} - u_h^n\|_{0, D} + k^{1/2} \|u^{h, n} - u_h^n\|_{1, D} &\leq \\ c (\|u^{h, n} - u_h^n\|_{-1, \Omega_0} + \|u^{h, n-1} - u_h^{n-1}\|_{-1, \Omega_0}) &\leq \\ c (\|u^{h, n} - u_H^n\|_{-1, \Omega_0} + \|u^{h, n-1} - u_H^{n-1}\|_{-1, \Omega_0} + \\ \|e_h^n\|_{-1, \Omega_0} + \|e_h^{n-1}\|_{-1, \Omega_0}). \end{aligned} \quad (12)$$

接下来的工作就是估计 $\|e_h^n\|_{-1, \Omega_0}$, 其中 $1 \leq n \leq N$.

在(5)式中取 $v = 2A_h^{-1}e_h^n$, 得

$$\|e_h^n\|_{-1, \Omega_0}^2 + \|e_h^n - e_h^{n-1}\|_{-1, \Omega_0}^2 - \|e_h^{n-1}\|_{-1, \Omega_0}^2 + 2k \|e_h^n\|_{0, \Omega_0}^2 =$$

$$\begin{aligned}
& -2kN(e_h^n, A_h^{-1}e_h^n) + 2((u^{h,n} - u_H^n) - (u^{h,n-1} - u_H^{n-1}), A_h^{-1}e_h^n) + \\
& 2ka(u^{h,n} - u_H^n, A_h^{-1}e_h^n). \tag{13}
\end{aligned}$$

利用 Holder 不等式, 有

$$\begin{aligned}
2k | N(e_h^n, A_h^{-1}e_h^n) | & \leq ck \|e_h^n\|_{0, \Omega_0} \|e_h^n\|_{-1, \Omega_0} \leq \\
& \frac{k}{3} \|e_h^n\|_{0, \Omega_0}^2 + ck \|e_h^n\|_{-1, \Omega_0}^2, \\
2 | ((u^{h,n} - u_H^n) - (u^{h,n-1} - u_H^{n-1}), A_h^{-1}e_h^n) | & \leq \\
2k \|d_t(u^{h,n} - u_H^n)\|_{-2, \Omega_0} \|e_h^n\|_{0, \Omega_0} & \leq \\
\frac{k}{3} \|e_h^n\|_{0, \Omega_0}^2 + ck \|d_t(u^{h,n} - u_H^n)\|_{-2, \Omega_0}^2, \\
2k | a(u^{h,n} - u_H^n, A_h^{-1}e_h^n) | & \leq 2 \|u^{h,n} - u_H^n\|_{0, \Omega_0} \|e_h^n\|_{0, \Omega_0} \leq \\
\frac{k}{3} \|e_h^n\|_{0, \Omega_0}^2 + ck \|u^{h,n} - u_H^n\|_{0, \Omega_0}^2.
\end{aligned}$$

结合 (13) 式和上述估计, 得

$$\begin{aligned}
\|e_h^n\|_{-1, \Omega_0}^2 + k \|e_h^n\|_{0, \Omega_0}^2 & \leq \|e_h^{n-1}\|_{-1, \Omega_0}^2 + ck \|e_h^n\|_{-1, \Omega_0}^2 + \\
ck \|d_t(u^{h,n} - u_H^n)\|_{-2, \Omega_0}^2 + ck \|u^{h,n} - u_H^n\|_{0, \Omega_0}^2. \tag{14}
\end{aligned}$$

对(14)式从 $n = 1$ 到 $n = m$ 相加, 其中 $1 \leq m \leq N$, 有

$$\begin{aligned}
\|e_h^m\|_{-1, \Omega_0}^2 + k \sum_{n=1}^m \|e_h^n\|_{0, \Omega_0}^2 & \leq \\
ck \sum_{n=1}^m (\|e_h^n\|_{-1, \Omega_0}^2 + \|d_t(u^{h,n} - u_H^n)\|_{-2, \Omega_0}^2 + \|u^{h,n} - u_H^n\|_{0, \Omega_0}^2).
\end{aligned}$$

对上式应用引理 2.1, 又注意到 (12) 式和引理 2.4 可以得到 (11) 式. \square

2.2 并行算法

并行算法的基本思想是: 将局部算法(4)和(5)并行地应用到每个子区域 Ω_j 上, 其中 $j = 1, 2, \dots, J$. 基于这个思想, 我们可以构造如下并行算法:

(i) 求全局粗网格解 $u_H^n \in X_0^H(\Omega)$ 满足

$$(u_H^n, v) + ka(u_H^n, v) = (u_H^{n-1}, v) + k(f^n, v), \quad \forall v \in X_0^H(\Omega); \tag{15}$$

