文章编号: 1000-0887(2009) 07-0856-09

具有分布时滞和区间参数的随机系统的 p- 阶矩指数鲁棒稳定性*

苏春华[1,2], 刘思峰[1]

(1. 南京航空航天大学 经济与管理学院, 南京 210016;
2. 信阳师范学院 数学与信息科学学院, 河南 信阳 464000)

(陈立群推荐)

摘要: 研究了一类具有分布时滞和区间参数的随机系统的 p- 阶矩指数鲁棒稳定性问题. 利用 Liapunov-Krasovskii 泛函、区间矩阵的分解技术及 Itô 公式, 得到了该系统 p- 阶矩指数鲁棒稳定的时滞依赖的稳定性判据. 通过数值例子说明了所得判据的有效性和实用性.

关 键 词: 随机系统; 分布时滞; 指数鲁棒稳定性; 区间矩阵
中图分类号: O231.3 文献标识码: A
DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2009.07.010

引 言

在自然和社会领域中, 由于一些实际系统, 如生态系统、种群动力系统、金融系统, 人工神经网路和通讯系统等[1-3], 常可以用具有分布时滞的随机泛函微分方程去描述. 因此, 近几年来, 关于随机分布时滞系统的稳定性问题已受到了一些学者的关注, 而且很多研究工作主要集中在对时滞依赖的稳定性判据的获取上, 因为它通常比时滞独立的稳定性判据有较小的保守性. 例如, 文献[4] 分别给出了两类随机分布时滞系统渐近稳定的时滞依赖性判据. 而文献[5] 和文献[6] 则分别得到了一类随机分布时滞系统的均方指数稳定性的时滞依赖的判据. 但文献[5] 和文献[6] 所得的时滞依赖性判据在系统中的矩阵函数为常数矩阵时却是时滞独立的. 目前, 关于随机分布时滞系统的其它类型的稳定性问题, 如系统的 p- 阶矩矩稳定和 p- 阶矩指数稳定等问题, 还有待于处理.

另一方面, 在随机系统的研究过程中, 由于认知和信息的缺失, 人们往往不能准确地给出系统中的一些参数, 参数的不确定性常被含在随机系统中. 因此, 这导致了不确定随机系统稳定性的研究. 目前, 虽然关于不确定随机系统的稳定性的研究成果已有很多[7-11], 但对于不确定随机分布时滞系统的 p- 阶矩指数稳定性问题, 还没有人涉及. 所以, 在本文中, 我们将探究一类具有分布时滞和不确定参数的随机系统的 p- 阶矩指数鲁棒稳定的判据, 而且使所得的稳

* 收稿日期: 2008-05-31; 修订日期: 2009-05-13
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70473037); 河南省自然科学基金资助项目(0611054400)
作者简介: 苏春华(1965—) , 男, 河南上蔡人, 讲师, 博士(联系人. Tel: + 86-376-6390017; E-mail: chslg@tom.com) .

定性判据即使在系统中的矩阵函数为常数矩阵时也是时滞依赖的.

本文采用以下记号: $|\cdot|$ 和 $\|\cdot\|$ 分别表示一个向量的 Euclid 范数和一个矩阵的谱范数; 如果 $\boldsymbol{A}$ 是一个对称矩阵, $\boldsymbol{A}\leqslant \boldsymbol{0}(<\boldsymbol{0})$ 意味着矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是一个半负定(负定) 矩阵, 而且用 $\lambda_{\max}(\boldsymbol{A})$ 表示它的最大特征值; $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是矩阵(向量) $\boldsymbol{A}$ 的转置; $(\Omega, \mathcal{F}, \left\{\mathcal{F}_t\right\}_{t\geqslant 0}, P)$ 是一个具有自然流 $\left\{\mathcal{F}_t\right\}_{t\geqslant 0}$ 的完备概率空间, $w(t)$ 是定义在完备概率空间上的一维标准的 Brown 运动; 设 $\tau>0$, $C([-\tau,0];R^n)$ 是定义在 $[-\tau,0]$ 上并取值于 R^n 上的所有连续函数 φ 的全体, 此外, 对于 $p\geqslant 2$, 以 $L^p_{\mathcal{F}_t}([-\tau,0];R^n)$ 表示所有 $\mathcal{F}_t$ 可测的取值于 $C([-\tau,0];R^n)$ 上的随机变量 $\xi=\left\{\xi(\theta): -\tau\leqslant\theta\leqslant 0\right\}$ 的全体, 且 $\sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0}\mathrm{E}|\xi(\theta)|^p<\infty(p\geqslant 2)$.

1　预 备 工 作

考虑下面的随机系统:

$$\begin{cases} \mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)=\left[\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{x}(t-\tau_{01})+\displaystyle\int_{t-\tau_1}^{t}\boldsymbol{G}_1(t-s)\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t+ \\ \qquad\left[\boldsymbol{C}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{D}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{x}(t-\tau_{02})+\displaystyle\int_{t-\tau_2}^{t}\boldsymbol{G}_2(t-s)\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}w(t), \qquad t\geqslant 0, \\ \boldsymbol{x}_0=\xi, \qquad \xi\in L^p_{\mathcal{F}_0}([-\tau,0];R^n), \ -\tau\leqslant t\leqslant 0. \end{cases} \tag{1}$$

其中, $\tau=\max\left\{\tau_{01},\tau_1,\tau_{02},\tau_2\right\}$, $\boldsymbol{x}(t)\in R^n$, $\boldsymbol{G}_i(t)\ (i=1,2)$ 是 $n\times n$ 矩阵函数, $\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}$, $\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}$, $\boldsymbol{C}_{\mathrm{I}}$ 和 $\boldsymbol{D}_{\mathrm{I}}$ 是 $n\times n$ 区间矩阵, 且

