

# 一类具有变消耗率的恒化器模型的 脉冲扰动与分支\*

张 弘<sup>1,2</sup>, P·齐奥塞斯库<sup>3</sup>, J·J·涅托<sup>4</sup>, 陈兰荪<sup>5</sup>

(1. 江苏大学 数学系, 江苏 镇江 212013;

2. 于默奥大学 数学与数学统计系, 于默奥, 瑞典;

3. 雅西“戈奥尔基-阿萨季”技术学院 数学系, 雅西, 罗马尼亚;

4. 圣地亚哥德孔波斯特拉大学 数学分析系, 圣地亚哥, 西班牙;

5. 中国科学院 数学研究所, 北京 100080)

(陈立群推荐)

摘要: 提出和研究了一个具有变消耗率和非同步脉冲的恒化器模型, 并且得到了一组像阈值一样的条件来确保系统半平凡周期解的全局渐稳性, 系统的持久性以及出现非平凡分支周期解. 最后, 一些数值模拟体现了该模型的动力学性态.

关键词: 恒化器; 脉冲微分方程; 持久性; 灭绝; 不动点方法; 分支

中图分类号: O175 文献标识码: A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2009.07.012

## 引 言

众所周知, 恒化器在数学生态学中享有重要的地位. 它常常可以用来模拟各种微生态系统, 而且具有实验室易操作的优点. 因此, 各类恒化器模型都受到广泛的关注<sup>[1-8]</sup>, 特别是恒化器中微生物连续培养单食物链模型, 其形式如下:

$$\begin{cases} S'(t) = (S_0 - S(t))D - \frac{x(t)}{Y}P(S(t)), \\ x'(t) = (P(S(t)) - D)x(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中  $S(t)$  和  $x(t)$  分别表示在  $t$  时刻营养基和微生物种群的浓度;  $S_0$  则表示流入(流出)培养基中某营养基的浓度;  $D$  是培养基的稀释程度;  $Y$  表示微生物对营养基的消耗率; 函数  $P(S)$  称为功能性反应, 用来描述微生物的生长率. 一些常见的功能性反应(参见文献[1])可见: Monod(1942), Monod-Haldane(1968), Tessier(1936), Tseng(1975) 和 Rosenzweig(1971) 等人的工作.

单一的功能性反应虽能尽力体现出微生物生长率的本质, 但是, 鉴于一些实验结论, 这些

\* 收稿日期: 2008-12-26; 修订日期: 2009-06-10

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10471104)

作者简介: 张弘(1978—), 男, 江苏常州人, 讲师, 博士(联系人. E-mail: cnczhanghong@163.com;

E-mail: hongzhang@ujs.edu.cn).

模型需要作出改进. 具体体现在消耗率应依赖于营养基的浓度. Pilyugin 和 Waltman<sup>[4]</sup> 提出了具有变消耗率的恒化器模型, 研究了该系统中多个极限环的存在性, 并且强调他们文章的创新点是当消耗率线性依赖于  $S$  时, 系统只能出现超临界分支. 2005 年, Huang 和 Zhu<sup>[3]</sup> 也分析了具有变消耗率的连续培养基模型的极限环的相对位置关系.

近年来, 人们逐步了解到抗生素可以帮助患病者恢复其体内微生物的平衡, 但同时也不会伤害患者, 因此, 在临床治疗中它被广泛地使用. 例如, 由链球菌和假单胞菌引起的肺炎, 以及由霉菌菌和其他非典型性病原体, 例如衣原体和肺炎霉菌菌, 引起的社区获得性肺炎 (CAP). 研究人员发现了一种合成抗菌抗生素——莫西沙星可以用来有效地治疗 CAP. 近期 Hoeffken 等<sup>[9]</sup> 学者得到的临床实验结果表明, 静脉注射/口服莫西沙星能够对患有由非典型病原体引起的社区获得性肺炎患者进行有效的单药治疗. 显然, 任何患者都不可能连续的 24 h 都接受静脉注射或口服莫西沙星. 而且, 事实上, 在临床实验测试中每名患者每天静脉注射/口服莫西沙星只有 400 mg.

脉冲微分方程是描述上述现象的首选. 有关脉冲微分方程的理论可以参见文献[10], 此类方程近期广受学者的关注<sup>[5-7, 11-13]</sup>. 但是, 此类方程和恒化器理论的结合研究还不是很多<sup>[5-7, 11]</sup>.

