文章编号: 1000-0887(2009) 08-0883-12

带附加噪声的随机广义 2D Ginzburg-Landau 方程的渐进行为*

李栋龙[1], 郭柏灵[2]

(1. 广西工学院 信息与计算科学系, 广西 柳州 545006;
2. 北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100081)

(我刊编委郭柏灵来稿)

摘要: 考虑带附加噪声的随机广义 2D Ginzburg-Landau 方程. 通过先验估计的方法, 随机动力系统的紧性得到证明, 进一步验证了该随机动力系统在 H_0^1 存在随机整体吸引子.

关 键 词: 随机广义 2D Ginzburg-Landau 方程; 随机动力系统; 随机整体吸引子
中图分类号: O175 文献标识码: A
DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2009.08.001

引 言

复 Ginzburg-Landau 方程是关于非平衡流体动力系统和化学系统的不稳定、超导和超流体、非线性光纤和 Bose-Einstein 凝聚及其空间模型描述的重要模型. 它是一个非常有趣的模型. 非线性 Schrödinger 方程是一 Hamilton 系统, 在有限时间拥有局部奇异解, 复 Ginzburg-Landau 方程是非线性 Schrödinger 方程的耗散情形. 有许多论文关于 Ginzburg-Landau 方程的研究[1-9]. Guo 和 Wang[9] 研究了广义 2D Ginzburg-Landau 方程

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \rho u + (1+\mathrm{i}\nu)\Delta u - (1+\mathrm{i}\mu)|u|^{2\sigma}u + \alpha\lambda_1\cdot\nabla(|u|^2u) + \beta(\lambda_2\cdot\nabla u)|u|^2,$$

在条件 $\exists\,\delta > 0$, 使得

$$3 \leqslant \sigma \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+(\mu-\nu\delta^2)/(1+\delta^2)}-1}$$

成立的条件下, 整体吸引子的存在性.

本文考虑上述方程中 $\sigma = 3$ 时带随机外力项扰动的随机广义 2D Ginzburg-Landau 方程, 即

$$\mathrm{d}u = (\rho u + (1+\mathrm{i}\nu)\Delta u - (1+\mathrm{i}\mu)|u|^6u + \alpha\lambda_1\cdot\nabla(|u|^2u) + \beta(\lambda_2\cdot\nabla u)|u|^2)\mathrm{d}t + \Phi\mathrm{d}W. \tag{1}$$

周期边界条件和初始条件为

---

* 收稿日期: 2008-02-19; 修订日期: 2009-07-02
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10661023); 广西省自然科学基金资助项目(0832065); 广西优秀人才资助计划资助项目

作者简介: 李栋龙(1964—), 男, 广东人, 教授, 博士(联系人. E-mail: lidl@21cn.com).

u 是D-周期的, $u(x, t_0) = u_0(x)$, (2)

其中$u(x, t, \omega)$是未知复值函数, $x \in D = [0, 1] \times [0, 1]$, $t > 0$, $\omega \in \Omega$, Δ是Laplace 算子, Φ是线性算子, $\rho > 0$, $\gamma, \mu, \alpha, \beta$是实参数, λ_1, λ_2是复参数. W关于时间是双边柱形Wiener 过程, 它是定义在适应于$\{\mathcal{F}_t\}_{t \geqslant 0}$的完全概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$中的取值于$L^2(0, 1)$上的函数, 可被写为

$$W(t) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k e_k,$$

其中$w_k(k \in \mathbf{N})$是相互独立的Brown 序列, $(e_k)_{k \in \mathbf{N}}$是$L^2(D)$上的正交基.

令$\Omega = \{\omega \in C(\mathbf{R}, U) \mid \omega(0) = 0\}$, 其中$U$是一个Hilbert 空间并且满足$L^2(D) \subset U$是一个Hilbert-Schmidt 嵌入的, 则$W(t)$是取值于U的随机过程, 且其对应的随机变量属于$C(\mathbf{R}, U)$. Φ是$L^2(D)$上的有界线性算子.

本文的目的是证明问题(1)、(2)在H_0^1上存在随机吸引子. 为此, 需证明$u(t)$关于时间在不同空间的一致有界性. 古典的技巧在这里已经不再适用, 我们应用类似于文献[10-13]中的方法来解决问题.

1 随机动力系统预备知识

本节给出随机动力系统的一些相关知识. 设$(\Omega, \mathcal{F}, P)$是一个概率空间, $\{\theta_t: \Omega \to \Omega\}$, $t \in \mathbf{R}^+$是一簇保测度变换, 并且映射$(t, \omega) \mapsto \theta_t \omega$是可测的, $\theta_0 = I_X$(X上的密度), $\theta_{t+s} = \theta_t \circ \theta_s$, 其中$s, t \in \mathbf{R}$, 则$(\theta_t)_{t \in T}$是一个流, $((\Omega, \mathcal{F}, P), (\theta_t)_{t \in T})$是一个可测动力系统.

定义 1 设(X, d)是可分的距离空间, $\mathcal{F}$是Borel σ-代数, $\{\theta_t\}$是$(\Omega, \mathcal{F}, P)$对应的保测度变换, 若可测映射

$$S: \mathbf{R}^+ \times X \times \Omega \to X, \qquad (t, x, \omega) \mapsto S(t, \omega) x$$

在X上满足

i) $S(0, \omega) = I_X$;

ii) 对任意的$s, t \in \mathbf{R}$, $\omega \in \Omega$, 有$S(t+s, \omega) = S(t, \theta_s \omega) \circ S(s, \omega)$, 其中$\circ$表示复合算子;

iii) $S(t, \omega): X \to X$是连续的.

那么称S是一个连续随机动力系统.

定义 2 给定一个随机集K, 集合

$$\Omega(K, \omega) = \Omega_K(\omega) = \bigcap_{T \geqslant 0} \overline{\bigcup_{t \geqslant T} S(t, \theta_{-t}\omega) K(\theta_{-t}\omega)}$$

称为K的Ω-极限集.

