文章编号: 1000-0887(2009) 08-0919-08


# 从毛发纤维中抽象出的分形几何与拓扑*

殷雅俊[1,2], 杨 帆[1], 李 颖[1], 范钦珊[2]

(1. 清华大学 航天航空学院 工程力学系, 北京 100084;
2. 南京工业大学 力学部, 南京 211816)

(郑泉水推荐)

摘要: 以羊毛纤维和人类头发为原型, 以超级分形纤维概念为基础, 抽象出了(3) 分圆和(9+ 2) 分圆分形集, 构造了(3, 9+ 2) 分圆和(9+ 2, 3) 分圆双重分形集. 针对(9+ 2) 拓扑花样, 证明了这样的命题: (9+ 2) 拓扑花样精确地存在, 但不唯一, 其总个数为 9, 其中有 2 种同素异构体, 即 9 种拓扑花样中, 只有 2 种是独立(或基本) 的. 另外证实了(3, 9+ 2) 或(9+ 2, 3) 分圆分形花样是一个对称性破缺的黄金分形.

关 键 词: 毛发纤维; (9+ 2) 拓扑; 对称性破缺; 双重分形集; 分形几何
中图分类号: Q811.6; O184 文献标识码: A
DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2009.08.004

## 引 言

近期, 我们在超级分形纤维[1-4]的研究中取得了进展. 超级分形纤维, 是横截面为严格自相似分形图案的纤维, 与其对应的分形集, 称为超级分形集[3]. 超级分形纤维虽然种类繁多, 但它们都是单重分形结构. 然而, 生物体中的纤维都是多重结构, 当其满足一定的自相似性时, 就构成多重分形结构. 因此, 有必要以生物纤维为参照, 将单重分形纤维扩展成多重分形纤维. 这构成了本文的研究动机.

论文包括 4 部分: 首先, 以羊毛纤维和人类头发为原型, 抽象出(3) 分圆超级分形纤维和(9+ 2) 分圆超级分形纤维; 其次, 基于(3) 分圆和(9+ 2) 分圆超级分形纤维, 构造出(3, 9+ 2) 和(9+ 2, 3) 分圆两种双重分形集; 再者, 证明了双重分形集中(9+ 2) 拓扑花样的存在性和非唯一性; 最后, 揭示了(3, 9+ 2) 和(9+ 2, 3) 分圆双重分形集的"黄金属性", 指出了这两种双重分形集源自(9+ 2) 拓扑花样的破缺的对称性.

## 1 从毛发抽象出的分形集和双重分形集

动物毛发中, 羊毛[5-6]和人类头发备受关注. 羊毛纤维(图 1) 和人类头发(图 2) 都是典型的多级结构, 二者最小的组元都是角蛋白, 其长链是典型的右手 α 螺旋. 从微观的角蛋白分

* 收稿日期: 2009-05-14; 修订日期: 2009-06-29
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10572076; 10872114); 江苏省自然科学基金资助项目(BK2008370)
作者简介: 殷雅俊(1964—), 男, 河南人, 教授, 博士, 博士生导师(联系人. Tel: + 86-10-62795536; E-mail: yinyj@tsinghua.edu.cn).

子到宏观的毛发纤维, 一般有 6 级结构:

①α 螺旋角蛋白 → ②3 股 α 螺旋向左缠绕成 1 根原纤维 → ③11 根原纤维排列成电缆式"9+ 2"型微纤维 → ④微纤维结合成大纤维 → ⑤大纤维组装成纤状细胞 → ⑥纤状细胞组合成毛发纤维.