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}=[\boldsymbol{L}_a,\boldsymbol{U}_a]=\left\{\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}: \underline{a}_{ij}\leqslant a_{ij}\leqslant \overline{a}_{ij}; i,j=1,2,\cdots,n\right\},$$
$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}=[\boldsymbol{L}_b,\boldsymbol{U}_b]=\left\{\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}: \underline{b}_{ij}\leqslant b_{ij}\leqslant \overline{b}_{ij}; i,j=1,2,\cdots,n\right\},$$
$$\boldsymbol{C}_{\mathrm{I}}=[\boldsymbol{L}_c,\boldsymbol{U}_c]=\left\{\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{n\times n}: \underline{c}_{ij}\leqslant c_{ij}\leqslant \overline{c}_{ij}; i,j=1,2,\cdots,n\right\},$$
$$\boldsymbol{D}_{\mathrm{I}}=[\boldsymbol{L}_d,\boldsymbol{U}_d]=\left\{\boldsymbol{D}=(d_{ij})_{n\times n}: \underline{d}_{ij}\leqslant d_{ij}\leqslant \overline{d}_{ij}; i,j=1,2,\cdots,n\right\}.$$

显然, 对任意的矩阵 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}$, $\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}$, $\boldsymbol{C}\in\boldsymbol{C}_{\mathrm{I}}$ 和 $\boldsymbol{D}\in\boldsymbol{D}_{\mathrm{I}}$, 利用区间矩阵的分解技术, 我们有

$$\begin{cases} \|\boldsymbol{A}\|\leqslant\left\|\dfrac{\boldsymbol{U}_a+\boldsymbol{L}_a}{2}\right\|+\left\|\dfrac{\boldsymbol{U}_a-\boldsymbol{L}_a}{2}\right\|, & \|\boldsymbol{B}\|\leqslant\left\|\dfrac{\boldsymbol{U}_b+\boldsymbol{L}_b}{2}\right\|+\left\|\dfrac{\boldsymbol{U}_b-\boldsymbol{L}_b}{2}\right\|, \\ \|\boldsymbol{C}\|\leqslant\left\|\dfrac{\boldsymbol{U}_c+\boldsymbol{L}_c}{2}\right\|+\left\|\dfrac{\boldsymbol{U}_c-\boldsymbol{L}_c}{2}\right\|, & \|\boldsymbol{D}\|\leqslant\left\|\dfrac{\boldsymbol{U}_d+\boldsymbol{L}_d}{2}\right\|+\left\|\dfrac{\boldsymbol{U}_d-\boldsymbol{L}_d}{2}\right\|, \end{cases} \tag{2}$$

其中, $\boldsymbol{L}_x=(\underline{x}_{ij})_{n\times n}$, $\boldsymbol{U}_x=(\overline{x}_{ij})_{n\times n}$, x 分别代表 a,b,c,d.

定义 1　对于任意的初始条件 $\xi\in L^p_{\mathcal{F}_0}([-\tau,0];R^n)$ 和矩阵 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}$, $\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}$, $\boldsymbol{C}\in\boldsymbol{C}_{\mathrm{I}}$ 及 $\boldsymbol{D}\in\boldsymbol{D}_{\mathrm{I}}$, 如果存在一对正常数 r 和 K 使得 $\mathrm{E}|\boldsymbol{x}(t;\xi)|^p\leqslant K\mathrm{e}^{-rt}\sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0}\mathrm{E}|\xi(\theta)|^p$, $t\geqslant 0$, 或等价为 $\lim\sup_{t\to\infty}[(1/t)\ln(\mathrm{E}|\boldsymbol{x}(t;\xi)|^p)]\leqslant -r$. 那么称方程(1) 的平凡解 $\boldsymbol{x}(t;\xi)$ 是 p-阶矩指数鲁棒稳定的.

引理 1[12]　若 u,v,ε 是正常数, $p\geqslant 2$, 那么

$$u^{p-2}v^2\leqslant\frac{\varepsilon(p-2)}{p}u^p+\frac{2\varepsilon^{-(p-2)/2}}{p}v^p.$$

引理 2(Hölder 不等式)　设 $1\leqslant p, q\leqslant\infty$, $1/p+1/q=1$, $\boldsymbol{f}(t)\in R^{n\times m}$, $\boldsymbol{g}(t)\in R^{m\times n}$, $t\in\mathbf{R}$. 如果 $\boldsymbol{f}(t)$, $\boldsymbol{g}(t)$ 在 $[a,b]$ 上都是可积的矩阵函数, 那么

$$\left\|\int_a^b\boldsymbol{f}(t)\boldsymbol{g}(t)\mathrm{d}t\right\|\leqslant\left(\int_a^b\|\boldsymbol{f}(t)\|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}\left(\int_a^b\|\boldsymbol{g}(t)\|^q\mathrm{d}t\right)^{1/q}.$$