定义 3 假设S是随机动力系统, 存在随机紧集$\omega \mapsto A(\omega)$满足如下条件:

(i) $A(\omega)$是严格不变的, 即对于所有$t > 0$, $S(t, \omega) A(\omega) = A(\theta_t \omega)$;

(ii) $A(\omega)$吸引所有确定有界集$B \subset X$.

那么称$A(\omega)$为S的随机吸引子.

定理 1 假设S是Polish 空间X上的随机动力系统, 若存在紧集$\omega \mapsto K(\omega)$吸收每一有界非随机集$B \subset X$, 那么集合

$$A(\omega) = \overline{\bigcup_{B \subset X} \Omega_B(\omega)}$$

是S的随机吸引子.

2 方程的解以及随机动力系统的产生

本节证明问题(1)、(2)随机吸引子的存在性．为此, 引入一些记号, $\|\cdot\|$ 表示 $L^2(D)$ 范数, $(\cdot,\cdot)$ 表示通常内积, $\|\cdot\|_p$ 表示 $L^p(D)$ 范数, 其中 $1\leqslant p\leqslant\infty$ ($\|\cdot\|_2=\|\cdot\|$).

记 $H=L^2(D)$, $V=H_0^1(D)$, $A=-\partial^2/\partial x^2$ 为定义在 $D(A)=H^2(D)\cap V$ 无界线性算子, 由 Lumer-Phillips 定理, 线性算子 A 是压缩连续半群 $\{\exp At\}_{t>0}$ 的无穷小生成元[14].

方程(1)可写为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\rho u-(1+\mathrm{i}\gamma)Au-(1+\mathrm{i}\mu)|u|^6u+\alpha\lambda_1\cdot\nabla(|u|^2u)+\beta(\lambda_2\cdot\nabla u)|u|^2+\Phi\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}.\tag{3}$$

$\Phi: H\to D(A)$ 是线性算子．引入如下带初值的线性方程[10]:

$$\mathrm{d}z(t)+(1+\mathrm{i}\gamma)Az(t)\mathrm{d}t=\Phi\mathrm{d}W(t),$$

初始条件为 $z(0)=0$． 众所周知, 该方程的解 z 是 Ornstein-Uhlenbeck 过程, $z\in C([0,\infty], V)$ (见文献[12]中的 Theorem 6.10), z 是稳态遍历过程, 它的迹是 P-a.s. 连续的, 且对于任意 t 和 s, 有

$$z(t,\theta_s\omega)=z(t+s,\omega),\qquad P\text{-a.s.}$$

又由于 z 是 Gauss 过程, 对任意的 $q,r\geqslant1$, $E(|z(t)|_q^r)$ 是有界的且不依赖于 t.

设 B 是 H 中的有界集, 对于 $t_0<0$ 和 $u(t_0)\in B$, 令

$$v(t)=u(t)-z(t),\qquad t\geqslant t_0,$$

其中 u 是方程(1)、(2)的解． 由方程(3)和 v 的形式知, 随机过程 v 满足随机方程

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\rho v-Av-(1+\mathrm{i}\mu)|u|^6u+\alpha\lambda_1\cdot\nabla(|u|^2u)+\beta(\lambda_2\cdot\nabla u)|u|^2\mathrm{d}t+\rho z,\tag{4}$$

$$v(t_0,\omega)=v_0(\omega)=u_0-z(t_0,\omega).\tag{5}$$

类似于 Guo 和 Wang 文献[9]中定理 3.4 的证明, 易证, 对于 P-a.s. $\omega\in\Omega$, $v_0\in H^2(D)$, 存在唯一解 $v\in C^1((0,T):H^2(D))\cap C([0,T):H^2(D))$, $\forall T<\infty$, 且对于 $t\geqslant t_0$, 映照 $\xi=v(t_0)\mapsto v(t)$ 从 V 到 V 是连续的.

对任意 $v(t_0)=v_0$, $v((t,\omega;t_0,v_0))$ 表示方程(4)、(5)的解, 有

$$u(t,\omega;t_0)=v((t,\omega;t_0,u_0-z(t_0,\omega)))+z(t,\omega).$$

显然, 由

$$S(t,\omega;t_0)u_0=u(t,\omega;t_0)=v((t,\omega;t_0,u_0-v(t_0,\omega)))+z(t,\omega)$$

定义了随机动力系统 $(S(t,\omega;t_0))_{t\geqslant t_0,\omega\in\Omega}$, 称为由带附加噪声的随机广义 2D Ginzburg-Landau 方程产生的流．对于 $t\geqslant t_0$, 映照 $\omega\to S(t,\omega;t_0)u_0$ 是可测的.

3 随机吸引子的存在性

现证明 $(S(t,\omega;t_0))_{t\geqslant t_0,\omega\in\Omega}$ 是紧的, 且 $t=0$ 时在 V 存在紧吸收集． 令 v 是方程(4)、(5)的解, 对于 $\omega\in\Omega$, 我们需要解 v 在 H, V, $H^2(D)$ 上的先验估计． 本文中, ε_i $(i=1,2,\cdots,13)$, ϵ_i $(i=1,2,\cdots,8)$, k_i $(i=1,2,\cdots,8)$, κ_i $(i=1,2,\cdots,14)$, C 和 c 表示依赖于方程(1)系数的正常数.

