文章编号: 1000-0887(2009)08-1003-06

一类不连续系统关于闭不变集的有限时间稳定性研究*

程桂芳[1,2], 慕小武[1]

(1. 郑州大学 数学系, 郑州 450001;
2. 郑州大学 物理工程学院, 郑州 450001)

(陈立群推荐)

摘要: 主要研究右端不连续系统在 Filippov 解意义下关于闭不变集(未必是紧集)的有限时间稳定问题. 当 Liapunov 函数是 Lipschitz 连续的正则函数情况下,给出了相关的 Liapunov 稳定性定理.
关 键 词: Filippov 解; 闭不变集; 有限时间稳定; 不连续系统
中图分类号: O231.2 文献标识码: A
DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2009.08.014

引 言

右端不连续的非线性系统近年来受到广泛关注与重视,不连续系统出现在许多控制系统中,如切换系统、混杂系统、考虑有摩擦力的力学控制系统[1]等,因此有许多相关结果. 如贺建勋的关于不连续系统的稳定性不变原理[2]. 在 Filippov 解的意义下, Shevitz 和 Paden[3] 给出了非光滑系统的 Liapunov 稳定性结果,并推广了 Lasalle 不变原理. 1999 年 Bacciottic 和 Ceragioli[4] 通过定义一类新的"集值导数",在更一般的微分包含框架下进一步研究了右端不连续系统在 Filippov 解意义下的稳定性与镇定问题. 进而,我们给出了非自治非光滑系统的 Matrosov 稳定性定理[5],讨论了一致最终有界性[6],以及基于向量 Liapunov 函数研究了不连续系统的稳定性[7].

早在 1969 年,关于闭不变集(未必是紧集)的稳定性问题引起了广大学者的兴趣. 关于集合的稳定性, Lin, Sontag 和 Wang[8] 给出基于光滑 Liapunov 函数的 Liapunov 稳定性定理及其逆定理. 由此我们欲讨论右端不连续系统在 Filippov 解意义下关于闭不变集的稳定性问题. 在渐近稳定的概念中,只说明了系统的解都趋近于某一个给定的目标(一般是平衡点或者是一个集合),但是关于趋近的时间没有任何的估计. 为了解决这个问题, 1986 年 Haimo 引入了有限时间稳定的概念[9]. 近来对有限时间稳定的讨论也有了相关的结果[10-14].

在研究过程中,通常可以利用 Liapunov 函数来讨论有限时间稳定问题. 关于连续系统, 1986 年 Haimo 给出基于光滑 Liapunov 函数的 Liapunov 定理[9]. 2000 年 Bhat 和 Bernstein[12] 给出

* 收稿日期: 2008-10-31; 修订日期: 2009-06-29
基金项目: 数学天元基金资助项目(10826078); 国家自然科学基金资助项目(60874006)
作者简介: 程桂芳(1979—),女,河南温县人,讲师(联系人. E-mail: gfcheng@zzu.edu.cn).

基于非光滑函数的Liapunov定理. 2005年Moulay和Perruquetti[10]将结果推广到非自治系统. 然而关于闭不变集的有限时间稳定问题的Liapunov稳定性定理没有任何结果.

本文主要研究右端不连续系统在Filippov解意义下关于闭不变集的有限时间稳定问题. 当Liapunov函数是Lipschitz连续的正则函数情况下, 给出相关的Liapunov稳定性定理. 不失一般性, 记 $\mathcal{B}=\left\{z\in R^n:\ \|z\|\leqslant 1\right\}$, $\mathcal{B}(\boldsymbol{x},\delta)=\left\{z\in R^n:\ \|z-\boldsymbol{x}\|\leqslant\delta\right\}$.

本文结构如下: 第1节提出问题, 第2节给出右端不连续系统在Filippov解意义下的比较原理以及关于闭不变集的有限时间稳定性定理.

1 问题的陈述及基本概念

本文研究的系统为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)),\tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x}\in\mathcal{D}\subseteq R^n$($\mathcal{D}$ 为包含原点的开邻域) 是状态向量, $t\in\mathbf{R}$ 为时间变量, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t))=[f_1(x(t)),\ \cdots,f_n(x(t))]^{\mathrm{T}}$ 是Lebesgue可测的局部有界函数, 且满足 $\boldsymbol{f}(\mathbf{0})=\mathbf{0}$.

对于右端不连续的函数首先给出系统(1)的Filippov解的定义.

定义1.1[15] 区间 I 上的绝对连续函数 $\boldsymbol{x}(t)$, 称为是系统(1)的Filippov解, 如果对于几乎处处的 $t\in I$

$$\dot{\boldsymbol{x}}\in\boldsymbol{K}[\boldsymbol{f}](\boldsymbol{x}(t)),\tag{2}$$

其中

$$\boldsymbol{K}[\boldsymbol{f}](\boldsymbol{x})\equiv\bigcap_{\delta>0}\ \bigcap_{\mu\mathcal{N}=0}\overline{\mathrm{co}}\boldsymbol{f}(\mathcal{B}(\boldsymbol{x},\delta)-\mathcal{N}).\tag{3}$$

定义1.2[16] 集值映射 F 在 $\mathcal{D}$ 是上半连续的, 若对任意 $\boldsymbol{x}\in\mathcal{D}$, 对于 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 使得对 $\forall z\in\mathcal{D}$ 满足 $\|\boldsymbol{x}-z\|<\delta$, 成立 $F(z)\subseteq F(\boldsymbol{x})+\varepsilon\mathcal{B}$.

