

# 一类修正 Cooper-Frieze 网络的稳定性研究<sup>\*</sup>

童金英<sup>1</sup>, 侯振挺<sup>1</sup>, 史定华<sup>1,2</sup>

(1. 中南大学 概率统计研究所, 长沙 410075;

2. 上海大学 数学系, 上海 200444)

(郭兴明推荐)

**摘要:** 基于 Markov 链理论, 研究了一类修正 Cooper-Frieze 模型的稳定性. 通过将模型中节点度与 Markov 链建立联系, 利用 Markov 理论中首达概率的思想为稳态度分布的存在性提供了证明, 并从数学上推导出度分布的具体表达式. 最后, 对该模型的度分布和聚集性提供了仿真分析, 并与 BA 模型作了相应的对比.

**关键词:** 增长网络; 择优连接; 幂率分布

中图分类号: TP393.02; N941.4; O157.5 文献标识码: A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2009.06.014

## 引 言

在过去十年里, 人们目睹了对复杂网络研究的新浪潮. 复杂网络的结构是不规则的、复杂的, 并随时间不断发生演化. 近年来, 科学家根据已有数据研究真实网络时发现, 绝大部分真实网络的度分布都展现出幂率形式, 即度分布  $P(k) \sim Ak^{-\gamma}$  (命名为无标度网络).

Barabási 和 Albert(BA)模型<sup>[1]</sup>首次为人们提供了真实网络生成无标度网络的演化机制. 这是一个受万维网启发而提出的增长网络模型, 两个基本因素是: 增长和择优连接. 其基本思想是, 在万维网中, 度数高的结点得到新边的概率要高于度数低的结点. 同时, Bollobás 等<sup>[2]</sup>通过鞅方法得到了与经验研究相一致的结果, 即度数为  $k$  的结点所占的比例依  $k^{-3}$  递减.

在复杂网络研究中 BA 模型已受到格外的关注. 除了对模型本身的分析和数值研究之外, 为使模型更贴近现实网络, 许多作者提出了一些修正及推广模型. Albert 和 Barabási<sup>[3]</sup>提出了一类推广的网络演化模型, 对局部过程给出了更为现实的描述. 这个模型包括旧点之间连新边、重连及增新点连新边 3 种演化机制. 他们通过运用平均场方法计算得出了度分布的表达式. Chen 和 Shi<sup>[4]</sup>在 BA 模型的基础上提出了两个推广模型. 在其模型 A 中, 每时间步演化机制包括旧点之间连边、增新点连出新边以及重连一些边, 且所有结点都有初始吸引度. 在模型 B 中, 他们考虑了反择优删边的情形. 通过运用平均场方法得出了系统自身演化生成无标度网络, 标度指数  $\gamma$  范围属于  $(2, 3)$ .

\* 收稿日期: 2008-08-19; 修订日期: 2009-04-22

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10671212); 高校博士点基金资助项目(20050533036)

作者简介: 童金英(1981—), 女, 湖南娄底人, 博士(联系人, E-mail: tongjy1120@yahoo.cn).

Cooper 和 Frieze<sup>[5]</sup>通过下列方式推广了 BA 模型: (a) 允许旧点之间加入新边; (b) 允许每步加入的边数为变量; (c) 终点的选择为随机和复制的混合选择方式. 他们得出了当  $t \rightarrow \infty$  时,  $P(k)$  存在且服从指数为  $\gamma > 2$  的幂率分布.

复杂网络的研究中网络度分布刻画了网络的基本性质, 是网络研究中的首要问题. 而稳态分布的存在性是网络度分布研究的基本问题. 然而, 从前面的讨论可知, 相当部分的网络模型是在假设度分布存在的情况下进行的研究, 并未解决这个问题, 尤其是一些相对复杂的模型. 因此, 本文的主要研究目的是, 以 Cooper-Frieze 模型为代表, 从概率论的角度出发对一般网络模型的稳态分布进行研究. 但为简单起见, 文中将对模型进行一些修正. 本文首先将模型与 Markov 链建立联系, 再利用首达概率的思想和技巧<sup>[6]</sup>, 为模型稳态分布的存在性提供一个数学证明, 并推导出度分布的具体表达式. 其次, 我们将提供修正 Cooper-Frieze 模型度分布和聚集性的仿真结果, 并与 BA 模型作了相应的比较分析.