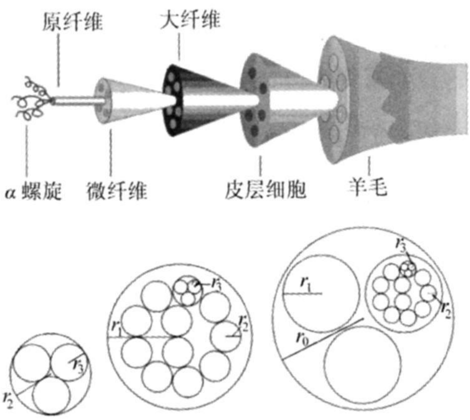



图 1 羊毛纤维的多级结构[5-6]


图 2 人类头发的多级结构

不仅羊毛纤维和人类头发的多级结构很相似, 动物的毛发, 在多级结构的组织方式上, 都有相似之处. 这种广泛存在的相似性, 为我们提炼出具有普适意义的几何结构, 提供了参考.

原纤维(图 1、2 中的第②级结构) 普遍存在于动物的毛发中, 其横截面就是 3 条 α 螺旋的横截面. 如果每条 α 螺旋的横截面都被理想化为圆形, 圆形半径就是相邻两条 α 螺旋的相互作用半径, 则得到(3) 分圆几何构图(即图 3(a) 中的第一级结构). 如果以图 3(a) 为基础, 以自相似的方式构造无穷多级结构, 则生成(3) 分圆超级分形集, (即(3) 分圆超级分形纤维的横截面[3]).

微纤维(图 1、2 中的第③级结构) 也普遍存在于动物的毛发中, 其横截面是"9+ 2"几何图案. 类似地, 我们先将其理想化为(9+ 2) 分圆(即图 4(a) 中的第一级结构), 然后按照自相似规则无限推广, 构造出无穷多级的(9+ 2) 分圆超级分形集(图 4). 当然, 我们也可以将图 4 视为(9+ 2) 分圆超级分形纤维的横截面.

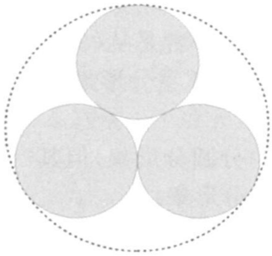
基于图 3 和图 4, 我们可以继续抽象和扩展: 将(3) 分圆分形集和(9+ 2) 分圆分形集交错混合排列, 生成"复合纤维". 由于交错混合的起始方式有两种, 故复合纤维也有两种. 第一种复合纤维以(3) 分圆为起始构型, 尺度从大到小, 排列成如下花样序列(图 5):

(3) ←(9+ 2) ←(3) ←(9+ 2) …

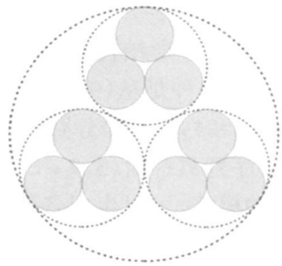
其含义是, (3) 分圆纤维, 是由较细的(9+ 2) 分圆纤维构成, 而较细的(9+ 2) 分圆纤维, 又是由更细的(3) 分圆纤维组成. 按照这样的模式无限循环, 就得图 5 中的无穷级复合纤维.

类似地, 第二种复合纤维以(9+ 2) 分圆为起始构型, 尺度从大到小, 排列成如下的花样序列(图 6):