2 主要结果

定理1 如果存在正常数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 使得

$$\begin{aligned}\lambda := {} & \lambda_{\max}\left(\frac{U_a+L_a}{2}+\frac{U_a^{\mathrm{T}}+L_a^{\mathrm{T}}}{2}\right)+2\left\|\frac{U_a-L_a}{2}\right\|+2\left(\left\|\frac{U_b+L_b}{2}\right\|+\left\|\frac{U_b-L_b}{2}\right\|\right)+\\ & \varepsilon_1+\frac{p-2}{p}\varepsilon_1^{-1}+(p-1)\left[(1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)\left(\left\|\frac{U_c+L_c}{2}\right\|+\left\|\frac{U_c-L_c}{2}\right\|\right)^2+\right.\\ & \left.(1+\varepsilon_3^{-1}+\varepsilon_4)\left(\left\|\frac{U_d+L_d}{2}\right\|+\left\|\frac{U_d-L_d}{2}\right\|\right)^2\right]+\frac{2}{p}\varepsilon_1^{-1}\tau_1^p\sup_{0\leqslant\alpha\leqslant\tau_1}\|G_1(\alpha)\|^p+\\ & \frac{(p-1)}{p}(1+\varepsilon_2^{-1}+\varepsilon_4^{-1})\left(p-2+2\tau_2^p\sup_{0\leqslant\alpha\leqslant\tau_2}\|G_2(\alpha)\|^p\right)<0,\end{aligned}\tag{3}$$

那么,对于任意的初始条件 $\xi\in L^p_{\mathcal{F}_0}([-\tau,0];R^n)$, 方程(1)的解满足

$$E|x(t)|^p\leqslant[(1+k_{01}\tau_{01}+k_{02}\tau_{02}+k_1\tau_1^2+k_2\tau_2^2)\sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant0}E|\xi(\theta)|^p]e^{-rt},$$

也就是

$$\lim_{t\to\infty}\sup\left[\frac{1}{t}\ln(E|x(t;\xi)|^p)\right]\leqslant-r$$

其中

$$\begin{aligned}& k_{01}=\left(\left\|\frac{U_b+L_b}{2}\right\|+\left\|\frac{U_b-L_b}{2}\right\|\right)e^{r\tau_{01}},\quad k_1=\varepsilon_1^{-1}\tau_1^{p-1}e^{r\tau_1}\sup_{0\leqslant\alpha\leqslant\tau_1}\|G_1(\alpha)\|^p,\\ & k_{02}=(p-1)(1+\varepsilon_3^{-1}+\varepsilon_4)\left(\left\|\frac{U_d+L_d}{2}\right\|+\left\|\frac{U_d-L_d}{2}\right\|\right)^2e^{r\tau_{02}},\\ & k_2=(p-1)(1+\varepsilon_2^{-1}+\varepsilon_4^{-1})\tau_2^{p-1}e^{r\tau_2}\sup_{0\leqslant\alpha\leqslant\tau_2}\|G_2(\alpha)\|^p,\end{aligned}$$

$p\geqslant2$, $r>0$ 是方程

$$\begin{aligned}& r+\frac{p}{2}\left[\lambda_{\max}\left(\frac{U_a+L_a}{2}+\frac{U_a^{\mathrm{T}}+L_a^{\mathrm{T}}}{2}\right)+2\left\|\frac{U_a-L_a}{2}\right\|+k_{01}e^{-r\tau_{01}}+\right.\\ & \left.\varepsilon_1+(p-1)(1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)\left(\left\|\frac{U_c+L_c}{2}\right\|+\left\|\frac{U_c-L_c}{2}\right\|\right)^2\right]+\frac{p-2}{2}k_{01}e^{-r\tau_{01}}+\\ & \frac{p-2}{2}\varepsilon_1^{-1}+\frac{p-2}{2}k_{02}e^{-r\tau_{02}}+\frac{(p-1)(p-2)}{2}(1+\varepsilon_2^{-1}+\varepsilon_4^{-1})+\\ & k_{01}+k_{02}+k_1\tau_1+k_2\tau_2=0\end{aligned}\tag{4}$$

的唯一正根. 换句话说,系统(1)是p-阶矩指数鲁棒稳定的,且Liapunov指数不大于$-r$.

证明 对于任意给定的初始条件 $\xi\in L^p_{\mathcal{F}_0}([-\tau,0];R^n)$ 和矩阵 $A\in A_I$, $B\in B_I$, $C\in C_I$, $D\in D_I$, 记方程(1)的解为 $x(t;\xi)=x(t)$, 定义Liapunov-Krasovskii泛函

$$V(x,t)=V_1(x,t)+V_2(x,t)+V_3(x,t)\qquad(x,t)\in R^n\times\mathbf{R}_+.$$

其中

$$V_1(x,t)=e^{rt}|x|^p+k_{01}\int_{t-\tau_{01}}^{t}e^{rs}|x(s)|^p\mathrm{d}s+k_{02}\int_{t-\tau_{02}}^{t}e^{rs}|x(s)|^p\mathrm{d}s,$$

$$V_2(x,t)=k_1\int_{-\tau_1}^{0}\int_{t+\theta}^{t}e^{rs}|x(s)|^p\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta,\quad V_3(x,t)=k_2\int_{-\tau_2}^{0}\int_{t+\theta}^{t}e^{rs}|x(s)|^p\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta,$$