## 1 模型介绍

设  $k_i(t)$  为节点  $i$  在时刻  $t$  的度, 其定义为在时刻  $t$  与节点  $i$  直接相连的节点的个数<sup>[7]</sup>. 为方便起见, 我们对 Cooper-Frieze 模型进行一些简化. 假设初始时刻  $t = 1$ , 系统中有一孤立节点, 设其有初始吸引度  $m$ . 每时间步  $t$ , 下面两个操作分别以概率  $\alpha, 1 - \alpha$  发生, 但每时间步仅有一个操作发生.

i) 以概率  $\alpha$  某一旧节点产生  $m$  条新边: 新边的起点在已有网络中随机选择; 新边的终点按概率  $\Pi(k_i(t)) = k_i(t) / \left[ \sum_j k_j(t) \right]$  选取, 其中  $k_i(t)$  为结点  $i$  在时刻  $t$  的度.

ii) 以概率  $1 - \alpha$  增加新结点: 新结点连出  $m$  条新边, 每条边分别以概率  $\Pi(k_i(t))$  连接到网络中已有结点  $i$ .

注意到, 在操作 i) 中允许自连和重连. 正如前面描述可知, 操作 ii) 不产生自连.

设  $N(t)$  和  $\eta(t)$  分别为  $t$  时间步后的总节点数和总度数, 则  $EN(t) = (1 - \alpha)t$ ,  $\eta(t) = 2mt$ . 我们可推出: 对足够大的  $t$ ,  $N(t) = (1 - \alpha)t + O(t^{1/2} \lg t)$ . 事实上,  $N(t)$  服从二项分布  $B(t, 1 - \alpha)$ . 因此利用契尔诺夫 (Chernoff) 边界,  $P(|N(t) - (1 - \alpha)t| \geq t^{1/2} \lg t) = O(t^{-K})$ , 对任意常数  $K > 0$ .

## 2 稳定性分析

本节将  $k$  分两种情况来对网络稳定性进行分析.

对演化的  $t$ , 将结点度  $k_i(t)$  看作一个随机过程. 根据模型描述, 过程  $k_i(t)$  第  $t + 1$  步的取值仅依赖于第  $t$  步的取值, 而与以前各步的取值无关. 因此,  $k_i(t)$  为非齐次 Markov 链, 参数空间为  $T = \{i, i + 1, \dots\}$ , 状态空间为  $\Omega = \{m, m + 1, \dots\}$ . 由于操作 i) 和 ii) 均对  $k_i(t)$  产生影响, 因此, Markov 链的状态转移概率可分别写为:

i) 以概率  $\alpha$  增加  $m$  条新边:

$$P(k_i(t+1) = l \mid k_i(t) = k) =$$

$$\begin{cases} \binom{m}{j} [\Gamma(k_i(t))]^j [1 - \Gamma(k_i(t))]^{m-j} \left[1 - \frac{1}{N(t)}\right] + \\ \delta_{m,j} \frac{1}{N(t)} [1 - \Gamma(k_i(t))]^m, & l = k + j, 0 \leq j \leq m; \\ \frac{1}{N(t)} \binom{m}{j-m} [\Gamma(k_i(t))]^{j-m} [1 - \Gamma(k_i(t))]^{2m-j}, & l = k + j, m < j \leq 2m; \\ 0, & \text{否则.} \end{cases}$$

ii) 以概率  $1 - \alpha$  增加新结点:

$$P(k_i(t+1) = l \mid k_i(t) = k) = \begin{cases} \binom{m}{j} [\Gamma(k_i(t))]^j [1 - \Gamma(k_i(t))]^{m-j} \left[1 - \frac{1}{N(t)}\right], & l = k + j, 0 \leq j \leq m; \\ 0, & \text{否则.} \end{cases}$$

把 i)、ii) 两个操作的效用合起来, 我们得到

$$P(k_i(t+1) = l \mid k_i(t) = k) = \begin{cases} \binom{m}{j} [\Gamma(k_i(t))]^j [1 - \Gamma(k_i(t))]^{m-j} \left[1 - \frac{1}{N(t)}\right] + \\ \alpha \delta_{m,j} \frac{1}{N(t)} [1 - \Gamma(k_i(t))]^m, & l = k + j, 0 \leq j \leq m; \\ \alpha \frac{1}{N(t)} \binom{m}{j-m} [\Gamma(k_i(t))]^{j-m} [1 - \Gamma(k_i(t))]^{2m-j}, & l = k + j, m < j \leq 2m; \\ 0, & \text{否则.} \end{cases}$$

