

Maxwell 方程反演的小波多尺度方法^{*}

丁亮, 韩波, 刘家琦

(哈尔滨工业大学 理学院 数学系, 哈尔滨 150001)

(马兴瑞推荐)

摘要: 研究 Maxwell 方程电导率的识别问题. 主要的难点是目标函数中存在一些局部极小值. 将小波多尺度方法应用到 Maxwell 方程反演过程, 通过小波变换, 反问题被分解到多个尺度上, 于是原反问题可以在子一级的尺度上, 由大尺度到小尺度逐级求解. 在每个尺度上我们采用稳定、快速的 Gauss-Newton 迭代法. 数值算例的结果显示了这种方法大范围收敛、计算效率高、结果准确, 是一种可行的计算方法.

关键词: Maxwell 方程; 小波多尺度方法; 反演; 正则 Gauss-Newton 方法; 时域有限差分(FDTD)方法

中图分类号: O157.2; O357 **文献标识码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2009.08.010

引 言

Maxwell 方程反演已经在油、气勘探方面显出巨大的潜力. 在探矿、地热勘探和一般的地质测绘上也有重要应用. 由于要设计长期使用的废物排放点, 为了确定地下的废物坑, 三维反演已经成功地探测到地下的金属物, 以便于设计排放路径^[1-2]. 现在已经有很多方法被应用到 Maxwell 方程反问题^[3-6]. 尽管获得了一些成功, 但反演问题仍然是一个艰巨的复杂的问题, 它需要大量的时间和计算资源^[7-8], 所以限制了它的应用. 在大多数情况下这种问题可以通过 Newton 迭代法求解. 但是这种方法的主要困难在于目标函数中存在很多局部极小值, 这些局部极小值阻碍了 Newton 法收敛到一个理想的全局最优解. 最近, 随着小波理论的发展, 一些小波方法已经应用到了反问题中^[9-12]. 这些应用给出了我们新的思路, 即采用小波多尺度方法求解 Maxwell 方程反问题.

目前, 小波已经被认识到是一个有力的数学工具. 过去的几十年见证了小波理论及多分辨分析^[13]的快速发展. 在一些文章当中已经给出了小波 Kalerkin 方法及其他的一些经典方法^[14]. 另外, 有限元和多尺度网格方法的发展也用到了小波的知识. 最近, 多尺度方法已经被应用到了参数识别问题. 实验显示通过尺度分解, 迭代法可以得到更加满意的结果. 所有

* 收稿日期: 2008-12-27; 修订日期: 2009-06-29

作者简介: 丁亮(1979—), 男, 黑龙江泰来人, 博士生(Tel: + 86 451-82113465; E-mail: iamashen@yahoo.com.cn);

韩波, 教授, 博士(联系人, E-mail: bohan@hit.edu.cn).

的这些工作证实了小波方法应用到反问题是合理的,有效的.

在本文中,我们从数值的角度研究小波分解方法,其中未知的电导率及波场函数由小波基表示.设计了一种小波多尺度优化方法求解参数识别问题.一旦反问题通过小波变换分解到多个尺度上,则从大尺度到小尺度我们逐级求解每个尺度上的子反问题.在最大尺度上目标函数变化平缓,因此正则 Gauss-Newton 方法能够很容易地求得这个尺度上的全局最优解.最大尺度上的最优解应该临近于次一级尺度上的最优解.因此,以最大尺度上的最优解为下一次迭代的初始值则能够较容易地求得次一级尺度的最优解,然后依次类推直至原始反问题的最优解.这种方法具有稳定性(收敛性不依赖于初值)和高效率(几次迭代即可得到满意的精度).这种方法使得我们可以处理全局优化问题.

本文的结构如下,第1节描述了正演模型和 FDTD 方法.第2节介绍了传统的反演方法.第3节讨论了小波及多分辨分析.第4节给出了小波多尺度方法.数值算例及总结分别在第5、6节给出.

