文章编号:1000-0887(2009)07-0777-06

平面 Stokes 流动中改良的空间衰减限*

J·C·宋

(汉阳大学 应用数学系,安山 京畿道 426-791,韩国)

(郭兴明推荐)

摘要: 研究半无限通道中,时变粘性流体 Stokes 流动时的空间衰减限和衰减率. 得到了一个近乎最优的衰减率,且与 Reynolds 数无关. 修正了 Lin 和 Song 的分析,选用更佳的任意常数得到衰减率为 1.328,明显地改进了 Lin 得到结果 0.91.

关 键 词: 空间衰减限; 微分不等式; 衰减率; Stokes 流动
中图分类号: O357.1 文献标识码: A
DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2009.07.003

引 言

在文献[1]中,Lin 建立了半无限通道中平面 Stokes 流动问题解的能量衰减估计,端部仅满足非零的边界条件. 这样的估计产生了一个以离端部轴向距离为参数的指数型能量衰减,它以微分不等式技术为基础,是 Knowles[2],Horgan 和 Knowles[3] 在经典弹性理论 Saint-Venant 原理研究中发展起来的. 有关 Saint-Venant 型空间衰减结果的调查,见文献[3-5];其他类型的衰减结果,稳定的平面入口流动和管道入口流动,满足 Navier-Stokes 方程,见文献[6-7]. 最近,发表了许多关于时变 Stokes 流动和时变 Navier-Stokes 流动衰减结果的研究,例如,Ames 等[8],Lin 和 Payne[9-10].

本文就半无限通道中,平面 Stokes 流动衰减结果进行再研究. 目标是得到与 Reynolds 数无关的数值上更大的衰减率. 我们相信,除了包括数值计算的非平凡最优化外,研究中获得的最佳衰减率无庸置疑是有价值的. 正如文献[2-3, 11]所评论的,在弹性理论和不可压缩入口层流问题的各个领域中,都希望开展 Saint-Venant 原理的定量应用,他们预测,由于过分保守的衰减率估计,基于微分不等式技术的能量衰减不等式的论据是不充分的. 我们给出了文献[1, 12]的修正分析,以及选择更佳任意常数,改良文献[1, 12]中给出的衰减率.

在第 1 节中,我们将采用公式表示作为分析基础的初边界值问题. 第 2 节致力于派生的能量限分析. 最后一节,得出一个与 Reynolds 数无关的改良的衰减率.

---

* 收稿日期: 2008-12-03; 修订日期: 2009-05-04
基金项目: 韩国国家研究基金会资助项目(KRF-2008-521-C00021)
作者简介: J. C. Song(E-mail: jcsong@hanyang.ac.kr).
本文原文为英文,黄锋 译,张禄坤 校.

1 初边界值问题

令 R 为半无限通道, 通道中 $0 < x_1 < \infty$, $-1 < x_2 < 1$ 的生成元平行于 x_1 轴. 通道的端面 $x_1 = 0$ 用 L_0 表示, R 的边界用 ∂R 表示. 令

$$R_z = \{(x_1, x_2) \mid -1 < x_2 < 1, x_1 > z\},$$
$$L_z = \{(x_1, x_2) \mid -1 < x_2 < 1, x_1 = z\},$$

其中 $z \geqslant 0$ 为到 $x_1 = 0$ 的无量纲距离.

设 $\psi(x_1, x_2, t)$ 为 Stokes 流动的一个无量纲流函数. $\psi(x_1, x_2, t)$ 是依赖于时间的双调和方程:

$$Re^{-1}\Delta^2\psi - \Delta\psi_{,t} = 0, \qquad \text{在 } R \times \{0 < t < T\} \text{ 中}. \tag{1}$$

满足初始条件和边界条件

$$\psi(x_1, x_2, 0) = 0, \qquad x_1 \geqslant 0,\ -1 < x_2 < 1, \tag{2}$$
$$\psi(x_1, -1, t) = \psi(x_1, 1, t) = 0, \qquad x_1 \geqslant 0,\ 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$
$$\psi_{,2}(x_1, -1, t) = \psi_{,2}(x_1, 1, t) = 0, \qquad x_1 \geqslant 0,\ 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{4}$$
$$\psi(0, x_2, t) = f(x_2, t), \qquad -1 < x_2 < 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{5}$$
$$\psi_{,1}(0, x_2, t) = g(x_2, t), \qquad -1 < x_2 < 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T \tag{6}$$