其中  $\Gamma(k_i(t)) = \frac{k_i(t)}{\sum_j (k_j(t))} = \frac{k_i(t)}{2mt}, \frac{1}{N(t)} = \frac{1}{(1-\alpha)t} + O(t^{-3/2} \lg t).$

设  $P(k, i, t) = P\{k_i(t) = k\}$  表示结点  $i$  在时刻  $t$  度为  $k$  的概率. 将网络的度分布定义为各结点度分布的平均值, 即

$$P(k, t) \triangleq \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t P(k, i, t). \tag{1}$$

且若  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(k, t)$  存在, 我们定义网络的稳态度分布  $P(k)$  为:  $P(k) \triangleq \lim_{t \rightarrow \infty} P(k, t).$

将 Markov 链的首达概率表示为  $f(k, i, s) = P\{k_i(s) = k, k_i(l) \neq k, l = 1, 2, \dots, s-1\}$ , 对  $s > t_0$  (否则  $f(k, i, s) = 0$ ), 其中

$$t_0 = \begin{cases} \left\lceil \frac{k-m}{2m} \right\rceil, & \left\lceil \frac{k-m}{2m} \right\rceil = \frac{k-m}{2m}; \\ 1 + \left\lceil \frac{k-m}{2m} \right\rceil, & \left\lceil \frac{k-m}{2m} \right\rceil \neq \frac{k-m}{2m}. \end{cases}$$

我们通过下面的引理将首达概率与结点度建立联系.

引理 1

情况 1 当  $m < k < 2m$  时

$$f(k, i, s) = P(k-1, i, s-1) \frac{k-1}{2(s-1)} \left(1 - \frac{k-1}{2m(s-1)}\right)^{m-1} \times$$

$$\left(1 - \frac{1}{(1-\alpha)(s-1)}\right) + O(s^{-3/2} \lg s),$$

$$P(k, t) = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \sum_{s=t_0}^i f(k, i, s) \prod_{j=s}^{t-1} \left[ \left(1 - \frac{\alpha}{(1-\alpha)j}\right) \left(1 - \frac{k}{2mj}\right)^m \right] =$$

$$P^1(k, t) + O(t^{-3/2} \lg t).$$

情况 2 当  $k \geq 2m$  时

$$f(k, i, s) = P(k-1, i, s-1) \frac{k-1}{2(s-1)} \left(1 - \frac{k-1}{2m(s-1)}\right)^{m-1} \times$$

$$\left(1 - \frac{1}{(1-\alpha)(s-1)}\right) + \alpha P(k-m, i, s-1) \frac{1}{(1-\alpha)(s-1)} \times$$

$$\left(1 - \frac{k-m}{2m(s-1)}\right)^m + O(s^{-3/2} \lg s),$$

$$P(k, t) = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \sum_{s=t_0}^i f(k, i, s) \prod_{j=s}^{t-1} \left[ \left(1 - \frac{\alpha}{(1-\alpha)j}\right) \left(1 - \frac{k}{2mj}\right)^m \right] =$$

$$P^1(k, t) + P^2(k, t) + O(t^{-3/2} \lg t).$$

其中

$$P^1(k, t) = \frac{1}{t} \sum_{s=t_0}^t \left[ P(k-1, s-1) \frac{k-1}{2} \left(1 - \frac{k-1}{2m(s-1)}\right)^{m-1} \times$$

$$\left(1 - \frac{1}{(1-\alpha)(s-1)}\right) \prod_{j=s}^{t-1} \left[ \left(1 - \frac{\alpha}{(1-\alpha)j}\right) \left(1 - \frac{k}{2mj}\right)^m \right] \right],$$

$$P^2(k, t) = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{1}{t} \sum_{s=t_0}^t \left[ P(k-m, s-1) \left(1 - \frac{k-m}{2m(s-1)}\right)^m \times$$

$$\prod_{j=s}^{t-1} \left[ \left(1 - \frac{\alpha}{(1-\alpha)j}\right) \left(1 - \frac{k}{2mj}\right)^m \right] \right].$$