引理 1 设 $u_0 \in H$, $\|u_0\| \leqslant \rho$, 则存在确定的 $t \leqslant -1$ 和随机半径 $r_1(\omega) > 0$, 使得对于 $t_0 < t$, 方程(4) 的解 $v(t, \omega; t_0, u_0 - z(t_0, \omega))$ 在$[t_0, \infty)$ 上, 有 $v(t_0) = u_0 - z(t_0)$, 且满足
$$\|v(t, \omega; t_0, u_0 - z(t_0, \omega))\|^2 \leqslant r_1^2(\omega).$$

证明 方程(4) 与 v 作内积, 取实部, 得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\|v\|^2}{\mathrm{d}t} - \rho\|v\|^2 + \|\nabla v\|^2 = -\operatorname{Re}(1+\mathrm{i}\mu)(|u|^6 u, v) + \alpha\operatorname{Re}(\lambda_1\cdot\nabla(|u|^2 u), v) + \beta\operatorname{Re}((\lambda_2\cdot\nabla u)|u|^2, v) + \rho(z, v). \tag{6}$$

首先, 有

$$\rho(z, v) \leqslant \frac{\rho}{2}\|v\|_2^2 + c(\rho)\|z\|_2^2. \tag{7}$$

式(6) 等号右边第 1 项可估计为

$$(|u|^6 u, v) = (|v+z|^6(v+z), v) \leqslant -\frac{1}{2}\|v\|_8^8 + c(\mu)\|z\|_8^8, \tag{8}$$

这里已运用 Young 不等式

$$\left|\int |v|^j |z|^{8-j}\mathrm{d}x\right| \leqslant \tau\|v\|_8^8 + c(\tau)\|z\|_8^8, \qquad 1 \leqslant j < 8,$$

且令 τ 适当小.

由 Hölder 不等式和 Young 不等式, 式(6) 等号右边第 2、第 3 项分别被估计为

$$|\alpha\operatorname{Re}(\lambda_1\cdot\nabla(|u|^2 u), v)| \leqslant \frac{1}{4}\|\nabla v\|^2 + C(\alpha, \lambda_1)\|v\|^6 + c(\alpha, \lambda_1)(\|\nabla z\|^2 + \|z\|^6) \tag{9}$$

和

$$\beta\operatorname{Re}((\lambda_2\cdot\nabla u)|u|^2, v) \leqslant \frac{1}{4}\|\nabla v\|_2^2 + C(\beta, \lambda_2)\|v\|_6^6 + c(\beta, \lambda_2)(\|z\|_6^6 + \|\nabla z\|_2^2). \tag{10}$$

由式(6) ~ (10) 得到

$$\frac{\mathrm{d}\|v\|^2}{\mathrm{d}t} + \|\nabla v\|^2 \leqslant -\|v\|_8^8 + C(\alpha, \beta, \lambda_1, \lambda_2)\|v\|_6^6 + 3\rho\|v\|^2 + g_1(t), \tag{11}$$

其中 $g_1(t) = c(\alpha, \beta, \lambda_1, \lambda_2, \mu, \rho)(\|z\|_8^8 + \|z\|_6^6 + \|\nabla z\|^2 + \|z\|^2)$.

注意到

$$C(\alpha, \beta, \lambda_1, \lambda_2)\|v\|_6^6 + 3\rho\|v\|^2 \leqslant \frac{1}{2}\|v\|_8^8 + C(\alpha, \beta, \lambda_1, \lambda_2, \rho, D). \tag{12}$$

由式(11) 和(12), 得到

$$\frac{\mathrm{d}\|v\|_2^2}{\mathrm{d}t} + \|\nabla v\|_2^2 + \frac{1}{2}\|v\|_8^8 \leqslant g_2(t),$$

其中 $g_2(t) = g_1(t) + C$.

再注意到

$$\|v\|_2^2 \leqslant \frac{1}{2}\|v\|_8^8 + C(D),$$

由此得

$$\frac{\mathrm{d}\|v\|_2^2}{\mathrm{d}t} + \|\nabla v\|_2^2 + \|v\|_2^2 \leqslant g_3(t),$$

其中 $\quad g_3(t) = g_2(t) + C.$

由 Gronwall 不等式, 得

$$\|v(t)\|_2^2 \leqslant \|v(t_0)\|^2 e^{-(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} g_3(\sigma) e^{-(t-\sigma)} d\sigma \leqslant$$

$$2(\|u(t_0)\|^2 + \|z(t_0)\|^2) e^{-(t-s)} + \int_{-\infty}^{t} g_3(\sigma) e^{-(t-\sigma)} d\sigma,$$

$$\text{对于 } t_0 \leqslant t \leqslant 0.$$

取定 $\rho > 0$, 适当选择 t, 使得 $\rho^2 e^{-(t-t_0)} \leqslant 1$, $t_0 \leqslant t$. 设

$$r_1^2(\omega) = 2 + 2\sup_{t_0 \leqslant 1} \|z(t_0)\|^2 e^s + \int_{-\infty}^{0} g_3(\sigma) e^{-(t-\sigma)} d\sigma.$$

当 $t \to -\infty$, 对于 P-a. s. $\omega \in \Omega$, $g_3(t) \geqslant 0$ 至多以多项式增长, 从而 r_1 是 P-a. s. 有限的[10].

引理 2 下面不等式

$$\frac{1}{8}\frac{d}{dt}\|v\|_8^8 \leqslant$$

$$-\frac{1}{4}\int |v|^4 (7|\nabla|v|^2|^2 dx - 6\gamma \nabla|v|^2 \cdot i(v\nabla v - v\nabla v) +$$

$$|v\nabla v - v\nabla v|^2) dx - \frac{1}{2}\|v\|_{14}^{14} + \epsilon\|\Delta v\|^2 + \gamma\|\nabla v\|^4 + g_5(t)$$

成立, 其中 $g_5(t)$ 由下面证明中给出.