的解这是我们所关心的问题, 其中 Δ 为 Laplace 算子, Re 为 Reynolds 数(基于半宽通道) , f 和 g 为指定函数, 满足

$$f(-1, t) = f(1, t) = f_{,2}(-1, t) = f_{,2}(1, t) = g(-1, t) = g(1, t) = 0. \tag{7}$$

本文约定: 下角中的逗号表示微分, 希腊字母 α 和 β 取值范围为 1 和 2, 重复的下角意味着从 1 到 2 作和.

在开始探索改良的衰减率之前, 我们首先介绍一些不等式, 它们在以后的分析中起着关键作用. 我们先回顾众所周知的 Wirtinger 不等式(8) 和(9) , 以及 Knowles 不等式(10) , $w(x_2)$ 是定义在长度为 2 的区间(-1, 1) 中充分光滑的函数.

如果 $w(x_2) \in C^1(-1, 1)$ 和 $w(-1) = 0, w(1) = 0$, 则

$$\int_{-1}^{1} w^2 \mathrm{d}x_2 \leqslant \frac{2^2}{\pi^2}\int_{-1}^{1} w_{,2}^2 \mathrm{d}x_2. \tag{8}$$

如果 $w(x_2) \in C^2(-1, 1)$ 和 $w(-1) = 0, w_{,2}(-1) = 0, w(1) = 0, w_{,2}(1) = 0$, 则

$$\int_{-1}^{1} w^2 \mathrm{d}x_2 \leqslant \frac{1}{\Lambda^4}\int_{-1}^{1} w_{,22}^2 \mathrm{d}x_2, \qquad \Lambda = 2.365. \tag{9}$$

如果 $w(x_2) \in C_0^2(-1, 1)$ 且对于任意实数 $\beta \geqslant 0$, 则

$$\int_{-1}^{1} (w_{,2}^2 + \beta w^2)\,\mathrm{d}x_2 \leqslant \frac{1}{\lambda(\beta)}\int_{-1}^{1} w_{,22}^2 \mathrm{d}x_2, \tag{10}$$

其中

$$\lambda(\beta) = \frac{r^4(\beta)}{\beta + r^2(\beta)} \tag{11}$$

且 $r(\beta)$ 为如下方程的最小的正根:

$$\tan r = -\sqrt{\frac{\beta}{\beta + r^2}}\tanh\left(r\sqrt{\frac{\beta}{\beta + r^2}}\right), \qquad \beta \geqslant 0. \tag{12}$$

不等式(8) ~ (10) 右边出现的常数为最佳, 并且可以由联合变化特性的最小特征值给出. 不等

式(8)和(9)的证明在文献[6]给出, 不等式(10)的证明在文献[2]798 给出.

2 能量限

在这一节中, 对公式(1)~(6)的解建立改良的衰减估计, 定义能量表达式为

$$E(z,t):=\int_0^t\int_{R_z}\phi_{,\alpha\beta}\phi_{,\alpha\beta}\mathrm{d}A\,\mathrm{d}\eta+\sigma Re\int_0^t\int_{R_z}\phi_{,\alpha\eta}\phi_{,\alpha\eta}\mathrm{d}A\,\mathrm{d}\eta, \tag{13}$$

其中 σ 为正的耦合参数, 随后加以确定, 且 $\mathrm{d}A=\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1$. 分析中重复使用分部积分, 得到关键的恒等式:

$$\int_0^t\int_{R_z}\phi_{,\alpha\beta}\phi_{,\alpha\beta}\mathrm{d}A\,\mathrm{d}\eta=-\frac{\partial}{\partial z}\int_0^t\int_{L_z}(\phi_{,\alpha}\phi_{,\alpha}-\phi\phi_{,11})\mathrm{d}x_2\mathrm{d}\eta-$$
$$Re\int_0^t\int_{L_z}\phi\,\phi_{,1\eta}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}\eta-\frac{Re}{2}\int_{R_z}\phi_{,\alpha}\phi_{,\alpha}\mathrm{d}A\,\Big|_{\eta=t}, \tag{14}$$