证明 首先我们考虑情况 1. 由模型构造可知, 网络中任意结点  $i$  的度  $k_i(t)$  是递增的, 且其最小度为  $m$ . 而当  $m < k < 2m$  时, 网络中任意结点  $i$  ( $k_i(t) < k$ ) 其度要达到  $k$ , 只能通过被选为新边的终点. 因此, 节点  $i$  的度  $k_i(t)$  首达  $k$  的概率为

$$f(k, i, s) = P\left\{k_i(s) = k, k_i(l) \neq k, l = 1, 2, \dots, s-1\right\} =$$

$$P\left\{k_i(s) = k, k_i(s-1) < k\right\} =$$

$$\sum_{j=1}^m P(k-j, i, s-1) P\left\{k_i(s) = k \mid k_i(s-1) = k-j\right\} =$$

$$\sum_{j=1}^m \binom{m}{j} \left(\frac{k-j}{2m(s-1)}\right)^j \left(1 - \frac{k-j}{2m(s-1)}\right)^{m-j} P(k-j, i, s-1) \times$$

$$\left(1 - \frac{1}{(1-\alpha)(s-1)} - O((s-1)^{-3/2} \lg(s-1))\right) =$$

$$P(k-1, i, s-1) \frac{k-1}{2(s-1)} \left(1 - \frac{k-1}{2m(s-1)}\right)^{m-1} \times$$

$$\left(1 - \frac{1}{(1-\alpha)(s-1)}\right) + O(s^{-3/2} \lg s).$$

其次, 注意到结点  $i$  其度  $k_i(t)$  首达  $k$  的时间至少为时间步  $t_0$ , 同时能达到  $k$  的最近的时间

为  $t$ . 结点度在时间  $s$  达到度  $k$  后, 要想在  $t$  时刻度为  $k$ , 则其在时间段  $(s, t]$  内不会再发生变化. 且由于结点  $i$  在时间  $t$  不被选作新边起点和终点的概率为

$$\alpha \left( 1 - \frac{1}{(1-\alpha)t} \right) \left( 1 - \frac{k_i(t)}{2mt} \right)^m + (1-\alpha) \left( 1 - \frac{k_i(t)}{2mt} \right)^m + O(t^{-3/2} \lg t) = \left( 1 - \frac{\alpha}{(1-\alpha)t} \right) \left( 1 - \frac{k_i(t)}{2mt} \right)^m + O(t^{-3/2} \lg t),$$

从而, 根据方程(1)网络度分布的定义, 情况 1 得证. 情况 2 类似可证明.

定理 2 (Stolz-Cesàro 定理<sup>[8]</sup>) 设  $x_n$  和  $y_n$  为两个实数序列. 若  $y_n$  为正, 严格递增, 且下面的极限存在:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = l,$$

则  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n/y_n)$  也存在并等于  $l$ .

下面, 我们利用数学归纳法证明  $P(k)$  的存在性. 由于网络中任意结点的度至少为  $m$ , 我们先通过下面的引理推导  $P(m)$  的值.

引理 3  $P(m, t)$  为方程(1)中定义的概率, 则  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(m, t)$  存在且与初始网络无关, 并且有

$$P(m) \stackrel{\Delta}{=} \lim_{t \rightarrow \infty} P(m, t) = \frac{2(1-\alpha)}{2\alpha + m(1-\alpha)}. \tag{2}$$

证明 由度分布的定义及  $P(m, t+1, t+1) = 1$  有

$$P(m, t+1) = \frac{1}{t+1} \sum_{i=1}^{t+1} P(m, i, t+1) = \frac{1}{t+1} \left( \sum_{i=1}^t P(m, i, t+1) + 1 \right).$$

显然

$$P(m, 1) = P(m, 1, 1) = 1, \\ P(m, i, t+1) = P(m, i, t) \left( 1 - \frac{\alpha}{(1-\alpha)t} \right) \left( 1 - \frac{1}{2t} \right)^m + O(t^{-3/2} \lg t).$$