证明 方程(4)与 $|v|^6 v$ 作内积, 取实部, 得到

$$\left(\frac{dv}{dt}, |v|^6 v\right) = (\rho v + (1+i\gamma)\Delta v - (1+i\mu)|u|^6 u +$$

$$\alpha\lambda_1 \cdot \nabla(|u|^2 u) + \beta(\lambda_2 \cdot \nabla u)|u|^2 + \rho z, |v|^6 v). \tag{13}$$

首先, 有

$$\rho(v, |v|^6 v) = \rho\int |v|^8 \cdot 1 dx \leqslant \frac{1}{8}\|v\|_{14}^{14} + c(\rho, D). \tag{14}$$

方程(13)左边项变为

$$\mathrm{Re}\left(\frac{dv}{dt}, |v|^6 v\right) = \int_0^1 |v|^6 \mathrm{Re}\, v_t v\, dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 |v|^6 \mathrm{Re}(v_t v + v_t v) dx = \frac{1}{8}\frac{d}{dt}\|v\|_8^8. \tag{15}$$

方程(13)等号右边第 2 项估计为

$$\mathrm{Re}(1+i\gamma)(\Delta v, |v|^6 v) =$$

$$-\mathrm{Re}(1+i\gamma)\int 3\nabla v v |v|^4 \nabla |v|^2 dx - \int |\nabla v|^2 |v|^6 dx =$$

$$-\frac{3}{2}\int |v|^4 |\nabla|v|^2|^2 dx + \frac{3\gamma}{2}\int |v|^4 \nabla|v|^2 \cdot i(v\nabla v - v\nabla v) dx -$$

$$\int |\nabla v|^2 |v|^6 dx.$$

由于

$$|v|^2 |\nabla v|^2 = \frac{1}{4}|\nabla|v|^2|^2 + \frac{1}{4}|v\nabla v - v\nabla v|^2,$$

从而

$$\mathrm{Re}(1+i\gamma)(\Delta v, |v|^6 v) =$$

$$-\frac{1}{4}\int |v|^4(7|\nabla|v|^2|^2\mathrm{d}x - 6\gamma\nabla|v|^2\cdot i(v\nabla\bar{v}-\bar{v}\nabla v)+$$
$$|v\nabla\bar{v}-\bar{v}\nabla v|^2)\mathrm{d}x. \tag{16}$$

方程(13)等号右边第3项估计为

$$-\mathrm{Re}(1+i\mu)(|u|^6u,|v|^6v)\leqslant-\frac{1}{2}\|v\|_{14}^{14}+c(\mu)\|z\|_{14}^{14}, \tag{17}$$

这里已运用Young不等式得到下面的不等式:

$$\left|\int |v|^{14}|z|^{14-j}\mathrm{d}x\right|\leqslant\tau\|v\|_{14}^{14}+c(\tau)\|z\|_{14}^{14},\qquad 7\leqslant j<14,$$

且令 τ 适当小.

方程(13)等号右边第4项估计为

$$\mathrm{Re}(\beta(\lambda_2\cdot\nabla u)|u|^2,|v|^6v)=$$
$$|\beta\lambda_2|\int(|v|^9|\nabla v|+2|v|^8|\nabla v||z|+|v|^7|\nabla v||z|^2)\mathrm{d}x+$$
$$|\beta\lambda_2|\int(|v|^9|\nabla z|+2|v|^8|\nabla z||z|+|v|^7|\nabla z||z|^2)\mathrm{d}x. \tag{18}$$

由于Gagliardo-Nienberg不等式, 可得

$$\|v\|_4\leqslant c\|v\|_{H^1}^{1/2}\|v\|^{1/2},\qquad \forall v\in V;$$
$$\|v\|_8\leqslant c\|v\|_{H^2}^{\theta}\|v\|_q^{1-\theta},\qquad \forall v\in H^2,$$

其中当 $1<q<8$ 时, $\theta=(8-q)/(4q+8)$, 当 $q\geqslant 8$, $\theta=0$.

可推得

$$\|\nabla v\|_4^2\leqslant c\|\nabla v\|_{H^1}\|\nabla v\|\leqslant c\|v\|_{H^2}\|v\|_{H^1}.$$

方程(18)等号右边第1项估计为

$$|\beta\lambda_2|\int|v|^9|\nabla v|\mathrm{d}x\leqslant$$
$$c|\beta\lambda_2|^2\|\nabla v\|_4^2\|v\|_8^4+\frac{1}{144}\|v\|_{14}^{14}\leqslant$$
$$c|\beta\lambda_2|^2\|v\|_{H^2}^{1+4\theta}\|v\|_{H^1}\|v\|_q^{4(1-\theta)}+\frac{1}{144}\|v\|_{14}^{14}\leqslant$$
$$\epsilon_1'\|v\|_{H^2}^2+c(\epsilon_1')|\beta\lambda_2|^{4/(1-4\theta)}\|v\|_{H^1}^{2/(1-4\theta)}\|v\|_q^{8(1-\theta)/(1-4\theta)}+$$
$$\frac{1}{144}\|v\|_{14}^{14}\leqslant\qquad(q>3\text{ 和 }\forall 0<\gamma\leqslant 1)$$
$$\epsilon_1'\|v\|_{H^2}^2+k_1'\|v\|_{H^1}^4+c(\epsilon_1',k_1')|\beta\lambda_2|^{8/(1-8\theta)}\|v\|_q^{16(1-\theta)/(1-8\theta)}+$$
$$\frac{1}{144}\|v\|_{14}^{14}\leqslant\qquad\left(q>\frac{14}{3}\right)$$
$$c\epsilon_1'\|\Delta v\|^2+ck_1'\|\nabla v\|^4+\frac{1}{144}\|v\|_q^q+$$
$$c(\epsilon_1',k_1',D)|\beta\lambda_2|^{8q/(q-8q\theta-16+16\theta)}+\frac{1}{144}\|v\|_{14}^{14}\leqslant\qquad\left(q>\frac{34}{3}\right)$$
$$\epsilon_1\|\Delta v\|^2+k_1\|\nabla v\|^4+\frac{1}{72}\|v\|_{14}^{14}+c(\epsilon_1,k_1,D)|\beta\lambda_2|^{16}$$
$$\left(q=14>\frac{34}{3}\right).$$

方程(18)等号右边第2项估计为

$$2|\beta\lambda_2|\int|v|^8|\nabla v||z|\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\epsilon_2\|\Delta v\|^2+k_2\|\nabla v\|^4+\frac{1}{72}\|v\|_{14}^{14}+$$
$$c(\epsilon_2,k_2)|\beta\lambda_2|^{28/5}\|\Delta z\|^{28/10}\|\nabla z\|^{28/10},$$

这里已运用Agmon 不等式 $\|z\|_\infty\leqslant c\|\Delta z\|^{1/2}\|\nabla z\|^{1/2}$.