1 正演模型和 FDTD(时域有限差分)方法

给出二维空间的 Maxwell TM 方程

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} - \frac{\partial H_x}{\partial z} + \frac{\partial H_z}{\partial x} + \sigma E_y = -j_y, \\ \mu \frac{\partial H_x}{\partial t} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0, \quad \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial x} = 0; \end{cases} \quad (1)$$

初始条件

$$\mathbf{E}|_{t=0} = \mathbf{H}|_{t=0} = \mathbf{0}; \quad (2)$$

吸收边界条件

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z \partial t} - \sqrt{\varepsilon \mu} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon \mu}} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} - \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (z = l), \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x \partial t} - \sqrt{\varepsilon \mu} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon \mu}} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} - \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (x = 0), \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x \partial t} + \sqrt{\varepsilon \mu} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon \mu}} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} + \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (x = h); \quad (5)$$

附加条件是

$$\mathbf{E}(x, 0, t) = \mathbf{f}(x, t); \quad (6)$$

其中 $\mathbf{f}(x, t)$ 是观测数据, $\sigma(x, y)$ 是电导率, $\varepsilon(x, y)$ 是介电常数, $\mu(x, y)$ 是磁导率.此外,我们取 $\varepsilon(x, y)$ 和 $\mu(x, y)$ 为常值. $\mathbf{E}(x, y, t)$ 和 $\mathbf{H}(x, y, t)$ 分别为电场和磁场.符号 E_x 定义为 x 方向的电场.如果已知 $\sigma(x, y)$, $\varepsilon(x, y)$, $\mu(x, y)$, 正问题就是求 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} . 当观测数据和 $\varepsilon(x, y)$, $\mu(x, y)$ 已知时,反问题就是重构电导率 $\sigma(x, y)$. 我们通过 Yee 网格^[15]将方程(1)离散为如下形式:

$$E_y^{k+1}(i, j) = \frac{2\varepsilon(i, j) - \sigma(i, j)\tau}{2\varepsilon(i, j) + \sigma(i, j)\tau} E_y^k(i, j) + \frac{2\tau}{2\varepsilon(i, j) + \sigma(i, j)\tau} \times \left[\frac{H_x^{k+1/2}(i, j - 1/2) - H_x^{k-1/2}(i, j - 1/2)}{l_z} - \right]$$

$$\frac{H_z^{k+1/2}(i+1/2, j) - H_z^{k-1/2}(i-1/2, j)}{h_x}, \quad (7)$$

$$H_x^{k+1/2} \left\{ i, j + \frac{1}{2} \right\} = H_x^{k-1/2} \left\{ i, j + \frac{1}{2} \right\} + \frac{\tau}{\mu(i, j) l_z} [E_y^k(i, j+1) - E_y^k(i, j)], \quad (8)$$

$$H_z^{k+1/2} \left\{ i + \frac{1}{2}, j \right\} = H_z^{k-1/2} \left\{ i + \frac{1}{2}, j \right\} + \frac{\tau}{\mu(i, j) h_x} [E_y^k(i+1, j) - E_y^k(i, j)]; \quad (9)$$

初始条件

$$\mathbf{E}|_{t<0} = \mathbf{H}|_{t<0} = \mathbf{0}; \quad (10)$$

附加条件离散后为

$$E_{i,0}^k = f_i^k; \quad (11)$$

其中 h_x, l_z 分别为 x 和 z 方向上的步长, τ 为时间的步长, m 是 x 方向的网格数, n 是 y 方向的网格数, p 是时间 t 的网格数. 我们定义空间的网格点:

$$(i, j) = (ih_x, jl_z), \quad (12)$$

对于时间、空间上的函数, 定义

$$E(ih_x, jl_z, k\tau) = E^k(i, j). \quad (13)$$

2 传统的反演方法

反演时域电磁场数据的主要困难在于问题的规模及计算量大. 为了具体说明, 我们假设正演算子的形式为

$$\mathbf{A}(m)\mathbf{u} - \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad (14)$$

其中 $\mathbf{A}(m)$ 表示 Maxwell 方程 (包含边界条件), $m = \lg(\sigma)$ 是电导率对数, \mathbf{u} 表示电场并且 \mathbf{b} 表示源和边界值. 假设对于任意的 m , \mathbf{A} 是可逆的, 则正问题有唯一解.