对任意  $t > 1$ , 对上式递推可得

$$P(m, t) = P(m, t-1) \frac{t-1}{t} \left( 1 - \frac{\alpha}{(1-\alpha)(t-1)} \right) \left( 1 - \frac{1}{2(t-1)} \right)^m + \frac{1}{t} + O(t^{-3/2} \lg t) = \prod_{i=1}^{t-1} \frac{i}{i+1} \left( 1 - \frac{\alpha}{(1-\alpha)i} \right) \left( 1 - \frac{1}{2i} \right)^m \times \left( 1 + \sum_{i=1}^{t-1} \frac{1}{i} \prod_{j=1}^i \left( \frac{j}{j+1} \right)^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{(1-\alpha)j} \right)^{-1} \left( 1 - \frac{1}{2j} \right)^{-m} \right) + O(t^{-3/2} \lg t).$$

下面, 为证明  $P(m, t)$  存在极限, 设

$$x_n = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} \prod_{j=1}^i \left( 1 - \frac{\alpha}{(1-\alpha)j} \right)^{-1} \left( 1 - \frac{1}{2j} \right)^{-m} \left( \frac{j}{j+1} \right)^{-1}, \\ y_n = \prod_{i=1}^{n-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{(1-\alpha)i} \right)^{-1} \left( 1 - \frac{1}{2i} \right)^{-m} \left( \frac{i}{i+1} \right)^{-1}.$$

因此, 可得

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n} \prod_{j=1}^n \left( \left( 1 - \frac{\alpha}{(1-\alpha)j} \right)^{-1} \left( 1 - \frac{1}{2j} \right)^{-m} \left( \frac{j}{j+1} \right)^{-1} \right),$$

$$y_{n+1} - y_n = \prod_{j=1}^{n-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{(1-\alpha)j} \right)^{-1} \left( 1 - \frac{1}{2j} \right)^{-m} \times \left[ \left( 1 - \frac{\alpha}{(1-\alpha)n} \right)^{-1} \left( 1 - \frac{1}{2n} \right)^{-m} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{-1} - 1 \right].$$

由于  $y_n > 0$  和  $y_{n+1} - y_n > 0$ ,  $\{y_n\}$  为严格单调递增非负序列, 因此,  $y_n \rightarrow \infty$ . 而且

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \frac{\frac{1}{n} \left( 1 - \frac{\alpha}{(1-\alpha)n} \right)^{-1} \left( 1 - \frac{1}{2n} \right)^{-m} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{-1}}{\left[ \left( 1 - \frac{\alpha}{(1-\alpha)n} \right)^{-1} \left( 1 - \frac{1}{2n} \right)^{-m} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{-1} - 1 \right]} \rightarrow \frac{2(1-\alpha)}{2+m(1-\alpha)} \quad (n \rightarrow \infty).$$

由定理 2 可得

$$P(m) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(m, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \frac{2(1-\alpha)}{2+m(1-\alpha)}.$$

从而引理得证.

下面两个引理分情况讨论了  $P(k)$  的递推表达式.

引理 4 当  $m < k < 2m$  时, 对定义在方程(1) 中的概率  $P(k, t)$ , 极限  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(k, t)$  存在并与初始网络无关, 且有

$$P(k) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(k, t) = \frac{(1-\alpha)(k-1)}{2+(1-\alpha)k} P(k-1). \quad (3)$$

证明 根据引理 1, 当  $m < k < 2m$  时,

$$P(k, t) = P^1(k, t) + O(t^{-3/2} \lg t).$$

从而转化为证明  $\lim_{t \rightarrow \infty} P^1(k, t)$  的存在性. 设

$$x_n = P(k-1, t_0-1) \left( 1 - \frac{k-1}{2m(t_0-1)} \right)^{m-1} \left[ 1 - \frac{1}{(1-\alpha)(t_0-1)} \right] + \sum_{s=t_0}^{n-1} P(k-1, s) \left( 1 - \frac{k-1}{2ms} \right)^{m-1} \times \left[ 1 - \frac{1}{(1-\alpha)s} \right] \prod_{j=t_0}^s \left[ \left( 1 - \frac{\alpha}{(1-\alpha)j} \right)^{-1} \left( 1 - \frac{k-1}{2mj} \right)^{-m} \right],$$

$$y_n = \frac{2n}{k-1} \prod_{j=t_0}^{n-1} \left[ \left( 1 - \frac{\alpha}{(1-\alpha)j} \right)^{-1} \left( 1 - \frac{k}{2mj} \right)^{-m} \right].$$