其中 k_{01}, k_{02}, k_1, k_2 已在定理1中被定义. 那么,利用 Itô 公式中的弱无穷小算子沿着系统(1)的迹计算得

$$LV(\boldsymbol{x}(t),t)=(r+k_{01}+k_{02}+k_1\tau_1+k_2\tau_2)\mathrm{e}^{rt}|\boldsymbol{x}(t)|^p-
k_{01}\mathrm{e}^{r(t-\tau_{01})}|\boldsymbol{x}(t-\tau_{01})|^p-k_{02}\mathrm{e}^{r(t-\tau_{02})}|\boldsymbol{x}(t-\tau_{02})|^p-
k_1\int_{t-\tau_1}^t\mathrm{e}^{rs}|\boldsymbol{x}(s)|^p\mathrm{d}s-k_2\int_{t-\tau_2}^t\mathrm{e}^{rs}|\boldsymbol{x}(s)|^p\mathrm{d}s+
\frac{1}{2}p\mathrm{e}^{rt}|\boldsymbol{x}(t)|^{p-2}\Big\{2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}(t-\tau_{01})+
2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\int_{t-\tau_1}^t\boldsymbol{G}_1(t-s)\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s+(p-1)\Big[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)+
2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}(t-\tau_{02})+2\boldsymbol{x}^{T}(t)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\int_{t-\tau_2}^t\boldsymbol{G}_2(t-s)\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s+
\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau_{02})\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}(t-\tau_{02})+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau_{02})\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\int_{t-\tau_2}^t\boldsymbol{G}_2(t-s)\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s+
\left(\int_{t-\tau_2}^t\boldsymbol{G}_2(t-s)\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s\right)^{\mathrm{T}}\int_{t-\tau_2}^t\boldsymbol{G}_2(t-s)\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s\Big]\Big\}. \tag{5}$$

再根据非负矩阵的范数不等式及不等式 $2ab\leqslant\varepsilon a^2+\varepsilon^{-1}b^2(a,b\in\mathbf{R},\varepsilon>0)$ 和式(2)我们可推得

$$2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\left(\frac{\boldsymbol{U}_a+\boldsymbol{L}_a}{2}+\frac{\boldsymbol{U}_a^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{L}_a^{\mathrm{T}}}{2}\right)\boldsymbol{x}(t)+2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\delta\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)\leqslant
\lambda_{\max}\left(\frac{\boldsymbol{U}_a+\boldsymbol{L}_a}{2}+\frac{\boldsymbol{U}_a^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{L}_a^{\mathrm{T}}}{2}\right)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{x}(t)+2\left\|\frac{\boldsymbol{U}_a-\boldsymbol{L}_a}{2}\right\|\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{x}(t), \tag{6}$$

$\left(\text{上式中应用了 } \boldsymbol{A}=\dfrac{\boldsymbol{L}_a+\boldsymbol{U}_a}{2}+\delta\boldsymbol{A},\ \delta\boldsymbol{A}=\left(\dfrac{\overline{a}_{ij}-\underline{a}_{ij}}{2}\delta_{ij}\right)_{n\times n},\ \delta_{ij}\in[-1,1]\right).$

$$2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}(t-\tau_{01})\leqslant\|\boldsymbol{B}\|[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau_{01})\boldsymbol{x}(t-\tau_{01})]\leqslant
\left(\left\|\frac{\boldsymbol{U}_b+\boldsymbol{L}_b}{2}\right\|+\left\|\frac{\boldsymbol{U}_b-\boldsymbol{L}_b}{2}\right\|\right)[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau_{01})\boldsymbol{x}(t-\tau_{01})], \tag{7}$$

$$2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\int_{t-\tau_1}^t\boldsymbol{G}_1(t-s)\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s\leqslant\varepsilon_1\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{x}(t)+\varepsilon_1^{-1}\left|\int_{t-\tau_1}^t\boldsymbol{G}_1(t-s)\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s\right|^2, \tag{8}$$

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)\leqslant\|\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\||\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)||\boldsymbol{x}(t)|\leqslant
\left(\left\|\frac{\boldsymbol{U}_c+\boldsymbol{L}_c}{2}\right\|+\left\|\frac{\boldsymbol{U}_c-\boldsymbol{L}_c}{2}\right\|\right)^2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{x}(t), \tag{9}$$

$$2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\int_{t-\tau_2}^t\boldsymbol{G}_2(t-s)\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s\leqslant
\varepsilon_2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)+\varepsilon_2^{-1}\left|\int_{t-\tau_2}^t\boldsymbol{G}_2(t-s)\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s\right|^2, \tag{10}$$

$$2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}(t-\tau_{02})\leqslant\varepsilon_3\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)+\varepsilon_3^{-1}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau_{02})\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}(t-\tau_{02}), \tag{11}$$

$$2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau_{02})\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\int_{t-\tau_2}^t\boldsymbol{G}_2(t-s)\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s\leqslant
\varepsilon_4\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau_{02})\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}(t-\tau_{02})+\varepsilon_4^{-1}\left|\int_{t-\tau_2}^t\boldsymbol{G}_2(t-s)\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s\right|^2, \tag{12}$$

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau_{02})\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}(t-\tau_{02})\leqslant
\left(\left\|\frac{\boldsymbol{U}_d+\boldsymbol{L}_d}{2}\right\|+\left\|\frac{\boldsymbol{U}_d-\boldsymbol{L}_d}{2}\right\|\right)^2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau_{02})\boldsymbol{x}(t-\tau_{02}). \tag{13}$$

此外, 根据引理 1 和引理 2 我们有

$$|\boldsymbol{x}(t)|^{p-2}\left|\int_{t-\tau_i}^{t}\boldsymbol{G}_i(t-s)\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s\right|^2 \leqslant$$

$$\frac{p-2}{p}|\boldsymbol{x}(t)|^p+\frac{2\tau_i^{p-1}}{p}\sup_{0\leqslant\alpha\leqslant\tau_i}\|\boldsymbol{G}_i(\alpha)\|^p\int_{t-\tau_i}^{t}|\boldsymbol{x}(s)|^p\mathrm{d}s, \tag{14}$$

$$|\boldsymbol{x}(t)|^{p-2}|\boldsymbol{x}(t-\tau_{02})|^2\leqslant\frac{p-2}{p}|\boldsymbol{x}(t)|^p+\frac{2}{p}|\boldsymbol{x}(t-\tau_{02})|^p. \tag{15}$$