受到上述文献的启发, 本文的目标就是建立具有变消耗率的营养基-微生物脉冲微分模型, 其中脉冲作用体现在周期性地脉冲注入常数浓度的营养基, 同时微生物种群的浓度由于受到周期性抗生素的作用而产生脉冲扰动(这两个脉冲作用不是同步进行的). 接下来, 就是对该模型的动力学性态进行研究.

## 1 模 型

在文献[7]的基础上, 我们构建以下模型:

$$\begin{cases} S'(t) = (S_0 - S)D - x \frac{P(S)}{Y(S)}, & t \neq (n+l-1)T, t \neq nT, n \in \mathbb{N}; \\ x'(t) = x(P(S) - D), \\ \Delta S(t) = 0, \\ \Delta x(t) = -px(t), & t = (n+l-1)T; \\ \Delta S(t) = TS_1, \\ \Delta x(t) = 0, & t = nT; \\ x(0) \geq 0, S(0) \geq 0; \end{cases} \quad (2)$$

其中  $S(t)$  和  $x(t)$  分别表示在  $t$  时刻营养基和微生物种群的浓度,  $0 < l < 1$ ,  $\Delta \varphi(t) = \varphi(t^+) - \varphi(t)$ ,  $\varphi \in \{x, S\}$ . 以下是建模的假设条件:

(A<sub>1</sub>) 在没有微生物种群的条件下, 营养基依据  $g(S) = (S_0 - S)D$  的方式增长, 其中  $S_0$  和  $D$  的生物意义与系统(1)中的一致.

(A<sub>2</sub>) 营养基脉冲注入的周期为  $T$ , 每次注入的浓度为常数  $TS_1$ . 抗生素脉冲注入的周期也是  $T$ . 但是, 两个脉冲作用在不同的时刻发生. 每次抗生素脉冲注入直接导致微生物种群浓度依比例  $p$  减少.

(A<sub>3</sub>) 假设函数  $P(S)$  是 Mnod 型的, 即,  $P(S) = \mu_m S / (K_m + S)$ . 变消耗率

$$Y(S) = a + bS^l, \quad a, b, l > 0.$$

引理 1 对系统(2)而言, 正象限  $R_+^2$  是不变域.

引理 2 系统(2)的所有满足初始条件  $(S(\cdot), x(\cdot)) \in R_+^2$  的解是有界的.

## 2 主要结论

引言中介绍的社区获得性肺炎的治疗,其治疗手段就是要消除病原体细菌.接下来,我们所要研究就是无病原体细菌状态的动力学性态.

### 2.1 无病原体细菌状态

依据系统(2),得到其子系统

$$\begin{cases} S'(t) = (S_0 - S)D, & t \neq (n+l-1)T, t \neq nT, \\ \Delta S(t) = 0, & t = (n+l-1)T, \\ \Delta S(t) = TS_1, & t = nT, \\ S(0) \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

引理 3 子系统(3)具有周期解  $S^*(t)$ , 且

$$\int_0^T S^*(t) dt = \frac{TS_1}{D} + TS_0.$$

而且,对系统(3)的每个解,当  $t \rightarrow \infty$  时,都有  $|S(t) - S^*(t)| \rightarrow 0$ .

定理 1 无微生物周期解  $(S^*(t), 0)$  是全局渐稳的,如果条件

$$\mathcal{L}(S^*(t)) = \int_0^T P(S^*(t)) dt < DT + \ln \frac{1}{1-p} \quad (4)$$

成立.

注记 1 由于

$$\mathcal{L}(S^*(t)) = \mu_m T - \frac{\mu_m K_m}{D(K_m + S_0)} \ln \left[ \frac{(K_m + S_0)(e^{DT} - 1) + TS_1}{(K_m + S_0)(1 - e^{-DT}) + TS_1} \right], \quad (5)$$

则条件(4)可表示为

$$\mu_m T < \frac{\mu_m K_m}{D(K_m + S_0)} \ln \left[ \frac{(K_m + S_0)(e^{DT} - 1) + TS_1}{(K_m + S_0)(1 - e^{-DT}) + TS_1} \right] + DT + \ln \frac{1}{1-p}. \quad (6)$$

另一方面,如果

$$\mu_m T > \frac{\mu_m K_m}{D(K_m + S_0)} \ln \left[ \frac{(K_m + S_0)(e^{DT} - 1) + TS_1}{(K_m + S_0)(1 - e^{-DT}) + TS_1} \right] + DT + \ln \frac{1}{1-p}, \quad (7)$$

则  $(S^*(t), 0)$  是不稳定的.