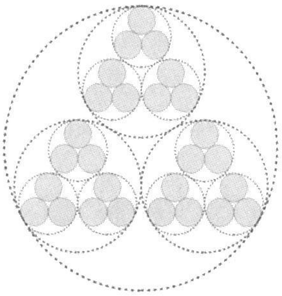
(9+ 2) ←(3) ←(9+ 2) ←(3) …



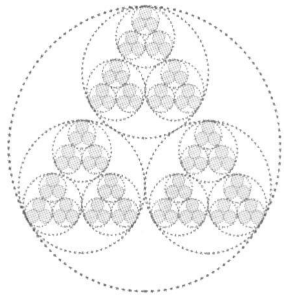
(a) 第一级结构



(b) 第二级结构

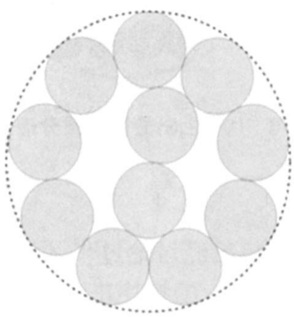


(c) 第三级结构

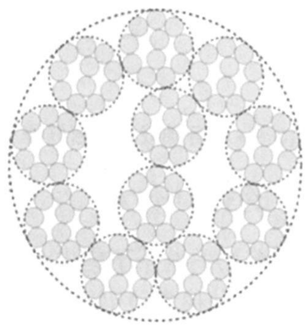


(d) 第四级结构

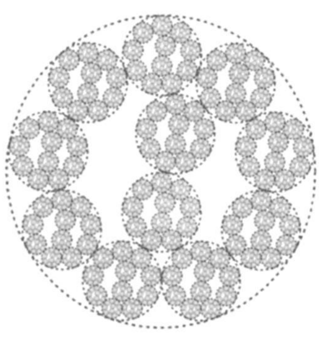
图 3　(3)分圆超级分形纤维[3]



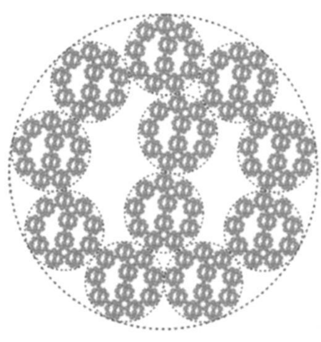
(a) 第一级结构



(b) 第二级结构



(c) 第三级结构



(d) 第四级结构

图 4　(9+ 2) 分圆超级分形纤维

其含义是, (9+ 2) 分圆纤维, 是由较细的(3) 分圆纤维构成, 而较细的(3) 分圆纤维, 又是由更细的(9+ 2) 分圆纤维组成. 按照这样的模式无限循环, 就得到图 6 中的无穷级复合纤维.

两种复合纤维都是分形结构．由于包含了(3)分圆和(9+2)分圆两个单重的分形子集，故两种复合纤维都是双重分形结构，对应了两种双重分形集：一种是从(3)分圆起始的(3, 9+2)双重分形集(图5)，另一种是从(9+2)分圆起始的(9+2, 3)双重分形集(图6)．或者说，我们得到了(3, 9+2)分圆和(9+2, 3)分圆两种双重分形纤维．

尽管上述花样序列只针对(3, 9+2)分圆和(9+2, 3)分圆分形集，但其"构造模式"却具有普遍意义：用类似的模式，可以生成各种各样的圆形双重分形集．

对于分形空间外部的观察者而言，他从两种双重分形集中看到的构象是完全不同的，或者说，他看到的两种双重分形集是完全"异构"的；然而，对于分形空间内部的观察者而言，他从两种双重分形集中看到的构象是完全一样的，或者说，他看到的两种双重分形集是完全"同构"的．这种"相对性"，在所有以上述模式构造的双重分形集中普遍存在．