$$\int_0^t\int_{R_z}\phi_{,\alpha\eta}\phi_{,\alpha\eta}\mathrm{d}A\,\mathrm{d}\eta=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\int_0^t\int_{L_z}(\phi_{,\eta}^2-2Re^{-1}\phi_{,\eta}\phi_{,11})\mathrm{d}x_2\mathrm{d}\eta-$$
$$\frac{2}{Re}\int_0^t\int_{L_z}\phi_{,1\alpha}\phi_{,\alpha\eta}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}\eta-\frac{1}{2Re}\int_{R_z}\phi_{,\alpha\beta}\phi_{,\alpha\beta}\mathrm{d}A\,\Big|_{\eta=t}. \tag{15}$$

注意到

$$\frac{\partial E}{\partial z}=-\int_0^t\int_{L_z}\phi_{,\alpha\beta}\phi_{,\alpha\beta}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}\eta-\sigma Re\int_0^t\int_{L_z}\phi_{,\alpha\eta}\phi_{,\alpha\eta}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}\eta. \tag{16}$$

利用式(13)~(16), 得

$$\frac{\partial E}{\partial z}+k\int_z^\infty E(\xi,t)\mathrm{d}\xi\leqslant I_1+I_2+I_3+I_4+I_5, \tag{17}$$

其中 k 为待定正常数, 且

$$I_1=\int_0^t\int_{L_z}\phi_{,\alpha\beta}\phi_{,\alpha\beta}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}\eta+\sigma Re\int_0^t\int_{L_z}\phi_{,\alpha\eta}\phi_{,\alpha\eta}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}\eta, \tag{18}$$

$$I_2=k\int_0^t\int_{L_z}(\phi_{,\alpha}\phi_{,\alpha}-\phi\,\phi_{,11})\mathrm{d}x_2\mathrm{d}\eta, \tag{19}$$

$$I_3=\frac{k\sigma Re}{2}\int_0^t\int_{L_z}(\phi_{,\eta}^2-2Re^{-1}\phi_{,\eta}\phi_{,11})\mathrm{d}x_2\mathrm{d}\eta, \tag{20}$$

$$I_4=-kRe\int_0^t\int_{R_z}\phi\,\phi_{,1\eta}\mathrm{d}A\,\mathrm{d}\eta, \tag{21}$$

$$I_5=-2k\sigma\int_0^t\int_{R_z}\phi_{,1\alpha}\phi_{,\alpha\eta}\mathrm{d}A\,\mathrm{d}\eta, \tag{22}$$

式(17)中右边已经忽略 2 个负项. 现在开始估计 $I_n(n=2,3,4,5)$.

对于 I_2, 利用不等式(8)、加权算法几何平均不等式、及不等式(10), 对任意正常数 ϵ_1, 有

$$I_2\leqslant k\left\{\frac{4}{\pi^2}\int_0^t\int_{L_z}\phi_{,12}^2\mathrm{d}x_2\mathrm{d}\eta+\int_0^t\int_{L_z}(\phi_{,2}^2+\epsilon_1\phi^2)\mathrm{d}x_2\mathrm{d}\eta+\frac{1}{4\epsilon_1}\int_0^t\int_{L_z}\phi_{,11}^2\mathrm{d}x_2\mathrm{d}\eta\right\}\leqslant$$
$$k\left\{\frac{4}{\pi^2}\int_0^t\int_{L_z}\phi_{,12}^2\mathrm{d}x_2\mathrm{d}\eta+\frac{1}{\lambda(\epsilon_1)}\int_0^t\int_{L_z}\phi_{,22}^2\mathrm{d}x_2\mathrm{d}\eta+\frac{1}{4\epsilon_1}\int_0^t\int_{L_z}\phi_{,11}^2\mathrm{d}x_2\mathrm{d}\eta\right\}. \tag{23}$$

利用不等式(8)及加权算法几何平均不等式, 对任意正常数 ϵ_2, 得到 I_3 的限

$$I_3\leqslant\frac{k\sigma Re}{2}\frac{4}{\pi^2}\int_0^t\int_{L_z}\phi_{,\eta 2}^2\mathrm{d}x_2\mathrm{d}\eta+$$

$$k\sigma\left(\frac{\epsilon_2}{4}\int_0^t\int_{L_z}\varphi_{,11}^2\mathrm{d}x_2\mathrm{d}\eta+\frac{4}{\epsilon_2\pi^2}\int_0^t\int_{L_z}\varphi_{,\eta2}^2\mathrm{d}x_2\mathrm{d}\eta\right). \tag{24}$$