注记 2 系统(2)的无微生物周期解的全局渐稳性与消耗率  $\nu(S)$  无关,然而却需依赖于微生物种群的功能性反应  $P(S)$ .

注记 3 定理 1 推广了文献[7]中的定理 3.1.

以上结论的证明方法可参见文献[14].由上述结论可知,在合适的时间间隔内使用合理计量的抗生素会使无病原体微生物状态得以稳定化.换句话说,在适当的条件下可以百分之百的杀死病原体细菌.在 2006 年, Zhang 等<sup>[15]</sup>也做了莫西沙星治疗社区获得性肺炎的临床研究,并且发现对 40 位患者在 7 d~ 14 d 内使用莫西沙星 400 mg, q. i. d., 最后细菌的消除率达到 93.7%. 这个临床的结论可以完全体现出子系统(3)研究的必要性.事实上,病原体细菌不可能百分之百地被杀死,因此,我们希望进一步来考虑病原体细菌长期存在的情形.

### 2.2 持久性

定理 2 假设条件

$$\mathcal{L}(S^*(t)) > DT + \ln \frac{1}{1-p} \quad (8)$$

成立. 即, 当条件(7)成立, 则系统(2)是持久的.

注记4 由定理1和2易知, 当  $T > [\mathcal{L}(S^*(t)) + \ln(1-p)]/D$ , 则  $(S^*, 0)$  是全局渐稳的, 然而, 如果  $T < [\mathcal{L}(S^*(t)) + \ln(1-p)]/D$ , 则  $(S^*, 0)$  会失去其稳定性, 并且得到该系统是持久的.

注记5 定理2推广了文献[7]中的定理3.3.

接下来, 主要研究临界状态

$$T = \frac{\mathcal{L}(S^*(t)) + \ln(1-p)}{D}.$$

### 2.3 分支

改进文献[12]中的方法(又可参见文献[16]), 并且用  $\Phi(t; X_0) = (\Phi_1(t, X_0), \Phi_2(t, X_0))$  来表示满足初始条件  $X_0 = (x_0^1, x_0^2)$  的与系统(2)相对应的无脉冲系统的解.

定义算子  $I_1, I_2: R^2 \rightarrow R^2$ ,

$$I_1(x_1, x_2) = (x_1, (1-p)x_2), \quad I_2(x_1, x_2) = (x_1 + TS_1, x_2)$$

及两个映射  $F_1, F_2: R^2 \rightarrow \mathbf{R}$ ,

$$F_1(x_1, x_2) = (S_0 - x_1)D - x_2 \frac{P(x_1)}{Y(x_1)}$$

和

$$F_2(x_1, x_2) = x_2(P(x_1) - D),$$

而且,  $F: R^2 \rightarrow R^2$ ,

$$F(x_1, x_2) = (F_1(x_1, x_2), F_2(x_1, x_2)).$$

接下来, 系统(2)的周期解问题可以转化为不动点问题. 定义  $\Psi: [0, \infty) \times R^2 \rightarrow R^2$ ,

$$\Psi(T, X_0) = I_2((1-l)T; I_1(lT, X_0)),$$

且

$$\Psi(T, X_0) = (\Psi_1(T, X_0), \Psi_2(T, X_0)).$$

则  $X$  是系统(2)的  $T$  周期解当且仅当  $X_0$  是算子  $\Psi(T, \cdot)$  的不动点, 其中  $X(0) = X_0$ . 易知

$$D_X \Psi(T, X) = D_X \Phi((1-l)T; I_1(lT, X)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-p \end{pmatrix} D_X \Phi(lT; X).$$

令  $X_0 = (x_0, 0)$  为周期解  $(S^*(t), 0)$  的初始条件, 其中  $x_0 = S^*(0)$ . 易得

$$D_X \Psi(T, X_0) = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ 0 & d_{22} \end{pmatrix},$$