类似地, 易得  $y_n > 0$  和  $y_{n+1} - y_n > 0$ , 则  $\{y_n\}$  为单调递增非负序列. 因此, 由定理 2 可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(k, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} P^1(k, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \frac{(1-\alpha)(k-1)}{2+(1-\alpha)k} P(k-1).$$

引理 5 当  $k \geq 2m$  时,  $P(k, t)$  为定义在方程(1) 中的概率分布, 则极限  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(k, t)$  存在且与初始网络无关, 并且

$$P(k) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(k, t) = \frac{(1-\alpha)(k-1)}{2+(1-\alpha)k} P(k-1) + \frac{2\alpha}{2+(1-\alpha)k} P(k-m). \quad (4)$$

证明 首先我们计算  $\lim_{t \rightarrow \infty} P^2(k, t)$ . 设

$$x_n = P(k-m, t_0-1) \left( 1 - \frac{k-m}{2m(t_0-1)} \right)^m + \sum_{s=t_0}^{n-1} P(k-m, s) \left( 1 - \frac{k-m}{2ms} \right)^{m-1} \prod_{j=t_0}^s \left[ \left( 1 - \frac{\alpha}{(1-\alpha)j} \right)^{-1} \left( 1 - \frac{k}{2mj} \right)^{-m} \right],$$

$$y_n = \frac{(1-\alpha)n}{\alpha} \prod_{j=b_0}^{n-1} \left( \left[ 1 - \frac{\alpha}{(1-\alpha)j} \right]^{-1} \left[ 1 - \frac{k}{2mj} \right]^{-m} \right).$$

类似地, 我们容易得到  $y_n > 0$  和  $y_{n+1} - y_n > 0$ , 则  $\{y_n\}$  为一严格单调递增非负序列. 由定理 2 可知

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P^2(k, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \frac{2\alpha}{2 + (1-\alpha)k} P(k-m).$$

因此, 当  $k \geq 2m$  时, 通过引理 1 和 4 可知

$$P(k) = \frac{(1-\alpha)(k-1)}{2 + (1-\alpha)k} P(k-1) + \frac{2\alpha}{2 + (1-\alpha)k} P(k-m).$$

定理 6 对任意正整数  $k > m$ , 网络稳态度分布  $P(k)$  存在, 且为

$$P(k) \sim \begin{cases} k^{-(1+2/(1-\alpha))}, & \text{若 } m < k < 2m \text{ 且 } m \text{ 充分大;} \\ Ck^{-3}, & \text{若 } k \geq 2m. \end{cases}$$

$C > 0$  为常数.

证明

- 1) 对  $m < k < 2m$ , 通过对方程(3) 递推可得出结论.
- 2) 对  $k \geq 2m$ , 我们首先将方程(4) 改写为

$$\frac{P(k)}{P(k-1)} = \frac{(1-\alpha)(k-1)}{2 + (1-\alpha)k} + \frac{2\alpha}{2 + (1-\alpha)k} \prod_{t=k-m+1}^{k-1} \frac{P(t-1)}{P(t)}. \tag{5}$$

通过递推有

$$\prod_{t=k-m+1}^{k-1} \frac{P(t-1)}{P(t)} = 1 + (m-1) \frac{2-\alpha}{2 + (1-\alpha)k} + \frac{\xi^*(k)}{k^2}, \tag{6}$$

其中  $\xi^*(k) \leq A_3$ ,  $A_3$  为大于 0 的常数. 将方程(6) 代入方程(5) 中可得

$$\frac{P(k)}{P(k-1)} = \frac{(1-\alpha)(k-1)}{2 + (1-\alpha)k} + \frac{2\alpha}{2 + (1-\alpha)k} + \frac{2(m-1)\alpha(2-\alpha)}{[2 + (1-\alpha)k]^2} + \frac{\xi^{**}(k)}{[2 + (1-\alpha)k]k^2},$$

其中  $\xi^{**}(k) \leq 2\alpha A_3$ . 因此, 对足够大的常数  $A_2 > 0$  和所有足够大的  $k$ ,

$$\frac{P(k)}{P(k-1)} = 1 - \frac{3(1-\alpha)}{2 + (1-\alpha)k} + \frac{\xi(k)}{k^2}, \tag{7}$$

其中  $\xi(k) \leq A_2$ . 对方程(7) 递推可知, 对常数  $C > 0$ ,

$$P(k) \sim Ck^{-3}. \tag{8}$$

### 3 模型仿真

本节中, 我们为修正 Cooper-Frieze 模型提供了数值仿真, 包括度分布和网络聚集性. 另外, 将相应的仿真结果与 BA 模型作了对比分析. 文中的所有仿真分析均在网络大小  $t = 1000$ , 参数  $m = 3$  下进行的.