在反问题中我们希望通过测得的电场数据重构模型 m . 给出观测数据

$$\mathbf{d}^{\text{obs}} = \mathbf{Q}\mathbf{u} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (15)$$

其中 \mathbf{Q} 是测量算子将计算的得到的场投影到观测点, $\boldsymbol{\varepsilon}$ 是噪声. 数据是有限的, 并包含噪声, 因此解并不是唯一的. 为了获得依赖于观测数据的唯一解, 结合先验信息, 我们将反问题改写成约束的优化问题

$$\min_{m, \mathbf{u}} \frac{1}{2} \|\mathbf{Q}\mathbf{u} - \mathbf{d}^{\text{obs}}\|^2 + \beta R(m), \quad (16)$$

满足

$$\mathbf{A}(m)\mathbf{u} - \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad (17)$$

其中, $\beta > 0$ 是正则化参数, $R(\cdot)$ 是正则化算子, 包含先验信息. 我们知道, 通常情况下 m 是分段光滑的函数, 所以我们认为 $R(\cdot)$ 应该与 $\dot{\cdot}m$ 有关^[16,17]. 这种形式的正则化可以写成

$$R(m) = \int_{\Omega} \rho(|\dot{\cdot}m|) dx + \gamma \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (m - m_{\text{ref}})^2 dx, \quad (18)$$

其中 ρ 由 Huber 函数给出, m_{ref} 是参考模型, γ 是常数, 用来调整正则化函数中所包含两项的作用. 这种正则化项的选择确保了 Dirichlet 边界条件, 在远场区域也可获得数据, 保证了收敛性. 此外这种选择也能保证正则化项的 Hessian 矩阵可逆.

接下来, 用有限差分方法将问题(16)和(17)离散为有限维优化问题

$$\min_{m, \mathbf{u}} \frac{1}{2} \|\mathbf{Q}\mathbf{u} - \mathbf{d}^{\text{obs}}\|^2 + \beta R(m), \quad (19)$$

满足

$$A(m)u - b = \mathbf{0}, \quad (20)$$

其中 u , m 和 b 是向量形式的网格函数. Q 和 A 是大的稀疏矩阵. 矩阵 A 依赖于 m , 是非奇异的.

本文的目的是处理大规模的问题. 对于这样的问题, 我们不可能存储所有的波场数据. 因此, 必须寻找其他的方法解决此类问题. 一个简单的途径是通过减小空间的方法减少计算量, 去求解 Maxwell 方程的非约束优化问题

$$\min_m \frac{1}{2} \|QA(m)^{-1}b - d^{\text{obs}}\|^2 + \beta R(m). \quad (21)$$

由此可以得到 Euler-Lagrange 方程

$$g(m) = J(m)^T(QA(m)^{-1}b - d^{\text{obs}}) + \beta R_m(m) = 0, \quad (22)$$

其中

$$J(m) = -QA(m)^{-1}G(m), \quad (23)$$

$$G(m) = \frac{\partial[A(m)u]}{\partial m}, \quad (24)$$

$J(m)$ 是敏感度矩阵^[18], $R_m(m) = \partial R / \partial m$.

Newton 型方法在解方程(22)时有它自己的优势. 在本文中我们采用正则 Gauss-Newton 方法, 在每一步迭代中求解线性问题

$$(J(m)^T J(m) + \beta R_{mm})s = -g(m), \quad (25)$$

其中 s 是模型扰动. 我们通过共轭梯度(conjugate gradient, CG)法求解方程(25). 在每一步 CG 迭代当中需要解一个伴随问题. 即使采用比较理想的预处理过程, 想得到比较好的结果仍然需要几十步的 CG 迭代.

3 小波多分辨分析

定义 1 对于任意一个函数 $f(x) \in L^2(\mathbf{R})$, 它的连续小波变换定义如下:

$$W_f(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \phi_{a, b}(x) dx. \quad (26)$$

它的逆变换是

$$f(x) = C_{\phi}^{-1} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2}{1} W_f(a, b) \phi\left(\frac{a}{x-b}\right) da db. \quad (27)$$

定义 2 $L^2(\mathbf{R})$ 上的一个多分辨分析(multiresolution analysis, MRA)是一系列闭的子空间 $\{V_j, j \in \mathbf{Z}\}$, 满足

- 1) $V_j \subset V_{j+1}, \forall j \in \mathbf{Z}$;
- 2) $\bigcap_{j \in \mathbf{Z}} V_j = \{\mathbf{0}\}$;
- 3) $\overline{\left(\bigcap_{j \in \mathbf{Z}} V_j\right)} = L^2(\mathbf{R})$;
- 4) $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$;
- 5) 存在函数 $\phi \in V_0$ 使得 $\{\phi(x-n), n \in \mathbf{Z}\}$ 是 V_0 的一组正交基.