其中

$$d_{11} = e^{-DT},$$

$$d_{12} = -e^{-DT} \left[ (1-p) \int_{lT}^T \frac{P(S^*(s))}{Y(S^*(s))} e^{\int_0^s P(S^*(\xi)) - D \int_0^{\xi} Ds} ds + \int_0^{lT} \frac{P(S^*(s))}{Y(S^*(s))} e^{\int_0^s P(S^*(\xi)) - D \int_0^{\xi} Ds} ds \right],$$

$$d_{22} = (1-p) e^{\int_0^T (P(S^*(s)) - D) ds}.$$

记

$$\tau = T + \tau, \quad X = X_0 + X.$$

则

$$X_{0+} X = \Psi(T + \tau, X_{0+} X).$$

令

$$\Theta(\tau, X) = X_{0+} X - \Psi(T + \tau, X_{0+} X) \tag{9}$$

和

$$\Theta(\tau, X) = (\Theta_1(\tau, X), \Theta_2(\tau, X)).$$

易知

$$D_X \Theta(0, (0, 0)) = E_2 - D_X \Psi(T, X_0) = \begin{pmatrix} 1 - d_{11} & -d_{12} \\ 0 & 1 - d_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_0 & b'_0 \\ 0 & d'_0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

在平凡周期解  $(S^*(t), 0)$  的附近出现分支周期解的必要条件是

$$\det[D_X \Theta(0, (0, 0))] = 0.$$

由于  $a'_0 \neq 0$ , 则  $d'_0 = 0$ , 即

$$(1 - p) e^{\int_0^T (P(S^*(s)) - D) ds} = 1 \Leftrightarrow \mathcal{L}(S^*(t)) = DT + \ln \left[ \frac{1}{1 - p} \right]. \tag{11}$$

易知

$$\dim(\text{Ker}[D_X \Theta(0, (0, 0))]) = 1,$$

以及  $\text{Ker}[D_X \Theta(0, (0, 0))]$  中的一个基  $(-b'_0/a'_0, 1)$ . 则  $\Theta(\tau, X) = 0$  等价于

$$\begin{cases} \Theta_1(\tau, \alpha Y_0 + z E_0) = 0, \\ \Theta_2(\tau, \alpha Y_0 + z E_0) = 0, \end{cases}$$

其中

$$E_0 = (1, 0), \quad Y_0 = (-b'_0/a'_0, 1)$$

和

$$X = \alpha Y_0 + z E_0 = (\alpha(-b'_0/a'_0) + z, \alpha).$$

令

$$f_1(\tau, \alpha, z) = \Theta_1(\tau, \alpha Y_0 + z E_0), \tag{12}$$

$$f_2(\tau, \alpha, z) = \Theta_2(\tau, \alpha Y_0 + z E_0). \tag{13}$$

考虑以下系统

$$\begin{cases} f_1(\tau, \alpha, z) = 0, \\ f_2(\tau, \alpha, z) = 0. \end{cases}$$

由于

$$\frac{\partial f_1}{\partial z}(0, 0, 0) = \frac{\partial \Theta_1}{\partial x_1}(0, (0, 0)) = a'_0 \neq 0,$$

由隐函数定理可得  $z = z(\tau, \alpha)$  使得  $z(0, 0) = 0$  以及

$$f_1(\tau, \alpha, z(\tau, \alpha)) = \Theta_1(\tau, \alpha Y_0 + z(\tau, \alpha) E_0) = 0.$$

易得

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial x_1}(0, (0, 0)) \left[ \frac{\partial x_1}{\partial \alpha}(0, 0) + \frac{\partial x_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \alpha}(0, 0) \right] + \frac{\partial \Theta_1}{\partial x_2}(0, (0, 0)) \frac{\partial x_2}{\partial \alpha}(0, 0) = 0.$$

由(10)式得

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha}(0, 0) = 0. \tag{14}$$

易得

$$\frac{\partial z}{\partial \tau}(0, 0) = \frac{1}{a'_0} [(-DS^*(T) + DS_0)(1 - l) +$$

$$e^{-D(1-l)T}(-DS^*(lT) + DS_0) \cdot lJ = \\ - \frac{D}{a_0}(S^*(T) - S_0).$$

接下来,考虑以下决定方程的可解性

$$f_2(\tau, \alpha, z(\tau, \alpha)) = \Theta_2(\tau, \alpha Y_0 + z(\tau, \alpha) E_0) = 0. \quad (15)$$

其解的个数等于方程(2)周期解的个数<sup>[17]</sup>.