双重分形纤维虽然是从毛发纤维中抽象出来的产物，但并不代表真实的毛发纤维；另一方面，它们尽管不是生物学的实在，但在分形几何和拓扑学上，却都是真实的．

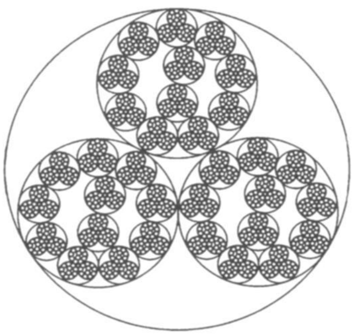


图5 (3, 9+2)分圆双重分形纤维

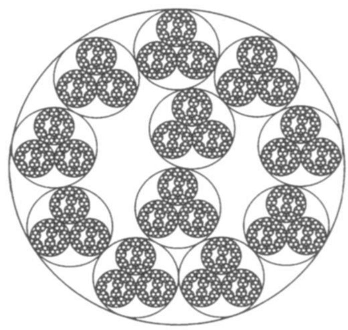


图6 (9+2, 3)分圆双重分形纤维

## 2 (9+2)花样的拓扑分析

双重分形集(图5、6)的两个子集中，(3)分圆分形集已经讨论过[3]，但(9+2)分圆分形集从未见诸于文献．这个分形集最引人注目的地方，是其(9+2)拓扑花样，但(9+2)拓扑花样存在吗？图4～图6毕竟只是几何作图的产物，其直观性虽然有助于我们思考，但不能代替证明．换言之，(9+2)拓扑花样的存在性，需要给出精确的论证．

为达成这一目标，我们将存在性问题等价地转换成一个游戏问题：设想有11个弹子小球，其中的9个小球置于水平桌面上，两两相切，连接成封闭圆环．余下的2个小球投入环内，问题是，这2个小球能够"刚好"嵌入环内吗？如果答案是肯定的，则(9+2)拓扑花样的存在性得证．

为便于求证，我们再把游戏问题等价地抽象成一个几何证明问题：连接9个成环小球的球心(图7(a))，得正九边形 $ABCDEFGHI$．分别以点 $A$, $B$ 和 $E$, $F$ 为顶点，向正九边形内部作两个正三角形 $ABJ$ 和 $EFK$，然后连接点 $J$, $K$ (图7(b))．$JK$ 平行于 $CD$ 吗？$JK$ 等于 $CD$ 吗？如果答案是肯定的，则(9+2)拓扑花样的存在性得证．

具体求证如下．正九边形的9个内角之和为1 260°，每个内角均为1 260°/9=140°．由于

$$\angle ABC = \angle DEF = 140°,\quad \angle ABJ = \angle FEK = 60°,$$

则必有

$$\angle CBJ = \angle DEK = 80°.$$

设正九边形的边长为 $2a$, 则有

$$BJ = BC = EK = ED = 2a.$$

于是, 连接 $JC$, $KD$ (图 7(c)), 则必有

$$\triangle BJC \cong \triangle EDK, \ \angle BCJ = \angle EKD = 50°, \ \angle JCD = \angle KDC = 90°.$$

故有

$$JC \parallel KD, \ JC = KD,$$

亦即 $KDCJ$ 是矩形, 于是有

$$JK \parallel CD, \ JK = CD = 2a.$$

以图 7(b) 中的每个顶点为圆心, 以 $a$ 为半径做圆, 可得图 7(d). 于是可知, (9+ 2) 拓扑花样的确存在.