(ii) 求局部细网格校正 $e_{h,j}^n \in X_0^h(\Omega_j)$ 满足

$$\begin{aligned}
(e_{h,j}^n, v) + ka(e_{h,j}^n, v) & = (e_{h,j}^{n-1}, v) + k(f^n, v) - \\
& ((u_H^n - u_H^{n-1}), v) - ka(u_H^n, v), \quad \forall v \in X_0^h(\Omega_j); \tag{16}
\end{aligned}$$

(iii) 最终的逼近解

$$u_h^n|_{D_j} = u_H^n + e_{h,j}^n$$

其中 $1 \leq n \leq N$, $D_j \subset \subset \Omega_j \subset \subset \Omega$, $j = 1, 2, \dots, J$, $\cup D_j = \Omega$, $D_i \cap D_j = \emptyset$, $i \neq j$.

定理 2.2 在定理 2.1 的假设下, 若 $u_h^n \in X^h(\Omega)$ 是由并行算法(15)和(16)得到, 则对任意的 $1 \leq n \leq N$ 有

$$\|u^{h,n} - u_h^n\|_{0, \Omega} \leq dH^3, \tag{17}$$

$$\|u(t_n) - u_h^n\|_{0, \Omega} \leq c(k + h^2 + H^3). \tag{18}$$

证明 由定理 2.1, 得

$$\|u^{h,n} - u_h^n\|_{0, D_j} \leq dH^3, \quad j = 1, 2, \dots, J,$$

上式得到(17)式. 结合(3)式和(17)式得到不等式(18).

3 数值试验

本节将给出一些数值例子来验证第2节的理论分析. 我们将区域 $\Omega = [0, 1]^2$ 剖分为三角形(参见图2). 数值例子都利用线性有限元来实现(即 P_1 元). 我们选择时间离散长度 $k = 0.001$ 足够小使得当 k 变小时, 整个误差不再增加. 我们将整个区域分解为4个小区域(参见图1).

$$D_1 = (0, 1/2) \times (0, 1/2), \quad D_2 = (1/2, 1) \times (0, 1/2), \\ D_3 = (1/2, 1) \times (1/2, 1), \quad D_4 = (0, 1/2) \times (1/2, 1)$$

和

$$\Omega_1 = (0, 5/8) \times (0, 5/8), \quad \Omega_2 = (3/8, 1) \times (0, 5/8), \\ \Omega_3 = (3/8, 1) \times (3/8, 1), \quad \Omega_4 = (0, 5/8) \times (3/8, 1).$$

这里我们只是想以最简单的方式来验证局部和并行算法对非定常对流扩散方程的有效性. 因此, 我们仅仅在单机上独立地在4个子区域 $\Omega_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 上进行运算. 当这种局部和并行算法应用于一些复杂的且涉及大规模计算的方程比如 Navier-Stokes 方程时, 我们真正有必要在并行机上实现这种局部和并行算法. 将这种局部和并行算法应用于非定常的 Navier-Stokes 方程将是我们下一阶段考虑的问题. 而且为简单起见, 我们选择一个真解, 然后由这个真解得到右端项 f . 我们选择的真解为 $u(x, t) = t^2 \cos(x_1 x_2^2)$, 其中 $x = (x_1, x_2)$, $b = (2, -1)$, $\Omega = (0, 1)^2$, $T = 1$. 在下面的表格中, 误差 $\|e_h\|$ 代表相对误差. 即 $\|e_h\|_{0,D} = \max_{n=1, 2, \dots, N} (\|u(t_n) - u_h^n\|_{0,D}) / (\|u(t_n)\|_{0,D})$.

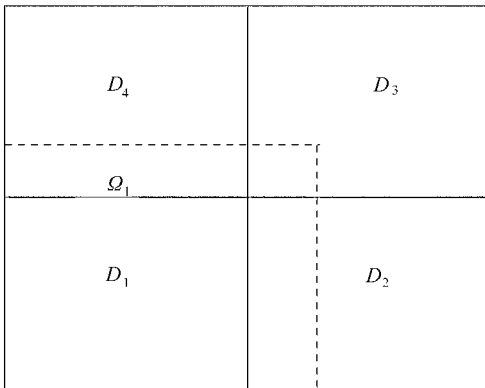


图1 区域分解

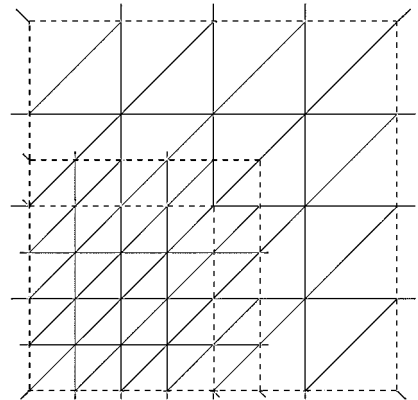


图2 网格剖分

表1

局部和并行算法的相对误差和收敛阶

H	h	$\ e_h\ _{0,\Omega}$	收敛阶	$\ e_h\ _{0,\Omega}$	收敛阶
1/2	1/4	0.034 603		0.207 558	
1/4	1/8	0.006 582	2.39	0.091 588	1.18
1/8	1/16	0.001 507	2.13	0.043 097	1.09
1/16	1/32	0.000 378	2.00	0.020 903	1.04