而且注意到

$$-k_i\int_{t-\tau_i}^{t}\mathrm{e}^{rs}|\boldsymbol{x}(s)|^p\mathrm{d}s\leqslant -k_i\int_{t-\tau_i}^{t}\mathrm{e}^{r(t-\tau_i)}|\boldsymbol{x}(s)|^p\mathrm{d}s=$$

$$-k_i\mathrm{e}^{r(t-\tau_i)}\int_{t-\tau_i}^{t}|\boldsymbol{x}(s)|^p\mathrm{d}s\qquad(i=1,2). \tag{16}$$

于是, 将式(6)～(13)带入式(5)整理后, 再利用不等式(14)～(16)及 k_{01}, k_{02}, k_1, k_2 的定义有

$$\begin{aligned}LV(\boldsymbol{x}(t),t)\leqslant\Bigg\{&r+k_{01}+k_{02}+k_1\tau_1+k_2\tau_2+\\&\frac{1}{2}p\Bigg[\lambda_{\max}\left(\frac{\boldsymbol{U}_a+\boldsymbol{L}_a}{2}+\frac{\boldsymbol{U}_a^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{L}_a^{\mathrm{T}}}{2}\right)+2\left\|\frac{\boldsymbol{U}_a-\boldsymbol{L}_a}{2}\right\|+\left\|\frac{\boldsymbol{U}_b+\boldsymbol{L}_b}{2}\right\|+\\&\left\|\frac{\boldsymbol{U}_b-\boldsymbol{L}_b}{2}\right\|+\varepsilon_1+(p-1)(1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)\left(\left\|\frac{\boldsymbol{U}_c+\boldsymbol{L}_c}{2}\right\|+\left\|\frac{\boldsymbol{U}_c-\boldsymbol{L}_c}{2}\right\|\right)^2\Bigg]+\\&\frac{p-2}{2}\left(\left\|\frac{\boldsymbol{U}_b+\boldsymbol{L}_b}{2}\right\|+\left\|\frac{\boldsymbol{U}_b-\boldsymbol{L}_b}{2}\right\|\right)+\frac{p-2}{2}\varepsilon_1^{-1}+\\&\frac{(p-1)(p-2)}{2}(1+\varepsilon_3^{-1}+\varepsilon_4)\left(\left\|\frac{\boldsymbol{U}_d+\boldsymbol{L}_d}{2}\right\|+\left\|\frac{\boldsymbol{U}_d-\boldsymbol{L}_d}{2}\right\|\right)^2+\\&\frac{(p-1)(p-2)}{2}(1+\varepsilon_2^{-1}+\varepsilon_4^{-1})\Bigg\}\mathrm{e}^{rt}|\boldsymbol{x}(t)|^p.\end{aligned} \tag{17}$$

现令 $f(r)$ 等于方程(4)的左端, 则 $f(r)$ 可看作是关于 r 的函数, 对 $f(r)$ 关于 r 求导得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}=1+&\left(\left\|\frac{\boldsymbol{U}_b+\boldsymbol{L}_b}{2}\right\|+\left\|\frac{\boldsymbol{U}_b-\boldsymbol{L}_b}{2}\right\|\right)\tau_{01}\mathrm{e}^{\tau_{01}r}+(p-1)(1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)\times\\&\left(\left\|\frac{\boldsymbol{U}_d+\boldsymbol{L}_d}{2}\right\|+\left\|\frac{\boldsymbol{U}_d-\boldsymbol{L}_d}{2}\right\|\right)^2\tau_{02}\mathrm{e}^{\tau_{02}r}+\varepsilon_1^{-1}\tau_1^{p+1}\mathrm{e}^{\tau_1 r}\sup_{0\leqslant\alpha\leqslant\tau_1}\|\boldsymbol{G}_1(\alpha)\|^p+\\&(p-1)(1+\varepsilon_2^{-1}+\varepsilon_4^{-1})\tau_2^{p+1}\mathrm{e}^{\tau_2 r}\sup_{0\leqslant\alpha\leqslant\tau_2}\|\boldsymbol{G}_2(\alpha)\|^p.\end{aligned}$$

显然, $\mathrm{d}f(r)/\mathrm{d}r>0$, 这说明函数 $f(r)$ 是关于 r 严格递增的函数. 又因为

$$f(0)=\frac{p}{2}\lambda,\ f(+\infty)=+\infty,$$

所以, 当不等式(3)成立时, 即当 $\lambda<0$ 时, 方程(4)必有唯一的正根 r. 于是, 由式(17)可知 $LV(\boldsymbol{x},t)\leqslant 0$. 这样, 根据 Itô 公式, 我们便有

$$\begin{aligned}\mathrm{E}V(\boldsymbol{x}(t),t)=\mathrm{E}V(\boldsymbol{x}(0),0)+\int_0^t\mathrm{E}LV(\boldsymbol{x}(u),u)\mathrm{d}u\leqslant\mathrm{E}V(\boldsymbol{x}(0),0)\leqslant\\(1+k_{01}\tau_{01}+k_{02}\tau_{02}+k_1\tau_1^2+k_2\tau_2^2)\sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant0}\mathrm{E}|\xi(\theta)|^p,\end{aligned} \tag{18}$$

其中, $\tau=\max\{\tau_{01},\tau_{02},\tau_1,\tau_2\}$. 另外, 若再注意到 $\mathrm{e}^{rt}\mathrm{E}|\boldsymbol{x}(t)|^p\leqslant\mathrm{E}V(\boldsymbol{x}(t),t)$, 那么定理 1 便可得证.

注 1　如果 $p=2$, 那么, 在定理 1 的条件下, 系统(1)被称为是均方指数鲁棒稳定的. 但当 $p=1$ 时, 我

们不能根据定理 1 得到系统(1)均值稳定的条件.