方程(18) 等号右边第 3 项估计为

$$|\beta\lambda_2|\int|v|^7|\nabla v||z|^2\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\epsilon_3\|\Delta v\|^2+k_3\|\nabla v\|^4+\frac{1}{72}\|v\|_{14}^{14}+c(\epsilon_3,k_3)|\beta\lambda_2|^4\|z\|_8^8.$$

类似地, 可得

$$|\beta\lambda_2|\int|v|^9|\nabla z|\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{72}\|v\|_{14}^{14}+c|\beta\lambda_2|^{14/5}\|\nabla z\|_{14/5}^{14/5},$$
$$2|\beta\lambda_2|\int|v|^8|\nabla z||z|\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\frac{1}{72}\|v\|_{14}^{14}+c|\beta\lambda_2|^{7/3}\|\nabla z\|_{7/3}^{7/3}\|\Delta z\|\|\nabla z\|$$

和

$$2|\beta\lambda_2|\int|v|^7|\nabla z||z|^2\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\frac{1}{72}\|v\|_{14}^{14}+c|\beta\lambda_2|^2(\|\nabla z\|_4^4+\|z\|_8^8).$$

综合上面讨论, 方程(18) 可估计为

$$\mathrm{Re}(\beta(\lambda_2\cdot\nabla u)|u|^2,|v|^6v)\leqslant$$
$$\epsilon_4\|\Delta v\|^2+k_4\|\nabla v\|^4+\frac{1}{12}\|v\|_{14}^{14}+g_4(t),\tag{19}$$

其中 $\epsilon_4=\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3$, $k_4=k_1+k_2+k_3$ 及

$$g_4(t)=c(\epsilon_1,k_1,D)|\beta\lambda_2|^{16}+c(\epsilon_2,k_2)|\beta\lambda_2|^{28/5}\|\Delta z\|^{28/10}\|\nabla z\|^{28/10}+$$
$$c(\epsilon_3,k_3)|\beta\lambda_2|^4\|z\|_8^8+c|\beta\lambda_2|^{14/5}\|\nabla z\|_{14/5}^{14/5}+$$
$$c|\beta\lambda_2|^{7/3}\|\nabla z\|_{7/3}^{7/3}\|\Delta z\|\|\nabla z\|+c|\beta\lambda_2|^2(\|\nabla z\|_4^4+\|z\|_8^8).$$

由于

$$\nabla(|u|^2u)=u\nabla|u|^2+|u|^2\nabla u=2\nabla u|u|^2+u^2\nabla u,$$

得到

$$\mathrm{Re}(\alpha\lambda_1\cdot\nabla(|u|^2u),|v|^6v)\leqslant$$
$$|\alpha\lambda_1|\int(3|\nabla v||v|^2+3|\nabla v||z|^2+3|v|^2|\nabla z|)|v|^7\mathrm{d}x+$$
$$|\alpha\lambda_1|\int(3|v|^2|\nabla z|+6|v||\nabla z||z|+3|\nabla z||z|^2)|v|^7\mathrm{d}x.$$

类似于上面讨论, 得到

$$\mathrm{Re}(\alpha\lambda_1\cdot\nabla(|u|^2u),|v|^6v)\leqslant$$
$$\epsilon_5\|\Delta v\|^2+k_5\|\nabla v\|^4+\frac{1}{12}\|v\|_{14}^{14}+g_4(t),\tag{20}$$
$$\rho(z,|v|^6v)\leqslant\frac{1}{12}\|v\|_{14}^{14}+c(\rho)\|z\|_2^2.\tag{21}$$

综合式(14)~(21), 方程(13) 变为

$$\frac{1}{8}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|v\|_8^8\leqslant$$

$$-\frac{1}{4}\int |v|^4(7|\nabla|v|^2|^2\mathrm{d}x - 6\gamma\nabla|v|^2\cdot \mathrm{i}(v\nabla\bar{v} - \bar{v}\nabla v) +$$

$$|v\nabla\bar{v} - \bar{v}\nabla v|^2)\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\|v\|_{14}^{14} + \epsilon\|\Delta v\|^2 + k\|\nabla v\|^4 + g_5(t),$$

其中 $\epsilon = \epsilon_4 + \epsilon_5$, $k = k_4 + k_5$, $g_5(t) = 2g_4(t) + c(\rho, D) + c(\mu)\|z\|_{14}^{14} + c(\rho)\|z\|_2^2$.

引理 2 成立.

引理 3　如果下面给定的矩阵 $\boldsymbol{M}$ 是非负定的, $u_0 \in V$, $\|u_0\| \leqslant \rho$, 则存在确定的 $t \leqslant -1$ 和随机半径 $r_2(\omega) > 0$, 使得对于 $t_0 < t$, 方程(4) 的解 $v(t, \omega; t_0, u_0 - z(t_0, \omega))$ 在 $[t_0, \infty)$ 上, 有 $v(t_0) = u_0 - z(t_0)$, 且满足

$$\|\nabla v(t, \omega; t_0, u_0 - z(t_0, \omega))\|^2 \leqslant r_2^2(\omega).$$

证明　方程(4) 与 Δv 作内积, 取实部, 得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\|\nabla v\|^2}{\mathrm{d}t} - \rho\|\nabla v\|^2 + \|\Delta v\|^2 = -\operatorname{Re}(1 + \mathrm{i}\mu)(|u|^6 u, \Delta v) +$$

$$\alpha\operatorname{Re}(\lambda_1\cdot\nabla(|u|^2 u), \Delta v) + \beta\operatorname{Re}((\lambda_2\cdot\nabla u)|u|^2, \Delta v) + \rho(z, \Delta v). \tag{22}$$

首先, 有

$$\rho(z, \Delta v) \leqslant \epsilon_6\|\Delta v\|^2 + c(\epsilon_6)\|z\|_2^2. \tag{23}$$