记

$$f(\tau, \alpha) = f_2(\tau, \alpha, z(\tau, \alpha)). \quad (16)$$

首先,得

$$f(0, 0) = \Theta_2(0, (0, 0)) = 0.$$

其次,易知

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}(0, 0) = 1 - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2}((1-l)T; I_1(\Phi(lT; X_0)))(1-p) \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2}(lT; X_0) = \\ d_0 = 0. \quad (17)$$

显然

$$\frac{\partial f}{\partial \tau}(0, 0) = 0. \quad (18)$$

最后,根据计算可得

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2}(0, 0) = - \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \tau^2}((1-l)T; I_1(\Phi(lT; X_0)))(1-l)^2 = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}(0, 0) > 0 \quad (20)$$

和

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2}(0, 0) = 0. \quad (21)$$

故

$$f(\tau, \alpha) = \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \tau}(0, 0) \alpha \tau + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}(0, 0)}_{>0} \alpha^2 + o(\tau, \alpha)(\tau^2 + \alpha^2).$$

考虑以下两种情形:

情形 I 假设

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \tau}(0, 0) < 0. \quad (22)$$

令  $\alpha = k\tau$ ;  $k = k(\tau)$ . 易得

$$f(\tau) = \tau^2 \left[ \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial \tau \partial \alpha}(0, 0)}_{<0} k + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}(0, 0)}_{>0} k^2 + o(\tau, k\tau)(1+k^2) \right].$$

显然

$$\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial \tau \partial \alpha}(0, 0)}_{<0} k + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}(0, 0)}_{>0} k^2 + o(\tau, k\tau)(1+k^2) = 0$$

有一个非平凡的解  $k = k(\tau)$  如果  $\tau$  是充分小的正数.

故有

定理 3 假设条件(11)和(22)成立. 则存在  $\epsilon > 0$  使得对于所有的  $0 < \tau < \epsilon$  系统(2)存

在一个满足初始条件  $X_0 + \alpha(\tau) Y_0 + z(\tau, \alpha(\tau)) E_0$  的非平凡的周期解, 且周期为  $T + \tau$ .

情形 II 假设

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \tau}(0, 0) > 0, \tag{23}$$

则可以得到与定理 3 相类似的结论.

定理 4 假设条件(11)和(23)成立. 则存在  $\epsilon > 0$  使得对于所有的  $0 < \tau < \epsilon$  系统(2) 存在一个满足初始条件  $X_0 - \alpha(\tau) Y_0 + z(\tau, -\alpha(\tau)) E_0$  非平凡的次临界分支周期解, 且周期为  $T + \tau$ .

注记 6 在分支存在性问题的讨论上还可以考虑用  $\tau = k\alpha$  或  $\tau = -k\alpha$ ;  $k = k(\alpha)$  来替代  $\alpha(\tau)$ .

注记 7 条件(11)的确定形式如下:

$$\mu_m T = \frac{\mu_m K_m}{D(K_m + S_0)} \ln \left[ \frac{(K_m + S_0)(e^{DT} - 1) + TS_1}{(K_m + S_0)(1 - e^{-DT}) + TS_1} \right] + DT + \ln \frac{1}{1 - p}. \tag{24}$$

如果选  $p$  为分支参数, 则出现分支的临界条件为

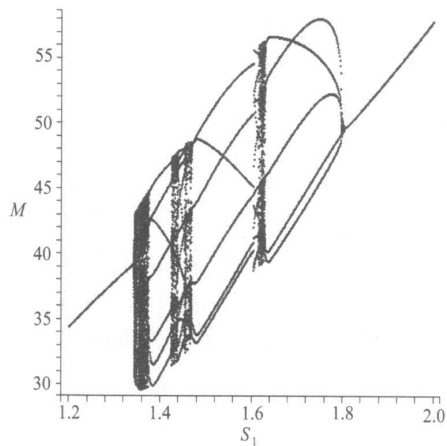
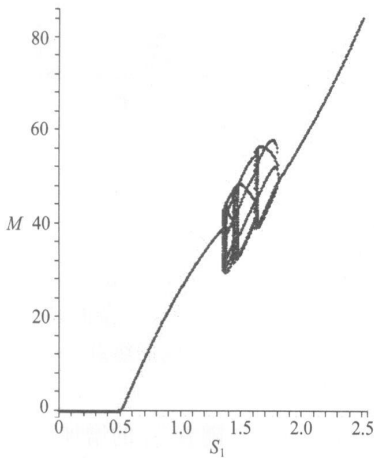
$$p^* = 1 - 1 \left\{ \exp \left[ \mu_m T - \frac{\mu_m K_m}{D(K_m + S_0)} \ln \left[ \frac{(K_m + S_0)(e^{DT} - 1) + TS_1}{(K_m + S_0)(1 - e^{-DT}) + TS_1} \right] - DT \right] \right\}. \tag{25}$$

类似地, 也可选  $T$  为分支参数.