子空间 V_j 中的基函数 $\phi_k(x)$ 是由尺度函数 $\phi(x)$ 伸缩平移后得到, 子空间 W_j 中的基函数 $\psi_{jk}(x)$ 是由小波函数 $\psi(x)$ 伸缩平移后得到. 通过 MRA 的定义, 可以得出

$$V_J = V_{J-1} \oplus W_{J-1} = V_{J-2} \oplus W_{J-2} \oplus W_{J-1} = V_0 \oplus W_0 \oplus \dots \oplus W_{J-1}. \quad (28)$$

一个给定的函数可以由尺度函数和小波函数表示:

$$f = \sum_k c_{Jk} \phi_k(x) + \sum_k \sum_{j=0}^{J-1} d_{jk} \psi_{jk}(x). \quad (29)$$

当反问题由尺度 J 分解到尺度 $J-1$ 时, 空间 V_{J-1} 仅包含低频部分, 空间 V_{J-1} 中的解应该是原反问题的近似解, 它并不包含高频的部分, 它只是模型参数的一个局部趋势. 但是因为 V_J 中的子空间 W_{J-1} 包含高频部分, 虽然不能通过空间 V_{J-1} 获得高频部分, 但是我们可以通过在 V_J 空间上的反演得到. 类似地, 想要得到 V_J 空间上的高频部分可以通过 V_{J-1} 上的反演. 所以, 分辨率得到逐渐的提升.

4 小波多尺度方法

当电导率初始值与全局最优解比较接近时, 用于反演 Maxwell 方程的 Newton 型方法是一种快速的、稳定的方法. 但是当我们把这种方法应用到实际或模拟数据上的时候, 随着初值的选取远离真值, 或先验信息未知的情况下, Newton 型方法就会失效. 这是因为目标函数中的局部极小阻碍了收敛.

多尺度方法是基于尺度分解, 再通过每个尺度上合适的松弛算子(本文中的松弛算子是正则 Gauss-Newton 算子)求解. 这种方法有两个优点. 首先, 在大尺度上它能加速收敛并减少松弛算子的计算量. 因为在大尺度上目标函数显示出极强的凸性并且只含有极少的局部极小值. 其次, 大尺度上的解与稍小一级尺度上的解接近. 这使得此方法在寻找全局最优解时非常有效.

当目标泛函由小到大被分解到不同的尺度时, 在最大尺度上目标函数变化的较小. 所以正则 Gauss-Newton 方法能够很容易的找到这个尺度上的全局最优解. 而次一级尺度上的全局最优解临近于最大尺度上的全局最优解. 这样, 以最大尺度上的全局最优解为初始值, 通过正则 Gauss-Newton 法就很有可能找到次一级尺度上的全局最优解. 依次类推可以得到原始尺度上的全局最优解.

在本文中, 我们采用 Daubechies 4 小波将目标函数分解到每个尺度上. 其中, 源函数及电场函数通过小波变换分解到不同的尺度上. 于是原目标函数被分解成一系列不同尺度上的非线性优化问题. 在每个尺度上采用正则 Gauss-Newton 方法. 然后通过尺度由大到小的逐渐细化, 我们可以得到最终的全局最优解.