为对文中得到的解析结果进行核实, 在图 1 中, 我们取参数  $\alpha = 0.5$  和  $m = 3$ , 对修正 Cooper-Frieze 模型度分布的解析结果和仿真结果作了比较, 得出两者是完全一致的.

下面, 我们将给出修正 Cooper-Frieze 模型聚集性的仿真分析. 节点  $i$  在时刻  $t$  的局部聚集性  $C_i(t)$  可定义为节点  $i$  邻域中实际存在的连线数与最大可能连线数的比率<sup>[9]</sup>, 即

$$C_i(t) = \frac{|E_i(t)|}{k_i(t)(k_i(t)-1)/2} \tag{9}$$

其中  $E_i(t)$ ,  $k_i(t)$  分别表示节点  $i$  在时刻  $t$  的邻域集和度,  $|E_i(t)|$  表示邻域中连线数.

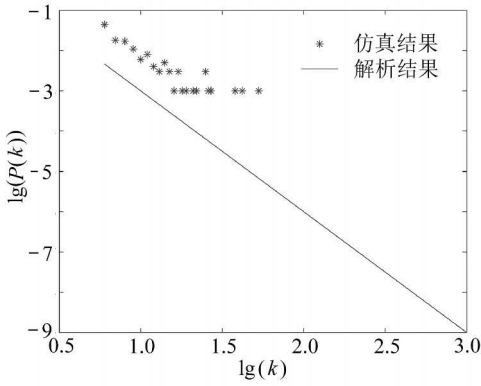


图 1 在双对数坐标系下,当参数  $\alpha = 0.5$  时,修正 Cooper-Frieze 模型度分布仿真结果与解析结果的比较

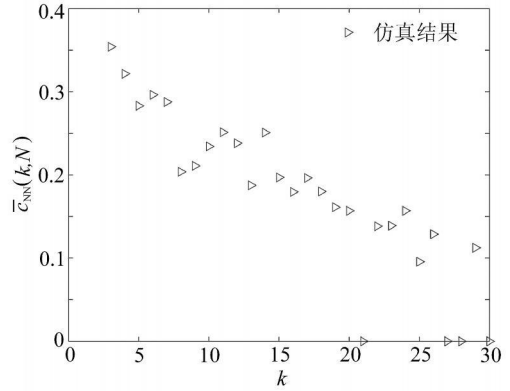


图 2 当参数  $\alpha = 0.2$  时,修正 Cooper-Frieze 模型以度  $k$  为变量的网络平均聚集谱  $c_{NN}(k, N)$

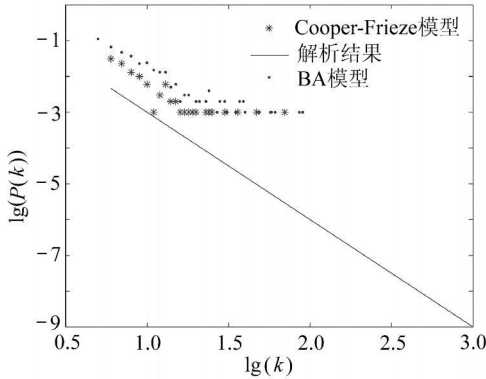


图 3 在双对数坐标下,BA 模型与修正 Cooper-Frieze 度分布对比图 (参数  $\alpha = 0.5$ )