### 3 数值模拟

考虑以下系统

$$\begin{cases} S'(t) = (1 - S) - x \frac{2S/(0.58 + S)}{1 + 50S^2}, & t \neq 2 \left[ n - \frac{1}{2} \right], t \neq 2n, n \in \mathbb{N}, \\ x'(t) = x \left( \frac{2S}{0.58 + S} - 1 \right), & \\ \Delta S(t) = 0, & t = 2 \left[ n - \frac{1}{2} \right], \\ \Delta x(t) = -0.579 2x(t), & \\ \Delta S(t) = S_1 T, & t = 2n, \\ \Delta x(t) = 0, & \\ x(0) = 10, S(0) = 5.8. & \end{cases} \tag{26}$$



(a)  $0 \leq S_1 \leq 2.5$

(b)  $1.2 \leq S_1 \leq 2$  (放大图)

图 1 微生物  $x$  的分支图 ( $S(0) = 5.8, x(0) = 10$ )

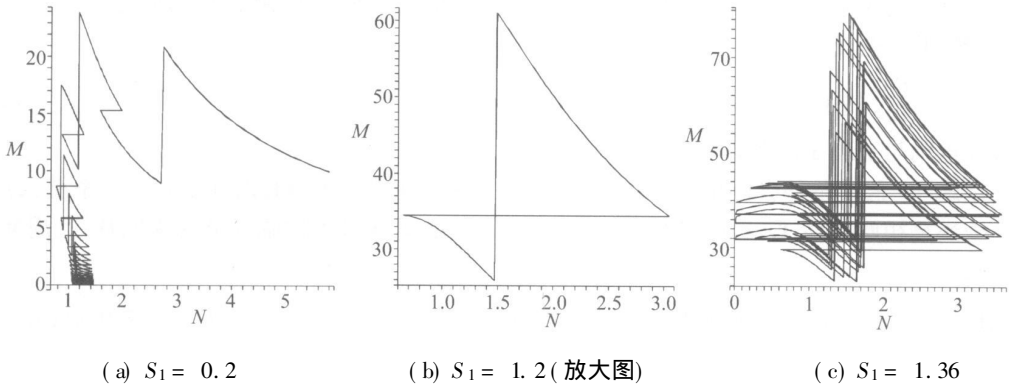


图 2 脉冲扰动系统(26)的动力学行为

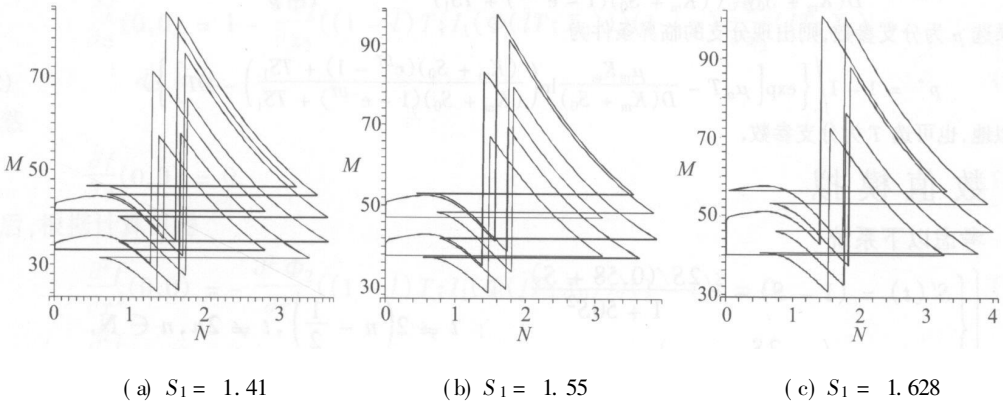


图 3 脉冲扰动系统(26)的动力学行为

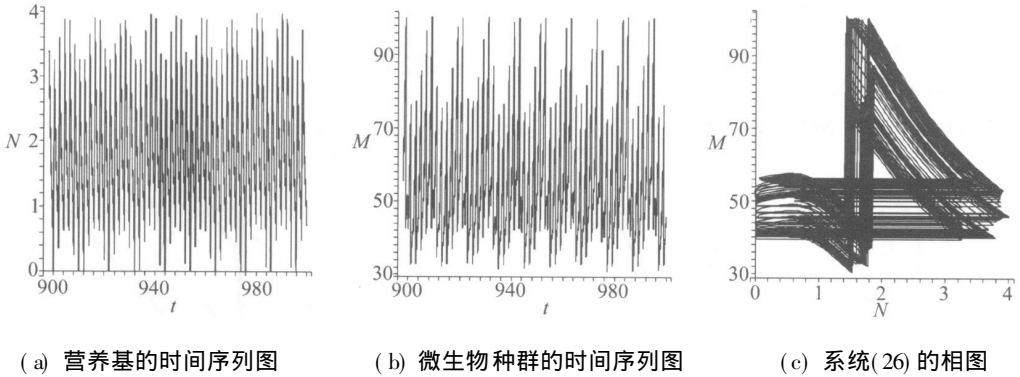


图 4 脉冲扰动系统(26)的动力学行为 ( $S_1 = 1.626$ )

当  $S_1 < 0.5$ ,  $(S^*(t), 0)$  是全局渐稳的, 然而当  $S_1 > 0.5$ , 系统(26)是持久的.

分支图(图 1)表明当  $S_1$  从 0 到 2.5 增加时, 培养基中微生物种群经历复杂的动力学过程: 灭绝  $\rightarrow$  周期解  $\rightarrow$  拟周期振荡  $\rightarrow$  周期解  $\rightarrow$  拟周期振荡  $\rightarrow$  周期解  $\rightarrow$  倍周期级联  $\rightarrow$  混沌  $\rightarrow$  周期解.