由方程(22) 等号右边第 1 项, 得到

$$-\operatorname{Re}(1 + \mathrm{i}\mu)(|u|^6 u, \Delta v) =$$

$$-\operatorname{Re}((1 + \mathrm{i}\mu)(|v|^6 + 2|v|^4 \bar{v}z + 2|v|^2\bar{v}^2z^2 + \bar{v}^3z^3 +$$

$$2|v|^4 v\bar{z} + 4|v|^4|z|^2 + 4|v|^2|z|^4 + 2|z|^2\bar{v}^2z^2 +$$

$$v^3\bar{z}^3 + 2|z|^2v^2\bar{z}^2 + 2|z|^4 v\bar{z} + 2|z|^2\bar{v}z + |z|^6)(v + z), \Delta v). \tag{24}$$

因此

$$\operatorname{Re}(1 + \mathrm{i}\mu)(|v|^6 v, \Delta v) = -\frac{1}{4}\int |v|^4(7|\nabla|v|^2|^2\mathrm{d}x -$$

$$6\mu\nabla|v|^2\cdot \mathrm{i}(v\nabla\bar{v} - \bar{v}\nabla v) + |v\nabla\bar{v} - \bar{v}\nabla v|^2)\mathrm{d}x. \tag{25}$$

由于

$$\int |\Delta v||v|^i|z|^{6-i}\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon_i\|\Delta v\|^2 + \kappa_i\|v\|_{14}^{14} +$$

$$c(\varepsilon_i, \kappa_i)\|\Delta z\|^{28(6-i)/(7-i)}\|\nabla z\|^{28(6-i)/(7-i)}, \qquad 0 \leqslant i \leqslant 6, \tag{26}$$

由式(25)、(26), 式(24) 可估计为

$$-\operatorname{Re}(1 + \mathrm{i}\mu)(|u|^6 u, \Delta v) \leqslant$$

$$-\frac{1}{4}\int |v|^4(7|\nabla|v|^2|^2\mathrm{d}x - 6\mu\nabla|v|^2\cdot \mathrm{i}(v\nabla\bar{v} - \bar{v}\nabla v) +$$

$$|v\nabla\bar{v} - \bar{v}\nabla v|^2)\mathrm{d}x + \varepsilon_7\|\Delta v\|^2 + \kappa_7\|v\|_{14}^{14} +$$

$$\sum_{i=0}^{6} c(\varepsilon_i, \mu)\|\Delta z\|^{28(6-i)/(7-i)}\|\nabla z\|^{28(6-i)/(7-i)}, \tag{27}$$

其中 $\sum_{i=0}^{6}\varepsilon_i = \epsilon_7$, $\sum_{i=0}^{6}\kappa_i = \kappa_7$.

由方程(22) 等号右边第 2 项和第 3 项, 分别得到

$$\operatorname{Re}(\alpha\lambda_1\cdot\nabla(|u|^2 u), \Delta v) \leqslant$$

$$|\alpha\lambda_1|\int(3|\nabla v||v|^2 + 6|\nabla v||v||z| +$$

$$3|\nabla v||z|^2)|\Delta v|\,\mathrm{d}x+|\alpha\lambda_1|\int(3|\nabla v||z|^2+3|v|^2|\nabla z|+6|v||\nabla z||z|+3|\nabla z||z|^2)|\Delta v|\,\mathrm{d}x$$

和

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\beta(\lambda_2\cdot\nabla u)|u|^2,\Delta v)\leqslant{}&|\beta\lambda_2|\int(|\nabla v||v|^2+2|\nabla v||v||z|+|\nabla v||z|^2)|\Delta v|\,\mathrm{d}x+\\&|\beta\lambda_2|\int(|v|^2|\nabla z|+2|v||\nabla z||z|+|\nabla z||z|^2)|\Delta v|\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由 Hölder 不等式和 Young 不等式, 有

$$\begin{aligned}&\alpha\mathrm{Re}(\lambda_1\cdot\nabla(|u|^2u),\Delta v)+\beta\mathrm{Re}((\lambda_2\cdot\nabla u)|u|^2,\Delta v)\leqslant\\&\quad\epsilon_{14}\|\Delta v\|^2+k\|\nabla v\|^4+\kappa_{12}\|v\|_{14}^{14}+g_6(t),\end{aligned}\tag{28}$$

其中

$$\epsilon_8=\sum_{j=8}^{13}\varepsilon_j,\quad\kappa_{12}=\sum_{j=8}^{11}\kappa_j,\quad k=\sum_{j=6}^{8}k_j,$$

$$\begin{aligned}g_6(t)={}&c(\epsilon_8,k_6,\kappa_8,,\alpha,\beta,\lambda_1,\lambda_2,D)+c(\epsilon_9,k_7,\kappa_9,\alpha,\beta,\lambda_1,\lambda_2)\|z\|_7^7+\\&c(\epsilon_{10},k_8,\alpha,\beta,\lambda_1,\lambda_2)\|z\|_8^8+c(\epsilon_{11},\kappa_{10},\alpha,\beta,\lambda_1,\lambda_2)\|\nabla z\|_{14/5}^{14/5}+\\&c(\epsilon_{12},\kappa_{11},\alpha,\beta,\lambda_1,\lambda_2,\|\Delta z\|\,\|\nabla z\|)\|\nabla z\|_{7/3}^{7/3}+\\&c(\epsilon_{13},\alpha,\beta,\lambda_1,\lambda_2)(\|\nabla z\|_4^4+\|z\|_8^8).\end{aligned}$$

综合式(22)、(23)、(27)、(28), 式(22)变为

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\|\nabla v\|^2}{\mathrm{d}t}-\rho\|\nabla v\|^2+\|\Delta v\|^2\leqslant\\&\quad-\frac{1}{4}\int|v|^4(7|\nabla|v|^2|^2\mathrm{d}x-6\mu\nabla|v|^2\cdot\mathrm{i}(v\nabla v-v\nabla v)+\\&\quad|v\nabla v-v\nabla v|^2)\mathrm{d}x+\epsilon\|\Delta v\|^2+k\|\nabla v\|^4+\kappa\|v\|_{14}^{14}+g_7(t),\end{aligned}\tag{29}$$