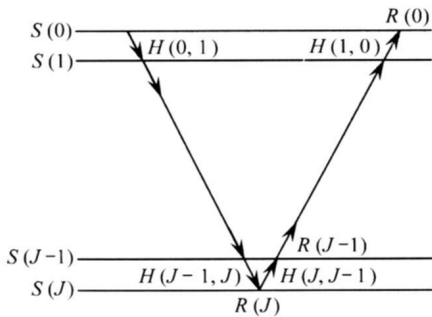


图 1 算子的描述

图 1 描述的是多尺度方法需要的 3 个元素. 第 1 个元素是 1 个算子, 它将原始反问题限定在不同的尺度上. 第 2 个元素是每个尺度上的松弛算子. 第 3 个元素是将大尺度上的解投影到次一级尺度上的算子. 在图 1 中, $S(0)$ 表示 0 尺度, 这个尺度上的问题为原始问题. 算子 $H(0, 1)$ 将原始问题从 $S(0)$ 投影到 $S(1)$ 叫限制算子, 它是小波分解算子

$$H(0, 1): S(0) \rightarrow S(1). \quad (30)$$

一旦问题被限制在尺度 $S(1)$ 上, 可以通过松弛算子(正

则 Gauss-Newton($R(1)$) 求解. 当我们得到了这个尺度上的解后, 这个解通过算子 $H(1, 0)$ 投影到尺度 $S(0)$ 上, 它是小波重构算子

$$H(1, 0): S(1) \rightarrow S(0). \quad (31)$$

算子流程总结如下:

- 第 1 步 对于 Maxwell 方程, 给出真实电导率模型、源函数、初始电导率和观测数据.
- 第 2 步 将源函数及电场函数分解到不同的尺度上(从 0 到 J).
- 第 3 步 按照给定的初始值执行正则 Gauss-Newton 法, 可以得到最大尺度上的最优解.
- 第 4 步 减小一级尺度, 以所得到的解为初始值重复步骤 3.
- 第 5 步 重复以上步骤直至求出原始反问题的最优解.

5 数值模拟

在这一节, 我们通过 3 个模型问题阐述多尺度方法的有效性. 这些问题通常会体现在地球物理的应用上.

算例 1 我们选择均一的介质模型, 其中介电常数 $\epsilon = 4.86 \times 10^8 \text{ F/m}$, 磁导率 $\mu = 2.73 \text{ H/m}$, 对数电导率 $m = \lg(\sigma) = 2.35$, 最大尺度是 5. 表 1 给出的是正则 Gauss-Newton 法反演的结果. 表 2 给出的是小波多尺度方法反演结果.

表 1 Gauss-Newton 法反演结果

序号	初始值	真值	解	CUP 计算时间 t/s	误差 $e/(\%)$
1	0.300 0	2.350 0	不收敛		
2	0.500 0	2.350 0	不收敛		
3	1.900 0	2.350 0	2.226 6	185	15.25
4	2.300 0	2.350 0	2.424 4	129	10.17
5	2.900 0	2.350 0	2.244 7	172	14.48
6	3.500 0	2.350 0	不收敛		
7	4.300 0	2.350 0	不收敛		

表 2 小波多尺度方法反演结果

序号	初始值	真值	解	CUP 计算时间 t/s	误差 $e/(\%)$
1	0.300 0	2.350 0	2.232 0	92	5.02
2	0.500 0	2.350 0	2.234 8	89	4.39
3	1.900 0	2.350 0	2.260 9	71	3.79
4	2.300 0	2.350 0	2.415 3	65	2.78
5	2.900 0	2.350 0	2.268 9	73	3.45
6	3.500 0	2.350 0	2.245 8	81	4.43
7	4.300 0	2.350 0	2.228 5	81	5.17

通过表 1 和表 2 的比较, 我们可以看到当初始值较差时(如同实验 1, 2, 6, 7), 采用 Gauss-Newton 法不收敛, 然而小波多尺度方法可以得到很好的收敛结果. 此外, 通过实验 3, 4 和 5, 我们发现小波多尺度方法比正则 Gauss-Newton 法更高效, 误差更小. 所以我们可以认为小波多尺度方法是一种大范围收敛、更准确、更有效的方法.

算例 2 在第 2 个实验中我们考虑在电导率为 10 的均匀介质中有 3 个不规则物体的模型. 不规则物体中的电导率分别是 -5 , -2 , 1 , 背景介质区域是 $30\text{ m} \times 30\text{ m}$. 源函数置于地表. 观测值取自井中. 所有的接收数据是 $6(\text{接收器}) \times 32(\text{时间}) \times 2(\text{井}) \times 3(\text{场}) = 1\ 152$. 我们将问题离散到 $30 \times 30 \times 32$ 的网格上. 离散后的电导率网格点数是 28 800 个. 真实的参数模型是图 2(a). 其他的参数与算例 1 中的一样. 在我们的实验中正问题通过双核处理器(双 3.00 GHz)计算, 大约耗时 5 min 左右. 一般的反问题大概需要 30 个左右的正演过程, 在我们的实验中用了 100 min 左右. 在每一个尺度上, Gauss-Newton 法大概需要 5 min 左右. 反演的结果显示在图 2(b)和图 2(c)中.