当  $S_1 = 0.2 (< 0.5)$  时,  $(S^*, 0)$  是全局渐稳的(见图 2(a)). 随着  $S_1$  的增加以及超越其临界值  $S_1 = 0.5$ , 平凡的周期解失稳从而产生超临界分支( $\partial^2 f(0, 0) / (\partial \alpha \partial \tau) = -0.293792 < 0$ ).

从图 2(b) ( $S_1 = 1.2$ , 其它参数与系统(26)一致)可以观察到唯一的极限环. 随着  $S_1$  的



增加, 系统(26)的所有解最终在此极限环附件振荡(见图2(c)). 随后, 扰动系统的轨线会趋于一个 $7T$ 周期解(见图3(a)). 类似的 $6T$ 周期解情形可在图3(b)中发现. 在图4(c)中可以观察到混沌吸引子( $S_1 = 1.626$ ). 而且 $S$ 和 $x$ 的时间序列图也能反映混沌现象(见图4(a)和图4(b)). 略微增加 $S_1$ ( $S_1 = 1.628$ )可以使系统的动力性态“稳定化”, 而且系统的轨线会再次趋于一个 $5T$ 周期解(见图3(c)).

## 4 结 论

1) 建立了一个具有变消耗率的培养基微生物脉冲微分模型, 模型的脉冲作用体现在周期性脉冲注入常数浓度的培养基, 同时微生物种群的浓度由于受到周期性脉冲式注入抗生素的作用而产生脉冲扰动, 并且这两个脉冲作用不是同步进行的.

2) 得到了一组与阈值相类似的条件来保证系统半平凡周期解的全局渐稳性, 系统持久性以及出现分支周期解. 最后进行了数值模拟.

3) 数值模拟结果表明, 系统(2)的非平凡周期解也许是稳定的. 而且脉冲周期越大, 微生物种群的浓度就越高. 因此, 要合理控制微生物的浓度低于某个水平就需要选择合理的周期 $T$ . 这一数学结论很好地解释了临床治疗社区获得性肺炎给予莫西沙星400 mg口服每天1次.

文中假设的是药物在瞬间会对病原微生物起作用, 并导致其浓度依比例减少. 从药物(代谢)动力学的观点看, 应该在系统中引入一个新的变量来表示药物本身. 这是我们今后的研究方向.

致谢 本文得到江苏大学高级人才基金项目的资助(08JDC047) 特致谢; 并感谢审稿人提出的宝贵意见.