其中

$$\epsilon_6+\epsilon_7+\epsilon_8=\epsilon,\quad\sum_{i=0}^{11}\kappa_i=\kappa,$$

$$\begin{aligned}g_7(t)={}&g_6(t)+c(\epsilon_6)\|z\|_2^2+\\&\sum_{i=0}^{6}c(\varepsilon_i,\mu)\|\Delta z\|^{28(6-i)/(7-i)}\|\nabla z\|^{28(6-i)/(7-i)}.\end{aligned}$$

由方程(29)和引理 2, 得到

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\nabla v\|^2+\frac{\delta^2}{4}\|v\|_8^8\right)-\rho\|\nabla v\|^2+\|\Delta v\|^2+\frac{\delta^2}{4}\|v\|_{14}^{14}\leqslant\\&\quad-\frac{1}{4}\int|v|^4(7(1+\delta^2)|\nabla|v|^2|^2\mathrm{d}x-\\&\quad6(\mu+\gamma\delta^2)\nabla|v|^2\cdot\mathrm{i}(v\nabla v-v\nabla v)+(1+\delta^2)|v\nabla v-v\nabla v|^2)\mathrm{d}x+\\&\quad\epsilon(1+\delta^2)\|\Delta v\|^2+k(1+\delta^2)\|\nabla v\|^4+\kappa\|v\|_{14}^{14}+g_8(t),\end{aligned}$$

其中 $g_8(t)=g_7(t)+g_5(t)\delta^2$, 且选择 ϵ 适当小, 使得 $1-\epsilon(1+\delta^2)>0$.

上面不等式的积分是一个二次型, 如果它的矩阵

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}7(1+\delta^2)&3(\mu+\gamma\delta^2)\\3(\mu+\gamma\delta^2)&1+\delta^2\end{pmatrix}$$

是非负定的, 即

$$\sqrt{7}(1+\delta^2)\geqslant 3(\mu+\gamma\delta^2), \tag{30}$$

那么, 二次型也是非负定的, 从而积分是非正的.

另外有

$$\rho\|\nabla v\|^2\leqslant k\|\nabla v\|^4+c(k,D).$$

选择适当的 ϵ 和 k, 使得

$$\epsilon(1+\delta^2)\|\Delta v\|^2+k(2+\delta^2)\|\nabla v\|^4\leqslant\frac{1}{4}\|\Delta v\|^2. \tag{31}$$

由于

$$\|\nabla v\|^2=-(\Delta v,v)\leqslant\|\Delta v\|\|v\|\leqslant r_1(\omega)\|\Delta v\|\qquad(\text{由引理 1}), \tag{32}$$

从而有

$$\|\nabla v\|^2\leqslant\frac{1}{4}\|\Delta v\|^2+cr_1^2(\omega). \tag{33}$$

令 $\kappa\leqslant\delta^2/8$, 且注意到

$$\frac{\delta^2}{4}\|v\|_8^8=\frac{\delta^2}{4}\int|v|^8\mathrm{d}x\leqslant\frac{\delta^2}{8}\|v\|_{14}^{14}+c(\delta,D). \tag{34}$$

由式(30) ~ (34), 可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|\nabla v\|^2+\frac{\delta^2}{4}\|v\|_8^8\right)+\frac{1}{4}\|\Delta v\|^2+\left(\|\nabla v\|^2+\frac{\delta^2}{4}\|v\|_8^8\right)\leqslant g_8(t)+c(\delta,D)r_1^2(\omega). \tag{35}$$

由 Gronwall 不等式, 对于 $t_0\leqslant s\leqslant t$, 得到

$$\|\nabla v(t)\|^2+\frac{\delta^2}{4}\|v(t)\|_8^8\leqslant\left(\|\nabla v(s)\|^2+\frac{\delta^2}{4}\|v(s)\|_8^8\right)\mathrm{e}^{-2(t-s)}+2\int_s^t(g_8(\tau)+c(\delta,D)r_1^2(\omega))\mathrm{e}^{-(t-\tau)}\mathrm{d}\tau.$$

对于 $t=-1$, $s=t_0$, 有

$$\|\nabla v(-1)\|^2+\frac{\delta^2}{4}\|v(-1)\|_8^8\leqslant\left(\|\nabla v(t_0)\|^2+\frac{\delta^2}{4}\|v(t_0)\|_8^8\right)\mathrm{e}^{-2(-1-t_0)}+\int_{-\infty}^{-1}(g_8(\tau)+c(\delta,D)r_1^2(\omega))\mathrm{e}^{-(t-\tau)}\mathrm{d}\tau. \tag{36}$$

适当选择 t, 使得 $(1+\delta^2/4)\rho^2\leqslant 1$. 令

$$r_2^2(\omega)=2+2\sup_{s\leqslant -1}\|z(t_0)\|^2\mathrm{e}^{2t_0}+\int_{-\infty}^{-1}(g_8(\tau)+c(\delta,D)r_1^2(\omega))\mathrm{e}^{-(t-\tau)}\mathrm{d}\tau.$$

当 $t\to-\infty$, $g_8(t)\geqslant 0$ 至多以多项式增长, 从而 r_2 是 P-a.s. 有限的.