如果系统(1)的区间参数矩阵 $\boldsymbol{A}_I$, $\boldsymbol{B}_I$, $\boldsymbol{C}_I$, $\boldsymbol{D}_I$ 分别被已知的常数矩阵 $\hat{\boldsymbol{A}}$, $\hat{\boldsymbol{B}}$, $\hat{\boldsymbol{C}}$, $\hat{\boldsymbol{D}}$ 所替换, 那么系统(1)就被转化成了确定的随机分布时滞系统(19),

$$\begin{cases} \mathrm{d}\boldsymbol{x}(t) = [\hat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}(t) + \hat{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{x}(t-\tau_{01}) + \int_{t-\tau_1}^{t} \boldsymbol{G}_1(t-s)\boldsymbol{x}(s)\,\mathrm{d}s]\,\mathrm{d}t + \\ \quad [\hat{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{x}(t) + \hat{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{x}(t-\tau_{02}) + \int_{t-\tau_2}^{t} \boldsymbol{G}_2(t-s)\boldsymbol{x}(s)\,\mathrm{d}s]\,\mathrm{d}w(t), \qquad t \geqslant 0, \\ \boldsymbol{x}_0 = \xi, \qquad \xi \in L^p_{\mathcal{F}_0}([-\tau, 0]; R^n), \ -\tau \leqslant t \leqslant 0. \end{cases} \tag{19}$$

此时, 利用定理 1, 我们可以推得下述关于系统(19) p-阶矩指数稳定的判据.

推论 1 若存在正常数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 使得

$$\begin{aligned} -\lambda_{\max}(\hat{\boldsymbol{A}} + \hat{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}) > {} & 2\|\hat{\boldsymbol{B}}\| + \varepsilon_1 + \frac{p-2}{p}\varepsilon_1^{-1} + (p-1)[(1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)\|\hat{\boldsymbol{C}}\|^2 + \\ & (1+\varepsilon_3^{-1}+\varepsilon_4)\|\hat{\boldsymbol{D}}\|^2] + \frac{2}{p}\varepsilon_1^{-1}\tau_1^p \sup_{0\leqslant\alpha\leqslant\tau_1}\|\boldsymbol{G}_1(\alpha)\|^p + \\ & \frac{(p-1)}{p}(1+\varepsilon_2^{-1}+\varepsilon_4^{-1})(p-2+2\tau_2^p \sup_{0\leqslant\alpha\leqslant\tau_2}\|\boldsymbol{G}_2(\alpha)\|^p), \end{aligned} \tag{20}$$

那么系统(19)是 p-阶矩指数稳定的, 且 Liapunov 指数不大于 $-r$. 其中, $p \geqslant 2$, $r > 0$ 是方程

$$\begin{aligned} & r + \frac{p}{2}[\lambda_{\max}(\hat{\boldsymbol{A}} + \hat{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}) + \|\hat{\boldsymbol{B}}\| + \varepsilon_1 + (p-1)(1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)\|\hat{\boldsymbol{C}}\|^2] + \left(\frac{p-2}{2} + \mathrm{e}^{r\tau_{01}}\right)\|\hat{\boldsymbol{B}}\| + \\ & \frac{p-2}{2}\varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_1^{-1}\tau_1^p \mathrm{e}^{r\tau_1}\sup_{0\leqslant\alpha\leqslant\tau_1}\|\boldsymbol{G}_1(\alpha)\|^p + (p-1)\Bigg[(1+\varepsilon_3^{-1}+\varepsilon_4)\|\hat{\boldsymbol{D}}\|^2\left(\mathrm{e}^{r\tau_{02}} + \frac{p-2}{2}\right) + \\ & (1+\varepsilon_2^{-1}+\varepsilon_4^{-1})\left(\frac{p-2}{2} + \tau_2^p \mathrm{e}^{r\tau_2}\sup_{0\leqslant\alpha\leqslant\tau_2}\|\boldsymbol{G}_2(\alpha)\|^p\right)\Bigg] = 0 \end{aligned} \tag{21}$$

的唯一正根.

注 2 如果 $\hat{\boldsymbol{B}} \equiv \boldsymbol{0}$, $\hat{\boldsymbol{D}} \equiv \boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{G}_2(t) \equiv \boldsymbol{0}$, 那么系统(19)就转化成了文献[6]所研究的系统. 而文献[6]所给的这个系统的 2-阶矩指数稳定的判据仅通过矩阵函数 $\boldsymbol{G}_1(t)$ 而依赖于时滞, 也就是说, 当 $\boldsymbol{G}_1(t) \equiv \boldsymbol{M}$($\boldsymbol{M}$ 是一个常数矩阵)时, 文献[6]中的判据是时滞独立的, 即下述判别式:

$$\lambda_{\max}\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{A}} + \hat{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{S} + \boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{S}^{-1})^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{M} + \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} + 2\|\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{M}\| + \|\hat{\boldsymbol{C}}\|^2 < 0, \tag{22}$$

其中, $\boldsymbol{S}$ 是文献[6]获取这个判据时所引入的一个可逆矩阵. 而在本文中, 我们所提供的 p-阶矩指数稳定性判据即使在 $\boldsymbol{G}_1(t) = \boldsymbol{M}$ 时仍是时滞依赖的, 其退化后的时滞依赖性判据是

$$\lambda_{\max}(\hat{\boldsymbol{A}} + \hat{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}) + \varepsilon_1 + (p-1)\|\hat{\boldsymbol{C}}\|^2 + \frac{p-2}{p\varepsilon_1} + \frac{2}{p\varepsilon_1}\tau_1^p\|\boldsymbol{M}\|^p < 0, \tag{23}$$