## [参 考 文 献]

- [1] 陈兰荪, 陈键. 非线性生物动力系统[M]. 北京: 科学出版社, 1993.
- [2] Hsu S B, Li C C. A discrete-delayed model with plasmid-bearing, plasmid-free competition in a chemostat[J]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Ser B*, 2005, **5**(3): 699-718.
- [3] Huang X C, Zhu L M. A three dimensional chemostat with quadratic yields[J]. *J Math Chem*, 2005, **38**(4): 575-588.
- [4] Pilyugin S S, Waltman P. Competition in the unstirred chemostat with periodic input and washout [J]. *SIAM J Appl Math*, 1999, **59**(4): 1157-1177.
- [5] Smith R J, Wolkowicz G S K. Analysis of a model of the nutrient driven self-cycling fermentation process[J]. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series B*, 2004, **11**(2): 239-265.
- [6] Song X Y, Zhao Z. Extinction and permanence of two-nutrient and one-microorganism chemostat model with pulsed input[J]. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2006, **2006**: 1-14.
- [7] Sun S L, Chen L S. Complex dynamics of a chemostat with variable yield and periodically impulsive perturbation on the substrate[J]. *Journal of Mathematical Chemistry*, 2008, **43**(1): 338-349.
- [8] Wu J H, Nie H, Wolkowicz G S K. A mathematical model of competition for two essential resources in the unstirred chemostat[J]. *SIAM J Appl Math*, 2004, **65**(1): 209-229.
- [9] Hoefken G, Talan D, Larsen L S, et al. Efficacy and safety of sequential moxifloxacin for treatment of community-acquired pneumonia associated with a typical pathogens[J]. *Eur J Clin Microbiol Infect Dis*, 2004, **23**(10): 772-775.
- [10] Lakshmikantham V, Bainov D D, Simeonov P S. Theory of Impulsive Differential Equations [M].

- Singapore: World Scientific, 1989.
- [11] Funasaki E, Kot M. Invasion and chaos in a periodically pulsed mass action chemostat [J]. *Theor Pop Biol*, 1994, **44**(2): 203-224.
- [12] Lakmeche A, Arino O. Bifurcation of nontrivial periodic solutions of impulsive differential equations arising chemotherapeutic treatment [J]. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, 2000, **7**(2): 265-287.
- [13] Nieto J J, Rodriguez-Lopez R. Periodic boundary value problem for non-Lipschitzian impulsive functional differential equations [J]. *J Math Anal Appl*, 2006, **318**(2): 593-610.
- [14] Georgescu P, Moroanu G. Pest regulation by means of impulsive controls [J]. *Appl Math Comput*, 2007, **190**(1): 790-803.
- [15] Zhang W H, Zhu S Y, Chen H, et al. Efficacy of intravenous moxifloxacin in treating patients with moderate to severe community-acquired pneumonia [J]. *Chinese J of Infect Chemother*, 2006, **6**(5): 296-300.
- [16] Georgescu P, Zhang H, Chen L S. Bifurcation of nontrivial periodic solutions for an impulsively controlled pest management model [J]. *Appl Math Comput*, 2008, **202**(2): 675-687.
- [17] Chow S N, Hale J. *Methods of Bifurcation Theory* [M]. New York, NY: Springer-Verlag, 1982.

## On the Impulsive Perturbation and Bifurcation of Solutions for a Model of Chemostat With Variable Yield

ZHANG Hong<sup>1,2</sup>, Paul Georgescu<sup>3</sup>, Juan J. Nieto<sup>4</sup>, CHEN Lan sun<sup>5</sup>

(1. Department of Mathematics, Jiangsu University,  
Zhenjiang, Jiangsu 212013, P. R. China;

2. Department of Mathematics and Mathematical Statistics, Umeå University,  
Umeå SE-901 87, Sweden;

3. Department of Mathematics, "Gh. Asachi" Technical  
University of Iași, Bd. Copou 11, Iași 700506, Romania;

4. Departament de Anàlisi Matemàtica, Facultat de Matemàtiques,  
Universitat de Santiago de Compostela, Santiago de Compostela 15782, Spain;

5. Institute of Mathematics, Academia Sinica, Beijing 100080, P. R. China)

**Abstract:** A new model of a chemostat with variable yield and non-synchronous impulsive effect was proposed and investigated. It is observed that a set of threshold-like conditions guaranteeing the global stability of semi-trivial periodic solution, the permanence of the system and then a bifurcation of a nontrivial solution arises. Finally, the dynamics of the model was also illustrated by means of a few numerical experiments and computational simulations.

**Key words:** chemostat; impulsive differential equation; permanence; extinction; fixed point approach; bifurcation