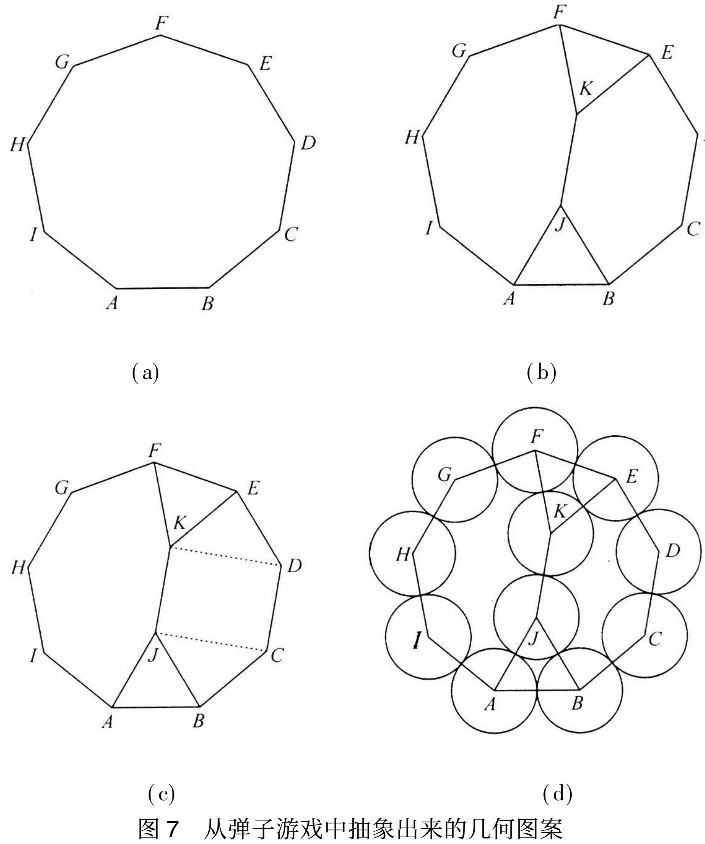



图 7 从弹子游戏中抽象出来的几何图案

解决了存在性问题, 还有唯一性问题: (9+ 2) 拓扑花样唯一吗? 为回答这个问题, 我们稍微调整一下游戏规则: 成环的 9 个球 $A$ ~ $I$ 和第 10 个球 $J$ 均保持不动(图 7(d)), 于是, 最后一个球"恰好"嵌入环内时, 球心的位置就有两个选择: 点 $K$ 和 $L$ (图 8 中的虚线). 换言之, (9+ 2) 拓扑花样的解不具有唯一性, 对于固定的球 $J$, 有两个解.

既然(9+ 2) 拓扑花样非唯一, 那么它们总共有几种? 由于正九边形具有 9 根对称轴(图 8), 因而球 $J$ 在环内可以取 9 个不同的位置, 于是最后一个球 $K$ 可能嵌入的位置个数为 $9 \times 2 = 18$. 注意到, 球 $J$ 与球 $K$ 互换并不改变拓扑, 故(9+ 2) 拓扑花样的总个数为 $18 \div 2 = 9$.

9 种拓扑花样中, 独立的有几种? 由上述分析可知, 独立拓扑花样只有图 8 所示的 2 种, 其它拓扑花样都可以通过旋转图 8 而得到. 我们将 2 种独立拓扑花样称为基本拓扑花样. 为

了恰如其分地描述这两种基本拓扑花样,我们引进一个名词——同素异构体.有机化学中的同素异构体,表示同样的元素却生成了不同结构的有机大分子;本文中的同素异构体,表示同样的元素却生成了不同的几何拓扑结构.可以说,两种基本(9+2)拓扑花样,对应了两种同素异构体.

(9+2)拓扑花样及其同素异构体,揭示出正九边形拓扑镶嵌性质.在边长为 $2a$ 的正九边形 $ABCDEFGHI$ 内(图7(b)),$ABJ$ 和 $EFK$ 是边长为 $2a$ 的两个正三角形,$BCDEKJ$ 是边长为 $2a$ 的等边六边形,而 $FGHIAJK$ 是边长为 $2a$ 的等边七边形.于是,我们归纳出拓扑镶嵌性质:边长为 $2a$ 的正九边形,可以用边长为 $2a$ 的两个三角形、一个六边形和一个七边形覆盖.

正如(9+2)拓扑花样不具有唯一性一样,正九边形拓扑镶嵌的方式也不具有唯一性:从图8(a)看出,$FLG$ 是边长为 $2a$ 的正三角形,$FKJL$ 是边长为 $2a$ 的菱形,$GLJAIH$ 是边长为 $2a$ 的等边六边形.于是,我们进一步归纳出拓扑镶嵌性质:边长为 $2a$ 的正九边形,可以用边长为 $2a$ 的3个正三角形、1个菱形和2个六边形覆盖.