联合 I_1, I_2 和 I_3 得到不等式

$$\begin{aligned}-I_1+I_2+I_3\leqslant&-\left(1-\frac{k}{4\epsilon_1}-\frac{k\sigma}{4}\epsilon_2\right)\int_0^t\int_{L_z}\varphi_{,11}^2\mathrm{d}x_2\mathrm{d}\eta-\\&\left(2-\frac{4k}{\pi^2}\right)\int_0^t\int_{L_z}\varphi_{,12}^2\mathrm{d}x_2\mathrm{d}\eta-\left(1-\frac{k}{\lambda(\epsilon_1)}\right)\int_0^t\int_{L_z}\varphi_{,22}^2\mathrm{d}x_2\mathrm{d}\eta-\\&\sigma Re\left(1-\frac{2k}{\pi^2}-\frac{4k}{\pi^2\epsilon_2 Re}\right)\int_0^t\int_{L_z}\varphi_{,2\eta}^2\mathrm{d}x_2\mathrm{d}\eta-\sigma Re\int_0^t\int_{L_z}\varphi_{,1\eta}^2\mathrm{d}x_2\mathrm{d}\eta.\end{aligned} \tag{25}$$

如果选择参数 k, σ 和常数 ϵ_1, ϵ_2, 满足结果 $-I_1+I_2+I_3\leqslant 0$, 则式(25)中的各个积分式的系数非负.

$$1-\frac{k}{4\epsilon_1}-\frac{k\sigma}{4}\epsilon_2\geqslant 0, \tag{26}$$

$$2-\frac{4k}{\pi^2}\geqslant 0, \tag{27}$$

$$1-\frac{k}{\lambda(\epsilon_1)}\geqslant 0, \tag{28}$$

$$1-\frac{2k}{\pi^2}-\frac{4k}{\pi^2\epsilon_2 Re}\geqslant 0. \tag{29}$$

对于 I_4, 由不等式(9)和 Cauchy-Schwarz 不等式, 以及加权算法几何平均不等式, 对于任意正常数 δ_1, 得到

$$\begin{aligned}I_4\leqslant&\frac{k}{\Lambda^2}\left(\int_0^t\int_{R_z}\varphi_{,22}^2\mathrm{d}A\,\mathrm{d}\eta Re^2\int_0^t\int_{R_z}\varphi_{,1\eta}^2\mathrm{d}A\,\mathrm{d}\eta\right)^{1/2}\leqslant\\&\frac{k}{\Lambda^2}\left(\frac{\delta_1}{2}\int_0^t\int_{R_z}\varphi_{,22}^2\mathrm{d}A\,\mathrm{d}\eta+\frac{Re}{2\sigma\delta_1}\sigma Re\int_0^t\int_{R_z}\varphi_{,1\eta}^2\mathrm{d}A\,\mathrm{d}\eta\right).\end{aligned} \tag{30}$$

最后, 对于 I_5, 利用 Cauchy-Schwarz 不等式和加权算法几何平均不等式, 对于任意正常数 δ_2 和 δ_3, 得到

$$\begin{aligned}I_5\leqslant&2k\left(\int_0^t\int_{R_z}\varphi_{,1\alpha}\varphi_{,1\alpha}\mathrm{d}A\,\mathrm{d}\eta\,\sigma^2\int_0^t\int_{R_z}\varphi_{,\alpha\eta}\varphi_{,\alpha\eta}\mathrm{d}A\,\mathrm{d}\eta\right)^{1/2}\leqslant\\&k\left(\delta_2\int_0^t\int_{R_z}\varphi_{,11}^2\mathrm{d}A\,\mathrm{d}\eta+\frac{\sigma}{Re\,\delta_2}\sigma Re\int_0^t\int_{R_z}\varphi_{,1\eta}^2\mathrm{d}A\,\mathrm{d}\eta+\right.\\&\left.\delta_3\int_0^t\int_{R_z}\varphi_{,12}^2\mathrm{d}A\,\mathrm{d}\eta+\frac{\sigma}{Re\,\delta_3}\sigma Re\int_0^t\int_{R_z}\varphi_{,2\eta}^2\mathrm{d}A\,\mathrm{d}\eta\right).\end{aligned} \tag{31}$$