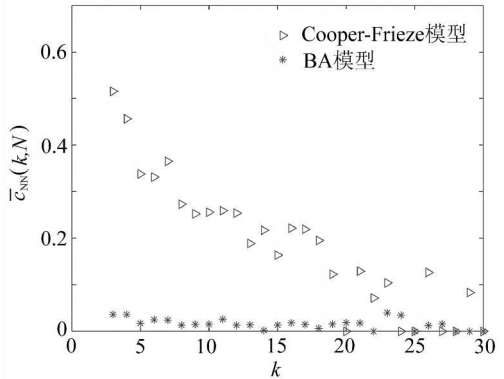


图 4 BA 模型与修正 Cooper-Frieze 模型聚集性对比图(参数  $\alpha = 0.2$ )

根据  $C_i(t)$  我们可直接推导出以度  $k$  为变量的网络聚集谱  $c_{NN}(k, N)$ , 最大时间步  $t = N$ . 在图 2 中我们给出了以  $k$  为变量的聚集谱  $c_{NN}(k, N)$  的仿真图, 其中参数  $t = 1000$ ,  $m = 3$  和  $\alpha = 0.2$ . 并且从图中可看出, 当  $k$  从 0 到 30 时, 聚集谱  $c_{NN}(k, N)$  逐渐变小.

最后, 在图 3 和图 4 中分别从度分布和聚集性两方面与 BA 模型做了比较. 我们发现修正 Cooper-Frieze 模型与 BA 模型有相同的标度指数. 但是, 从图 4 中看出, 修正 Cooper-Frieze 模型有更好的聚集性.

注 图 1 和图 3 中解析结果是根据方程(8), 但没有考虑参数  $C$ . 但从图可看出, 其仿真结果与解析结果对应图形的斜率是一致的, 因此说明了其度分布标度指数是相等的.

### 4 小 结

本文研究了一类修正 Cooper-Frieze 模型, 其既包括增新点连新边, 同时也包括在旧节点之间连新边两种不同机制. 从概率论的角度出发, 我们为稳态度分布  $P(k)$  的存在性提供了证



明,并推导出度分布的具体表达式.并且,从图 1 我们可看出,度分布解析结果与仿真结果非常吻合.

其次,根据与 BA 模型的比较,在修正 Cooper-Frieze 模型中以概率  $\alpha$  允许在旧节点之间连新边的演化机制并没有影响度分布的标度指数,但明显提高了网络的聚集性.

### [参 考 文 献]

- [1] Barabási A L, Albert R, Jeong H. Mean field theory for scale-free random networks[J]. *Physica A*, 1999, **272**(1): 173-187.
- [2] Bollobás B, Riordan O M, Spencer J, et al. The degree sequence of a scale-free random graph process[J]. *Random Structures and Algorithms*, 2001, **18**(3): 279-290.
- [3] Albert R, Barabási A L. Topology of evolving networks local events and universality[J]. *Physical Review Letters*, 2000, **85**(24): 5234-5237.
- [4] CHEN Qing-hua, SHI Ding-hua. The modeling of the scale-free networks[J]. *Physica A*, 2004, **335**(1): 240-248.
- [5] Cooper C, Frieze A. A general model of web graphs[J]. *Random Structures and Algorithms*, 2003, **22**(3): 311-335.
- [6] Hou Z T, Kong X X, Shi D H, et al. Degree distribution stability of scale-free networks[A]. arXiv: 0805.1434v1 [math PR], 2008.
- [7] Barabási A L, Albert R. Emergence of scaling in random networks[J]. *Science*, 1999, **286**(5439): 509-512.
- [8] Stolz O. Vorlesungen Über Allgemeine Arithmetik[M]. Leipzig: Teubner, 1885.
- [9] Watts D J, Strogatz S H. Collective dynamics of small-world networks[J]. *Nature*, 1998, **393**(6684): 440-442.

## Markov Chain-Based Stability Analysis of a Modified Cooper-Frieze Model

TONG Jia-ying<sup>1</sup>, HOU Zhen-ting<sup>1</sup>, SHI Ding-hua<sup>1,2</sup>

(1. School of Mathematics, Central South University, Changsha 410075, P. R. China;

2. Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200444, P. R. China)

**Abstract:** From the perspective of probability, the stability of a modified Cooper-Frieze model is studied. Based on the concept and technique of first passage probability in Markov theory, a rigorous proof for existence of the steady-state degree distribution was provided, moreover the explicit formula was derived analytically. Finally, extensive numerical simulations of the model, including the degree distribution and the clustering were performed.

**Key words:** growing networks; preferential attachment; power law