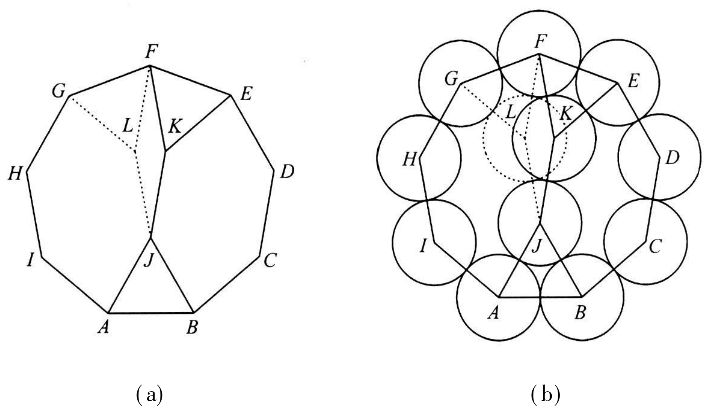



图8 独立的(9+2)拓扑花样

## 3 对称性破缺的分形花样

两种基本(9+2)拓扑花样(同素异构体),对应了两种对称性破缺.由图8和图9看出,$FJ$ 是正九边形的对称轴.由前面的分析可知,一旦点 $J$ 落在对称轴上,则点 $K$ 只能落在对称轴的右侧,点 $L$ 只能落在对称轴的左侧.点 $K$ 或点 $L$ 偏离对称轴,就意味着打破了对称性,物理学中称之为对称性破缺.我们将点 $L$ 称为左侧破缺点,点 $K$ 称为右侧破缺点.于是,两种基本拓扑花样(同素异构体),对应了左、右两种形式的对称性破缺.

(9+2)拓扑花样的对称性破缺,使得包含该花样的任何分形集,都产生了对称性破缺.理由如下:分形结构的自相似性,决定了分形花样拓扑传递的不变性,即低级结构的拓扑信息,能够不变地被传递到高级结构.于是,在(9+2)分圆、(3,9+2)分圆和(9+2,3)分圆分形集中,对称性破缺的拓扑信息,都被不变地逐级传递下去.

我们前期构造的超级分形纤维[1-4]都是对称的.实际上,经典分形几何中的规则分形集大都具有很好的对称性.相较而言,像(9+2)、(3,9+2)和(9+2,3)这样对称性破缺的分形花样,文献中难以见到.但这并不降低它们的研究价值,因为对称性破缺毕竟是自然界(包括生物纤维)中普遍的客观实在.

## 4　从黄金分形到优化性质

(3, 9+ 2) 分圆和(9+ 2, 3) 分圆分形纤维(图 5 和图 6) 具有“黄金属性”．其具体含义如下．近期, 李颖和殷雅俊在研究双重分形纤维的力学性质时, 导出了双重分形集分形维数的表达式:

$$D_s = \frac{\ln(nn)}{\ln(1/(r_s r_s))}.$$

在(3) 分圆分形子集(图3) 中, 子结构个数 $n$ 和自相似比 $r_s$ 分别为

$$n = 3,\quad r_s = \frac{1}{1 + 2/\sqrt{3}}.$$

在(9+ 2) 分圆分形子集中(图 4), 子结构个数 $n$ 为

$$n = 11.$$

我们对其自相似比 $r_s$ 分析如下．从精确的(9+ 2) 拓扑花样, 可以得到边长为 $2a$ 的正九边形外接圆的半径 $r$:

$$r = \frac{a}{\sin 20°}.$$

进一步可以求得(9+ 2) 分圆的外切圆(图 9) 半径 $R$:

$$R = a + r = a\left(1 + \frac{1}{\sin 20°}\right).$$

于是图4 中(9+ 2) 分圆分形花样的自相似比 $r_s$ 为

$$r_s = \frac{a}{R} = \frac{1}{1 + 1/\sin 20°}.$$

进而求得(3, 9+ 2) 或(9+ 2, 3) 分圆分形集的分形维数 $D_s$:

$$D_s = \frac{\ln(11 \times 3)}{\ln(1/(r_s r_s))} \approx 1.637\ 9.$$

注意到, 黄金数为 $\Phi = 1.618$, 故有 $D_s \approx \Phi$, 即(3, 9+ 2) 或(9+ 2, 3) 分圆分形集的分形维数约等于黄金数．我们把这样的分形, 称为黄金分形．