联立得到 I_4 和 I_5 的限

$$\begin{aligned}I_4+I_5\leqslant&k\left[\delta_2\int_0^t\int_{R_z}\varphi_{,11}^2\mathrm{d}A\,\mathrm{d}\eta+\frac{\delta_3}{2}2\int_0^t\int_{R_z}\varphi_{,12}^2\mathrm{d}A\,\mathrm{d}\eta+\right.\\&\frac{\delta_1}{2\Lambda^2}\int_0^t\int_{R_z}\varphi_{,22}^2\mathrm{d}A\,\mathrm{d}\eta+\left(\frac{Re}{2\sigma\Lambda^2\delta_1}+\frac{\sigma}{Re\,\delta_2}\right)\sigma Re\int_0^t\int_{R_z}\varphi_{,1\eta}^2\mathrm{d}A\,\mathrm{d}\eta+\\&\left.\frac{\sigma}{Re\,\delta_3}\sigma Re\int_0^t\int_{R_z}\varphi_{,2\eta}^2\mathrm{d}A\,\mathrm{d}\eta\right]\leqslant kME(z,t),\end{aligned} \tag{32}$$

其中

$$M=\max\left(\delta_2,\frac{\delta_3}{2},\frac{\delta_1}{2\Lambda^2},\frac{Re}{2\sigma\Lambda^2\delta_1}+\frac{\sigma}{Re\,\delta_2},\frac{\sigma}{Re\,\delta_3}\right). \tag{33}$$

由条件(26)~(29)可得$-I_1+I_2+I_3\leqslant 0$, 略去$-I_1+I_2+I_3$并利用式(32), 式(17)可以写为

$$\frac{\partial E}{\partial z}+k\int_z^{\infty}E(\xi,t)\mathrm{d}\xi\leqslant kME(z,t). \tag{34}$$

对于不等式(34), 我们参考了文献[7]103和[13]13, 其中后者通过比较法表示, 式(34)成为

$$E(z,t)\leqslant E(0,t)\mathrm{e}^{-\gamma z},\qquad z\geqslant 0, \tag{35}$$

其中

$$\gamma=\frac{\sqrt{k^2M^2+4k}-kM}{2}. \tag{36}$$

3 衰减率

本节介绍如何对式(36)中γ获得不依赖于 Reynolds 数的可能最好的衰减率估计. 注意到, γ是k的递增函数, 即$\partial\gamma/\partial k>0$; γ是M的递减函数, 即$\partial\gamma/\partial M<0$. 因此, 我们不仅必须确定, 当$\sigma$, ϵ_1和ϵ_2为正值时k最大, 还要确定σ, δ_1, δ_2和δ_3为正值时M最小, 这样才可以得到γ可能的最优值. 我们首先确定k可能的最大值, 为此改写条件(26)和(29)如下:

$$k\leqslant\frac{1}{1/(4\epsilon_1)+\sigma\epsilon_2/4}, \tag{37}$$

$$k\leqslant\frac{1}{2/\pi^2+4/(\pi^2\epsilon_2 Re)}. \tag{38}$$

由式(27)和(28)可知$k\leqslant\pi^2/2$, $k\leqslant\lambda(\epsilon_1)$, 选择任意常数$\sigma$, ϵ_1和ϵ_2, 从而得到接近最优值的γ, 还希望选择的M最小(或γ最大), 如下选择:

$$\delta_2=\frac{\delta_3}{2}=\frac{\delta_1}{2\Lambda^2},\quad \frac{Re}{2\sigma\Lambda^2\delta_1}+\frac{\sigma}{Re\delta_2}=\frac{\sigma}{Re\delta_3}=\delta_2. \tag{39}$$

但是, 不是所有这些条件都能够满足的. 一个接近最优的选择是

$$M=\delta_2=\sqrt{\frac{Re}{4\Lambda^4\sigma}+\frac{\sigma}{Re}}. \tag{40}$$

当前的任务是通过数值计算确定这些正常数σ, ϵ_1, ϵ_2, δ_1, δ_2和δ_3. 如果令

$$\epsilon_2=x/Re,\quad \sigma=yRe, \tag{41}$$

则由式(37)和(38), 一个可能的选择是满足如下关系:

$$\frac{1}{4\epsilon_1}+\frac{xy}{4}\approx\frac{2}{\pi^2}+\frac{4}{\pi^2 x}. \tag{42}$$