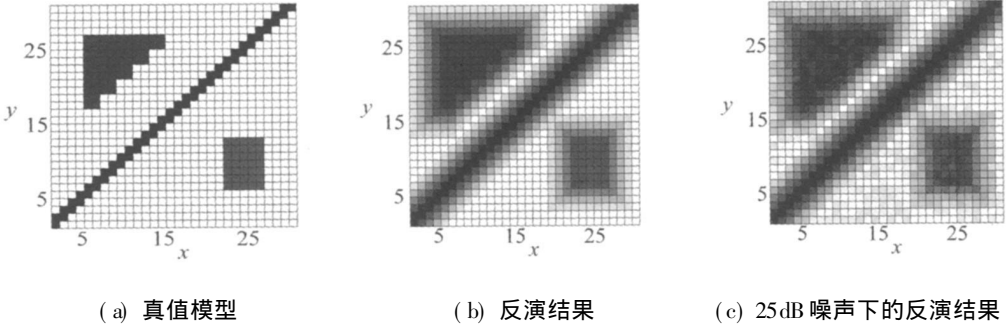


图 2 真值模型和反演结果

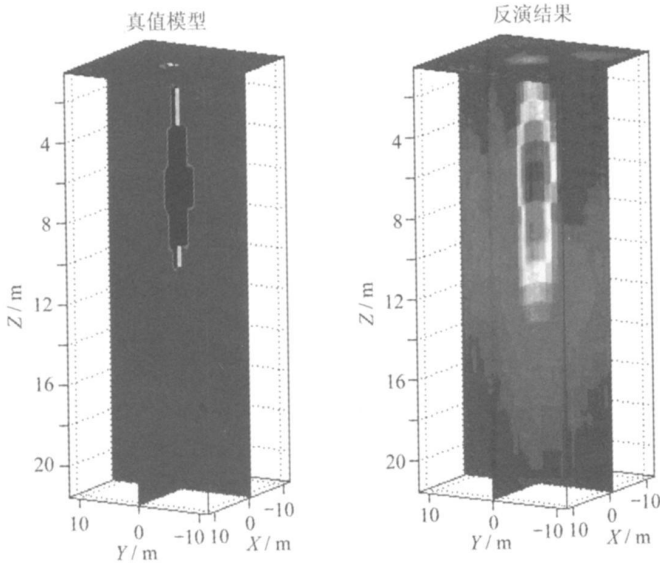


图 3 真值模型(左)和反演结果(右)

算例 3 在第 3 个算例中我们将小波多尺度方法用到了三维空间. 我们考虑电导率为 90 的均一介质中有一个电导率为 5 的不规则物体. 与前面的算例不同, 电导率的巨大差异使得反问题具有高度非线性. 所研究的区域是 $20\text{ m} \times 20\text{ m} \times 20\text{ m}$. 真实模型是图 3(左). 我们将问题离散到 $20 \times 20 \times 50 \times 32$ 的网格上. 电导率网格点是 640 000 个. 重构的数据是图 3(右). 数值结果表明尽管电导率对比度较高, 方法依然保持它的高效性和准确性.

6 结 论

通过以上的数值算例可以看出,本文所设计的多尺度方法已经成功地实现了Maxwell方程的反演.结果说明这种方法在减少计算量和消除局部极小方面是非常有效的.尤其图2(c)说明这种方法是稳定的.但是我们仍然有一个悬而未决的问题,那就是在小波多尺度方法中如何选择一个合适的最大尺度是非常重要的.如果选择的尺度过大,则这个尺度上所包含的真实解的信息就会非常少,收敛速度就会很慢,在某些情况下甚至得不到近似解.所以对于反问题来说多大的尺度合适,在参数与尺度的选择之间是否存在着某种必然的联系?我们将在以后进行研究.