He 等人证实[5-6], 羊毛纤维(图 1) 之所以具有优化的传热性能, 是因为其分形维数接近黄金数; 数学中, 黄金数一般与某种优化性质关联．这意味着: (3, 9+ 2) 分圆或(9+ 2, 3) 分圆分形纤维力学性质的优化, 就成为值得研究的课题．我们将会在后续的论文中仔细探讨．

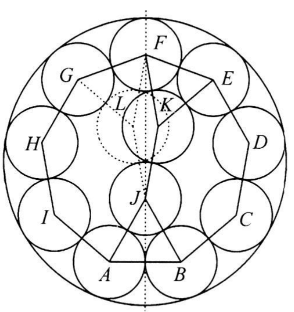



图 9　(9+ 2) 花样的外接圆

## 5　结　　论

本文从毛发纤维中抽象出了(3) 分圆和(9+ 2) 分圆几何花样, 并用几何的方法, 证明了(9+ 2) 分圆拓扑花样的精确性．研究表明: (9+ 2) 分圆是一个对称性破缺的几何结构; (9+ 2) 分圆分形集是一个对称性破缺的分形结构; 而(3, 9+ 2) 分圆和(9+ 2, 3) 分圆双重分形集不仅是对称性破缺的双重分形结构, 而且具有黄金属性．这些结果, 为进一步研究毛发纤维结构与功能之间的关系, 提供了参考．

## [参 考 文 献]

[1] YIN Ya-jun, ZHANG Tong, YANG Fan, et al. Geometric conditions for fractal super carbon nanotubes with strict self-similarities[J]. Chaos, Solitons &Fractals, 2008, **37**(5): 1257-1266.

[2] YIN Ya-jun, YANG Fan, ZHANG Tong, et al. Growth condition and growth limit for fractal super fibers and fractal super tubes[J]. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulations, 2008, **9**(1): 96-102.

[3] YIN Ya-jun, YANG Fan, FAN Qin-shan, et al. Cell elements, growth modes and topology evolutions of fractal supper fibers[J]. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 2009, **10**(1): 1-12.

[4] YIN Ya-jun, YANG Fan, FAN Qin-shan. Isologous fractal super fibers or fractal super lattices[J]. International Journal of Electrospun Nanofibers and Applications, 2008, **2**(3): 193-201.

[5] FAN Jie, LIU Jun-fang, HE Ji-huan. Hierarchy of wool fibers and fractal dimensions[J]. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 2008, **9**(3): 293-296.

[6] HE Ji-huan, REN Zhong-fu, FAN Jie, et al. Hierarchy of wool fibers and its interpretation using E-infinity theory[J]. Chaos, Solitons &Fractals, 2009, **41**(4): 1839-1841.

# Fractal Geometry and Topology Abstracted From Hair Fibers

YIN Ya-jun[1,2], YANG Fan[1], LI Ying[1], FAN Qin-shan[2]

(1. Department of Engineering Mechanics, School of Aerospace, AML, Tsinghua University, Beijing 100084, P. R. China;

2. Division of Mechanics, Nanjing University of Technology, Nanjing 211816, P. R. China)

**Abstract:** Based on the concepts of fractal super fibers, the (3, 9+2)-circle and (9+2, 3)-circle binary fractal sets were abstracted from such prototypes as wool fibers and human hairs, with the (3)-circle and the (9+2)-circle fractal sets as subsets. As far as the (9+2) topological patterns are concerned, the following propositions were proved: The (9+2) topological patterns accurately exist, but they are of no uniqueness. Their total number is 9. Among them there are only 2 allotropes. In another word, among the 9 topological patterns only 2 are independent (or fundamental). Besides, it was demonstrated that the (3, 9+2)-circle and (9+2, 3)-circle fractal sets are golden ones with symmetry breaking.

**Key words:** hair fibers; (9+2) topological patterns; symmetry breaking; binary fractal sets; fractal geometry