记住y, 确保基本参数在k的最大值和M的最小值之间的平衡. 由式(40)和(41)可知, 取$y=1/(2\Lambda^2)\approx 0.089$时, 有$M=\sqrt{2y}\approx 0.421$. 那么由式(42)计算得到, $x\approx 8.746$, $\epsilon_1\approx 4.655$, 不但由式(11)和(12)得到$\lambda(4.655)$的最小特征值 4.029, 而且由式(37)或(38)得到k的可能值 4.016. 式(36)中相应的γ值为

$$\gamma\approx 1.328. \tag{43}$$

该衰减率的估计独立于 Reynolds 数, 对文献[1]中值 0.91 有着明显的改进. 为了构造明确的指数型衰减不等式(35), 我们要求总能量$E(0,t)$数值有限, 其限在文献[1]中给出.

[参 考 文 献]

[1] LIN Chang-hao. Spatial decay estimates and energy bounds for the Stokes flow equation[J]. Stability and Appl Anal of Continuous Media, 1992, **2**: 249-264.

[2] Knowles J K. An energy estimate for the biharmonic equation and its application to Saint-Venant' s principle in plane elastostatics[J]. Indian J Pure Appl Math, 1983, **14**(7): 791-805.

[3] Horgan C O, Knowles J K. Recent developments concerning Saint-Venant' s principle[J]. Adv Appl Mech, 1983, **23**: 179-269.

[4] Horgan C O. Recent developments concerning Saint-Venant' s principle: an update[J]. Appl Mech Rev, 1989, **42**: 295-303.

[5] Horgan C O. Recent developments concerning Saint-Venant' s principle: a second update [J]. Appl Mech Rev, 1996, **49**(10S): 101-111.

[6] Horgan C O. Plane entry flows and energy estimates for the Navier-Stokes equations[J]. Arch Rat Mech Anal, 1978, **68**(4): 359-381.

[7] Horgan C O, Wheeler L T. Spatial decay estimates for the Navier-Stokes equations with application to the problem of entry flow[J]. SIAM J Appl Math, 1978, **35**(1): 97-116.

[8] Ames K A, Payne L E, Schaefer P W. Spatial decay estimates in time-dependent Stokes flow[J]. SIAM J Math Anal, 1993, **24**(6): 1395-1413.

[9] LIN Chang-hao, Payne L P. Spatial decay bounds in the channel flow of an incompressible viscous fluid[J]. Math Models Meth Appl Sci, 2004, **14**(6): 795-818.

[10] LIN Chang-hao, Payne L P. Spatial decay bounds in time-dependent pipe flow of an incompressible viscous fluid[J]. SIAM J Appl Math, 2004, **65**(2): 458-474.

[11] Horgan C O. Decay estimates for the biharmonic equation with applications to Saint-Venant' s principle in plane elasticity and Stokes flow[J]. Quart Appl Math, 1989, **42**(1): 147-157.

[12] Song J C. Improved decay estimates in time-dependent Stokes flow[J]. J Math Anal Appl, 2003, **288**(2): 505-517.

[13] Vafeades P, Horgan C O. Exponential decay estimates for solutions of the von K rm n equations on a semi-infinite strip[J]. Arch Rat Mech Anal, 1988, **104**(1): 1-25.

Improved Spatial Decay Bounds in the Plane Stokes Flow

J. C. Song

(Department of Applied Mathematics, Hanyang University, Ansan,
Gyeonggido 426-791, Korea)

Abstract: Spatial decay bounds and a decay rate for the time-dependent Stokes flow of a viscous fluid was investigated in a semi-infinite channel. It is shown how to obtain a near optimal decay rate that is independent of the Reynolds number. It is also shown that a modification of the analysis given by Lin-Song and a somewhat better choice of arbitrary constants yield the decay rate 1.328 which clearly improves upon that 0.91 obtained by Lin.

Key words: spatial decay bound; differential inequality; decay rate