引理 4 如果矩阵 $\boldsymbol{M}$ 是非负定的, $u_0\in V$, $\|u_0\|\leqslant\rho$, 则存在确定的 $t\leqslant -1$ 和随机半径 $r_3(\omega)>0$, 使得对于 $t_0<t$, 方程(4) 的解 $v(t,\omega;t_0,u_0-z(t_0,\omega))$ 在 $[t_0,\infty)$ 上, 有 $v(t_0)=u_0-z(t_0)$, 且满足

$$\|\Delta v(0,\omega;t_0,u_0-z(t_0,\omega))\|^2\leqslant r_3^2(\omega).$$

证明　方程(4)与 $\Delta^2 v$ 作内积,取实部,得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\|\Delta v\|^2}{\mathrm{d}t}-\rho\|\Delta v\|^2+\|\Delta\nabla v\|^2=-\mathrm{Re}(1+\mathrm{i}\mu)(|u|^6u,\Delta^2v)+$$
$$\alpha\mathrm{Re}(\lambda_1\cdot\nabla(|u|^2u),\Delta^2v)+\beta\mathrm{Re}((\lambda_2\cdot\nabla u)|u|^2,\Delta^2v)+\rho(v,\Delta^2v).\qquad(37)$$

由于

$$(|u|^6u,\Delta^2v)=(|u|^6u,\Delta^2u)-(|u|^6u,\Delta^2z)$$

以及

$$\|\nabla u\|_4\leqslant\|\nabla\Delta u\|^{1/2}\|u\|^{1/2},\quad\|u\|_{24}\leqslant\|\nabla\Delta u\|^{2/27}\|u\|_8^{25/27},$$

由方程(37)等号右边第1项,得到

$$-\mathrm{Re}(1+\mathrm{i}\mu)(|u|^6u,\Delta^2u)\leqslant\frac{1}{4}\|\nabla\Delta u\|^2+c(\mu)\|u\|^{18}\|u\|_8^{200}.$$

类似地,可估计方程(37)等号右边第2项和第3项:

$$\alpha\mathrm{Re}(\lambda_1\cdot\nabla(|u|^2u),\Delta^2v)+\beta\mathrm{Re}((\lambda_2\cdot\nabla u)|u|^2,\Delta^2u)\leqslant$$
$$\frac{1}{4}\|\nabla\Delta u\|^2+c(\alpha,\beta,\lambda_1,\lambda_2)\|u\|_8^{20}.$$

$\|u\|_8^8$ 的有界性容易从式(36)得到.

综合上面不等式,可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\|\Delta v\|^2}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{2}\|\Delta\nabla v\|^2\leqslant\rho\|\Delta v\|^2+C.$$

在任意区间 $[s,0]$ 上积分,得到

$$\|\Delta v(0)\|^2\leqslant(\|\Delta v(s)\|^2)-Cs+2\rho\int_s^0\|\Delta v(\sigma)\|\mathrm{d}\sigma.$$

关于 s 在区间 $[-1,0]$ 上积分,得到

$$\|\Delta v(0)\|^2\leqslant\int_{-1}^0(\|\Delta v(s)\|^2)\mathrm{d}s+C+2\rho\int_{-1}^0\|\Delta v(\sigma)\|\mathrm{d}\sigma.$$

$\int_{-1}^0\|\Delta v(\sigma)\|\mathrm{d}\sigma$ 的有界性从(35)易得出. 因此,存在随机半径 $r_3^2(\omega)$ 使得

$$\|\Delta v(0,\omega;t_0,u_0-z(t_0,\omega))\|^2\leqslant r_3^2(\omega).$$

综合引理 1~4,得到结论.

定理 2　带附加噪声的随机广义 2D Ginzburg-Landau 方程的随机流 $(S(t,s;\omega))_{t\geqslant s,\omega\in\Omega}$,在定理 1 意义下存在紧的吸引子.

[参 考 文 献]

[1] Doering C, Gibbon J D, holm D, et al. Low-dimensional behavior in the complex Ginzburg-Landau equation[J]. Nonlinearity, 1988, **1**(2): 279-309.

[2] Ghidaglia J-M, H ron B. Dimension of the attractor associated to the Ginzburg-Landau equation[J]. Physica D, 1987, **28**(3): 282-304.

[3] Bartuccelli M, Constantin P, Doering C, et al. On the possibility of soft and hard turbulence in the complex Ginzburg-Landau equation[J]. Physica D, 1990, **44**(3): 421-444.

[4] Doering C R, Gibbon J D, Levermore C D. Weak and strong solutions of the complex Ginzburg-Landau equation[J]. Physica D, 1994, **71**(3): 285-318.

[5] Levermore C D, Oliver M. The Complex Ginzburg-Landau Equation as a Model Problem [M]. Lee-

tures in Applied Mathematics. Providence: American Mathematical Society, 1997.
[6] Batuccelli M, Gibbon J D, Oliver M. Lengths scales in solutions of the complex Ginzburg-Landau equation[J]. Physica D, 1996, **89**(3): 267-286.
[7] LI Dong-long, GUO Bo-ling. On Cauchy problem for generalized complex Ginzburg-Landau equation in three dimensions[J]. Progress in Natural Science, 2003, **13**(9): 658-665.
[8] LI Dong-long, DAI Zheng-de. Long time behavior of solution for generalized Ginzburg-Landau equation [J]. Math Anal Appl, 2007, **330**(2): 934-948.
[9] Guo B, Wang X. Finite dimensional behavior for the derivative Ginzburg-Landau equation in two spatial dimensions[J]. Physica D, 1995, **89**(1): 83-99.
[10] Crauel H, Flandoli F. Attractors for random dynamical systems[J]. Probability Theory and Related Fields, 1994, **100**(3): 365-393.
[11] Crauel H, Debussche A, Flandoli F. Random attractors[J]. J Dynam Differential Equations, 1997, **9**(2): 307-341.
[12] Arnold L. Random Dynamical Systems[M]. New York: Springer, 1998.
[13] Prato G Da, Zabezyk J. Stochastic Equations in Infinite Dimensions, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
[14] Henry D. Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equation[M]. Berlin: Spring-Verlag, 1981.

Asymptotic Behavior of the 2D Generalized Stochastic Ginzburg-Landau Equation With Additive Noise

LI Dong-long[1], GUO Bo-ling[2]
(1. Department of Information and Computing Science,
Guangxi University of Technology, Liuzhou, Guangxi 545006, P.R. China;
2. Institute of Applied Physics and Computational Mathematics,
Beijing 100081, P.R. China)

Abstract: The 2D generalized stochastic Ginzburg-Landau equation with additive noise is considered. The compactness of the random dynamical system was established by a priori estimates method, which shows that the random dynamical system possesses a random attractor in H_0^1.

Key words: 2D generalized stochastic Ginzburg-Landau equation; random dynamical system; random attractor