也即是

$$\tau_1 < \sqrt[p]{\frac{-p\varepsilon_1\lambda_{\max}(\hat{\boldsymbol{A}} + \hat{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}) - p\varepsilon_1^2 - p(p-1)\varepsilon_1\|\hat{\boldsymbol{C}}\|^2 - p + 2}{2\|\boldsymbol{M}\|^p}}, \tag{24}$$

且当 $p = 2$ 时, 式(24)退化为文献[6]所研究系统的 2-阶矩(均方)指数稳定性的时滞依赖性判据. 显然, 根据式(22)和式(23)可知, 当时滞 τ_1 满足

$$\tau_1 < \sqrt{\frac{\varepsilon_1\lambda_{\max}\begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{A}} + \hat{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{S} + \boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{S}^{-1})^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{M} + \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix} + 2\varepsilon_1\|\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{M}\| - \varepsilon_1\lambda_{\max}(\hat{\boldsymbol{A}} + \hat{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}) - \varepsilon_1^2}{\|\boldsymbol{M}\|^2}}$$

时, 判据(23)(当 $p = 2$ 时)总比判据(22)有较小的保守性.

注 3 现有文献在对不确定(或区间)随机分布时滞系统的指数稳定性研究过程中, 通常把参数矩阵的不确定部分分解成形如 $[\Delta\boldsymbol{A} \quad \Delta\boldsymbol{B} \quad \Delta\boldsymbol{C} \quad \Delta\boldsymbol{D}] = \boldsymbol{MF}[\boldsymbol{N}_1 \quad \boldsymbol{N}_2 \quad \boldsymbol{N}_3 \quad \boldsymbol{N}_4]$ 且 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} \leqslant \boldsymbol{I}$ 的形式, 这使得人们在应用所得的判据时, 不得不对不确定矩阵进行如此分解, 这是很麻烦的, 尤其是当不确定矩阵是高维矩阵时更是如此. 而在应用本文所提供的判据时, 却不必这样, 只需直接利用不确定(或区间)矩阵的上下界矩阵即可.

此外,现有文献中所研究的不确定随机分布时滞系统模型都是本文所研究的系统模型的特殊情形,所研究的 2-阶矩(均方)指数稳定性问题也都是本文所研究的 p- 阶矩指数稳定性问题的特殊情况,因此本文所提供的判据具有一般性.

注 4　在定理 1 的证明过程中,如果让 $r = 0$, 我们可以获得系统(1) p- 阶矩一致有界的条件,进而也可以得到系统(19) p- 阶矩一致有界的条件.

3　数值例子

例 1　考虑二维随机系统

$$\begin{cases} \mathrm{d}\boldsymbol{x}(t) = \left[\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{x}(t-1) + \int_{t-1}^{t}\boldsymbol{G}_1(t-s)\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t + \\ \qquad \left[\boldsymbol{C}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{x}(t-0.5) + \int_{t-0.5}^{t}\boldsymbol{G}_2(t-s)\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}w(t), \\ \boldsymbol{x}_0 = \xi, \qquad \xi \in L^3_{\mathcal{F}_0}([-1,0];R^2), \end{cases} \tag{25}$$

其中, $\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}, \boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}, \boldsymbol{C}_{\mathrm{I}}, \boldsymbol{D}_{\mathrm{I}}$ 的上下界矩阵和矩阵函数 $\boldsymbol{G}_1(t), \boldsymbol{G}_2(t)$ 分别为

$$\boldsymbol{L}_a = \begin{pmatrix} -4.38 & 0.20 \\ 0.19 & -4.33 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{U}_a = \begin{pmatrix} -4.26 & 0.29 \\ 0.27 & -4.22 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{L}_b = \begin{pmatrix} -0.93 & 0.21 \\ 0.23 & -0.86 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{U}_b = \begin{pmatrix} -0.88 & 0.24 \\ 0.26 & -0.82 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{L}_c = \begin{pmatrix} 0.38 & -0.11 \\ -0.10 & -0.32 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{U}_c = \begin{pmatrix} 0.41 & -0.10 \\ -0.09 & -0.29 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{L}_d = \begin{pmatrix} -0.26 & -0.16 \\ 0.21 & -0.31 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{U}_d = \begin{pmatrix} -0.24 & -0.15 \\ 0.22 & -0.29 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{G}_1(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-(t+2)/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-(t+3)/3} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{G}_2(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-(t+4)/6} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-(t+2)/3} \end{pmatrix}.$$

显然 $\sup_{0\leqslant\alpha\leqslant 1} \|\boldsymbol{G}_1(\alpha)\|^3 = \mathrm{e}^{-3}, \quad \sup_{0\leqslant\alpha\leqslant 0.5} \|\boldsymbol{G}_2(\alpha)\|^3 = \mathrm{e}^{-2}.$

在 Matlab Editor/Debugger 环境中,对定理 1 中的判据进行编程,然后用编制好的程序,让计算机运算并优选出满足判据条件的一组参数 $\varepsilon_i (i = 1, \cdots, 4)$, 而且这组参数能使判别不等式(3)的左侧的数值 λ 和 Liapunov 指数 $-r$ 较小. 所得的这些数值 $\varepsilon(i = 1, \cdots, 4)$, λ, r 被列在表 1 中.

表 1　判据有效性的数值

定理	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	λ	r
1	0.575 3	0.991 5	0.947 1	0.976 6	−0.335 8	0.035 8

从表 1 中的数值可以看出, 利用定理 1 可以判断出系统(25)是 3-阶矩指数鲁棒稳定的. 也就是说,定理 1 中的判据是有效的.