[参 考 文 献]

- [1] Alumbaugh D L, Newman G A. 3D massively parallel electromagnetic inversion—part B: analysis of a cross well experiment[J]. *Geophys J Int*, 1997, **128**: 355-363.
- [2] Newman G A, Recher S, Tezkan B, et al. 3D inversion of a scalar radio magnetotelluric field data set [J]. *Geophys*, 2003, **68**(3): 782-790.
- [3] Ascher U M, Haber E. A multigrid method for distributed parameter estimation problem[J]. *Electron Trans Numer Anal*, 2003, **15**: 1-17.
- [4] Baboolal S, Bharuthram R. Two-scale numerical solution of the electromagnetic two-fluid plasma-Maxwell equations: shock and soliton simulation[J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2007, **76**(1/3): 3-7.
- [5] Haber E. Quasi-Newton methods for large-scale electromagnetic inverse problems[J]. *Inverse Problems*, 2005, **21**(1): 305-323.
- [6] HE Sai-ling, Weston V H. Wave-splitting and absorbing boundary condition for Maxwell's equations on a curved surface[J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 1999, **50**(5/6): 435-455.
- [7] Dom O, Aguirre H B, Berryman J G, et al. A nonlinear inversion method for 3D electromagnetic imaging using adjoint fields[J]. *Inverse Problems*, 1999, **15**(6): 1523-1558.
- [8] Farquharson C G., Oldenburg D W, Li Y G. An approximate inversion algorithm for time-domain electromagnetic surveys[J]. *Journal of Applied Geophysics*, 1999, **42**(2): 71-80.
- [9] Cohen A, Hoffmann M, Reiss M. Adaptive wavelet Galerkin methods for linear inverse problems[J]. *SIAM J Numer Anal*, 2004, **42**(4): 1749-1501.
- [10] Dicken V, Maass P. Wavelet Galerkin methods for ill-posed problems[J]. *J Inverse and Ill-Posed Problems*, 1996, **4**(3): 203-222.
- [11] FU Chun-li, ZHU You-bin, QIU Chun-yu. Wavelet regularization for an inverse heat conduction problem[J]. *J Math Anal Appl*, 2003, **288**(1): 212-222.
- [12] LIU Jun. A multiresolution method for distributed parameter estimation[J]. *SIAM J Sci Comput*, 1993, **14**(2): 389-405.
- [13] FU Hong-sun, HAN Bo. A wavelet multiscale method for the inverse problems of a two-dimensional wave equation[J]. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2004, **12**: 643-656.
- [14] Bunks C, Saleck F M, Zaleski S, et al. Multiscale seismic waveform inversion[J]. *Geophysics*, 1995, **60**(5): 1457-1473.
- [15] Yee K S. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in

- isotropic media[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1996, **14**(3): 302-308.
- [16] Farquharson C, Oldenburg D. Non-linear inversion using general measures of data misfit and model structure[J]. Geophysics, 1998, **134**(1): 213-227.
- [17] Huber P J. Robust estimation of a location parameter[J]. Ann Math Stats, 1964, **35**(1): 73-101.
- [18] Haber E, Ascher U, Oldenburg D. On optimization techniques for solving non-linear inverse problems [J]. Inverse Problems, 2000, **16**(5): 1263-1280.

Wavelet Multiscale Method for the Inversion of Maxwell's Equation

DING Liang, HAN Bo, LIU Jia-qi

(Department of Mathematics, School of Science, Harbin Institute of Technology,
Harbin 150001, P. R. China)

Abstract: The estimation of the electrical conductivity in Maxwell's equation is concerned with. The primary difficulty is the presence of numerous local minima in the objective functional. A wavelet multiscale method was introduced and applied to the inversion of Maxwell equations. The inverse problem was then decomposed to multiple scales by wavelet transform and hence the original inverse problem was reformulated to a set of sub-inverse problems corresponding to different scales solved successively according to the size of scale from the shortest to the longest. On each scale, the stable and fast regularized Gauss-Newton method was carried out. The results of numerical simulation showed that this method is an available method, especially on aspects of wide convergence, computational efficiency and precision.

Key words: Maxwell's equation; wavelet multiscale method; inversion; regularized Gauss-Newton method; FDTD(finite difference time domain) method