表 2 计算时间对比

H	h	两重网格法(t/s)	局部并行算法(t/s)
1/2	1/4	14.23	4.12
1/4	1/8	26.29	10.99
1/8	1/16	77.45	39.42
1/16	1/32	265.41	137.25

表 3 不同区域上的误差

H	h	$\ e_h\ _{0,D}$	$\ \hat{e}_h\ _{0,D}$	$\ e_h\ _{0,\Omega_1 \setminus D}$	$\ \hat{e}_h\ _{0,\Omega_1 \setminus D}$
1/2	1/4	0.011 091	0.115 844	0.031 049	0.164 929
1/4	1/8	0.000 355	0.007 277	0.002 701	0.063 243
1/8	1/16	0.000 277	0.003 278	0.000 482	0.012 866
1/16	1/32	9.799 8E-05	0.001 570	0.000 161	0.006 124

表 1 给出了局部和并行算法(15)和(16)取不同的粗细网格尺度 H 和 h 所得的相对误差和关于 h 的收敛阶. 从表 1 可以看出局部和并行算法的收敛阶跟定理 2.2 中的理论分析一致. 由于局部和并行算法只是在局部细网格上并行地进行校正, 而通常的两重网格算法是在整个细网格上校正. 因此, 与通常的两重网格相比, 局部和并行算法可以节省大量的计算时间. 表 2 给出了通常的两重网格算法和局部并行算法的计算时间对比. 表 2 中给出的计算时间取的是 4 个子区域中计算时间最大的一个. 表 3 表明在 $\Omega_1 \setminus D$ 中的相对误差比 D 中的相对误差大很多, 这就是我们舍弃 $\Omega_1 \setminus D$ 上的逼近解来提高精度的原因.

[参 考 文 献]

- [1] Xu J C, Zhou A H. Local and parallel finite element algorithms based on two-grid discretizations[J]. Math Comput, 1999, 69(231): 881-909.
- [2] Xu J C, Zhou A H. Local and parallel finite element algorithms based on two-grid discretizations for nonlinear problems[J]. Adv Comput Math, 2001, 14(4): 293-327.
- [3] Xu J C, Zhou A H. Some local and parallel properties of finite element discretizations[A]. In: Lai C H, Björsted P E, Cross M, et al, Eds. Proceedings of the 11th International Conference on Domain Decomposition Methods [C], Greenwich: England, 1999, 140-147.
- [4] He Y N, Xu J C, Zhou A H. Local and parallel finite element algorithms for the Stokes problem[J]. Numer Math, 2008, 109(3): 415-434.
- [5] He Y N, Xu J C, Zhou A H. Local and parallel finite element algorithms for the Navier-Stokes problem[J]. J Comput Math, 2006, 24(3): 227-238.
- [6] 马飞遥, 马逸尘, 沃维丰. 基于二重网络的定常 Navier-Stokes 方程的局部和并行有限元算法[J]. 应用数学和力学, 2007, 28(1): 25-33.
- [7] Xu J C. A novel two-grid method for semilinear equations[J]. SIAM J Sci Comput, 1994, 15(1): 231-237.
- [8] Xu J C. Two-grid discretization techniques for linear and nonlinear PDEs[J]. SIAM J Numer Anal, 1996, 33(5): 1759-1777.
- [9] Heywood J G, Rannacher R. Finite element approximation of the nonstationary Navier-Stokes problem, Part IV: Error analysis for second-order time discretization[J]. SIAM J Numer Anal, 1990, 27

(2): 353-384.

Local and Parallel Finite Element Algorithms for the Time-Dependent Convection-Diffusion Equations

LIU Qing-fang, HOU Yan-ren

(School of Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, P. R. China)

Abstract: Local and parallel finite element algorithms based on two-grid discretization for the time-dependent convection-diffusion equations are presented. These algorithms are motivated by the observation that for a solution to the convection-diffusion problems, low frequency components can be approximated well by a relatively coarse grid and high frequency components can be computed on a fine grid by some local and parallel procedure. Hence, these local and parallel algorithms only involve one small original problem on coarse mesh and some correction problems on local fine grid. One technical tool for the analysis is some local a priori estimates that are also obtained. Finally, some numerical examples are given to support our theoretical analysis.

Key words: local and parallel algorithm; finite element method; convection-diffusion equation