例 2　考虑一维随机系统

$$\mathrm{d}x(t) = \left[-6.5x(t) + 3\int_{t-\tau_1}^{t} x(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t + x(t)\mathrm{d}w(t), \tag{26}$$

显然, $p = 2$, $\hat{A} = -6.5$, $G_1(t) \equiv M = 3$, $\hat{C} = 1$ 均为标量.

利用式(24)算得

$$\tau_1 < \sqrt{\frac{-\varepsilon_1\lambda_{\max}(\hat{\boldsymbol{A}} + \hat{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}) - \varepsilon_1^2 - \varepsilon_1\|\hat{\boldsymbol{C}}\|^2}{\|\boldsymbol{M}\|^2}} =$$

$$\sqrt{\frac{-(\varepsilon_1-6)^2+6^2}{3^2}}=2(\text{选取 }\varepsilon_1=6),$$

这说明对于任意的时滞 $\tau_1\in(0,2)$, 系统(26) 都是 2-阶矩指数稳定的. 但是, 利用式(22) 算得

$$\lambda_{\max}\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{A}}+\hat{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{S}+\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{S}^{-1})^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{M}+\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}+2\|\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{M}\|+\|\hat{\boldsymbol{C}}\|^2=$$

$$\lambda_{\max}\begin{pmatrix}-13 & S+3S^{-1}\\ 3S^{-1}+S & 0\end{pmatrix}+6|S^{-1}|+1=$$

$$\frac{-13+\sqrt{13^2+(S+3S^{-1})^2}}{2}+6|S^{-1}|+1>0\qquad(\forall S\in\mathbf{R}-\{0\}),$$

这说明利用文献[6] 中的时滞独立性判据不能判断系统(26) 是否是 2-阶矩指数稳定的. 因此, 由例 2 表明: 对于有界的小时滞系统, 本文所给的判据退化后仍优于文献[6] 所给的判据.

4 结 论

在本文中, 我们研究了一类具有分布时滞和区间参数的随机系统的 p- 阶矩指数鲁棒稳定性, 得到了该类系统 p- 阶矩指数鲁棒稳定的充分性判据. 所得判据是有效的和时滞依赖的, 而且即使在矩阵函数 $\boldsymbol{G}_1(t)$ 和 $\boldsymbol{G}_2(t)$ 都是常数矩阵时, 该判据也具有此特性. 此外, 所得判据在实际应用方面又是方便的, 人们只需编制一个简单的小程序并结合区间参数矩阵的上下界矩阵, 就能判断系统的 p- 阶矩指数鲁棒稳定性. 因此, 文中的结果在随机控制系统领域中具有潜在的应用价值.

[参 考 文 献]

[1] Eurich C W, Thiel A, Fahse L. Distributed delays stabilize ecological feedback systems[J]. Physical Review Letters, 2005, **94**(15): 158104.

[2] Wang Z, Liu Y, Fraser K, et al. Stochastic stability of uncertain Hopfield neural networks with discrete and distributed delays[J]. Physics Letters A, 2006, **354**(4): 288-297.

[3] Su W W, Chen Y M. Global robust stability criteria of stochastic Cohen-Grossberg neural networks with discrete and distributed time-varying delays[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, doi: 10.1016/j.cnsns.2007.09.001.

[4] Florchinger P. Stability of some linear stochastic systems with delays[A]. In: Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control[C]. Orlando, Florida USA: IEEE, 2001, 4744-4745.

[5] Verriest E I. Stochastic stability of a class of distributed delay systems[A]. In: Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference Seville 2005[C]. Spain: IEEE, 2005, 5048-5053.

[6] Ficak B. Point delay methods applied to the investigation of stability for a class of distributed delay systems[J]. Systems & Control Letters, 2007, **56**(3): 223-229.

[7] Mao X, Koroleva N, Rodkina A. Robust stability of uncertain stochastic differential delay equations[J]. Systems & Control Letters, 1998, **35**(5): 325-336.

[8] Liao X X, Mao X. Exponential stability of stochastic delay interval systems[J]. Systems & Control Letters, 2000, **40**(2): 171-181.

[9] Lu C Y, Su T J, Tsai J S H. On robust stabilization of uncertain stochastic time-delay systems—an LMI-based approach[J]. Journal of the Franklin Institute, 2005, **342**(5): 473-487.

[10] Chen W H, Guan Z H, Lu X M. Delay-dependent exponential stability of uncertain stochastic systems with multiple delays: an LMI approach[J]. Systems & Control Letters, 2005, **54**(6): 547-555.

[11] 江明辉, 沈轶, 廖晓昕. 不确定中立型线性随机时滞系统的鲁棒稳定性[J]. 应用数学和力学, 2007, **28**(6): 741-748.

[12] Mao X. Exponential Stability of Stochastic Differential Delay Equations[M]. New York: Marcel Dekker, 1994.

p-Moment Exponential Robust Stability for Stochastic Systems With Distributed Delays and Interval Parameters

SU Chun-hua[1,2], LIU Si-feng[1]

(1. College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, P.R. China;

2. College of Mathematics and Information Science, Xinyang Normal University, Xinyang, Henan 464000, P.R. China)

Abstract: The p-moment exponential robust stability for stochastic systems with distributed delays and interval parameters is studied. By constructing Liapunov-Krasovskii functional and employing the decomposition technique of interval matrix and using Itô s formula, the easily verified delay-dependent criteria for p-moment exponential robust stability were obtained. Numerical examples show the effectiveness and practicality of the presented criteria.

Key words: stochastic systems; distributed delays; robust stability; interval matrix