显然由定义1.1, 有以下事实:

(i) $\mathbf{0}\in\boldsymbol{K}[\boldsymbol{f}](\mathbf{0})$. 此时称 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 为系统(1)的平衡点;

(ii) $\boldsymbol{K}[\boldsymbol{f}](\boldsymbol{x})$ 是上半连续的, 非空且具有紧凸值.

注1 当Filippov解 $\boldsymbol{x}(t)$ 几乎处处满足 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 时, 称Filippov解为Caratheodory解. 一般情况下, Filippov解不是Caratheodory解[17].

由文献[15], 对于任意 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0\in\mathcal{D}$, 系统(1)总有以 $\boldsymbol{x}_0$ 为初值的Filippov解, 然而一般来说解都是不唯一的. 用 $\boldsymbol{x}(t)$ 来表示以 $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$ 为初值的系统(1)的任意Filippov解, 所有Filippov解 $\boldsymbol{x}(t)$ 组成的集合记为 $S(\boldsymbol{x}_0)$.

系统(1)在 $\mathcal{D}$ 上称为前向完全的, 若对所有 $\boldsymbol{x}_0\in\mathcal{D}$, 任意Filippov解 $\boldsymbol{x}(t)\in S(\boldsymbol{x}_0)$ 满足 $\boldsymbol{x}(t)\in\mathcal{D}$, $\forall t\geqslant t_0$. 称闭集 $\mathcal{A}\subseteq R^n$ 是系统(1)的不变集, 若对 $\forall\boldsymbol{x}_0\in\mathcal{A}$, 任意Filippov解 $\boldsymbol{x}(t)\in S(\boldsymbol{x}_0)$ 满足 $\boldsymbol{x}(t)\in\mathcal{A}$, $\forall t\geqslant t_0$. 另外, 对于 $\xi\in R^n$, 记

$$|\xi|_{\mathcal{A}}=d(\xi,\mathcal{A})=\inf_{\eta\in\mathcal{A}}d(\xi,\eta).$$

本文中假设系统(1)在 $\mathcal{D}$ 上是前向完全的, 且 $\mathcal{A}\subseteq R^n$ 是系统(1)的闭不变集.

定义1.3[8] 系统(1)关于闭不变集 $\mathcal{A}$ 全局稳定, 若对 $\forall\varepsilon>0$, 任意初值 $\boldsymbol{x}_0\in\mathcal{D}$, 系统(1)的任意Filippov解 $\boldsymbol{x}(t)\in S(\boldsymbol{x}_0)$ 满足:

$$|\boldsymbol{x}(t)|_{\mathcal{A}}<\varepsilon,\qquad\forall t\geqslant t_0.$$

定义1.4[8] 系统(1)关于闭不变集 $\mathcal{A}$ 全局渐近稳定, 若系统(1)是关于闭不变集 $\mathcal{A}$ 全局稳定的, 且满足吸引性: 对 $\forall r>0$, $\sigma>0$, 存在 $T>0$ 使得系统(1)的任意以 $\boldsymbol{x}_0$ 为初值的

Filippov 解 $\boldsymbol{x}(t)\in S(\boldsymbol{x}_0)$ 都满足:

$$|\boldsymbol{x}_0|_{\mathcal{A}}\leqslant r\Rightarrow|\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)|_{\mathcal{A}}\leqslant\sigma,\qquad\forall t\geqslant t_0+T.$$

在渐近稳定的定义中, 只说明了系统(1) 以 $\boldsymbol{x}_0$ 为初值的任意 Filippov 解都趋近闭不变集 $\mathcal{A}$, 但是关于趋近闭不变集 $\mathcal{A}$ 的时间没有任何的估计. 为了解决这个问题, 引入如下关于闭不变集的全局有限时间稳定的概念.

定义 1.5 系统(1) 关于闭不变集 $\mathcal{A}$ 全局有限时间稳定, 若

(i) 系统(1) 关于闭不变集 $\mathcal{A}$ 全局渐近稳定;

(ii) 系统(1) 关于闭不变集 $\mathcal{A}$ 的有限时间收敛性: $\exists T(\boldsymbol{x}_0)$, 使得系统(1) 以 $\boldsymbol{x}_0$ 为初值的所有 Filippov 解 $\boldsymbol{x}(t)\in S(\boldsymbol{x}_0)$ 满足:

$$|\boldsymbol{x}(t)|_{\mathcal{A}}=0,\qquad \text{i.e.}\ \boldsymbol{x}(t)\in\mathcal{A},\quad\forall t\geqslant T(\boldsymbol{x}_0),$$

其中
$$T(\boldsymbol{x}_0)=\sup_{\boldsymbol{x}(t)\in S(\boldsymbol{x}_0)}\inf\left\{T\geqslant t_0:\boldsymbol{x}(t)\in\mathcal{A},\ \forall t\geqslant T\right\}<+\infty.$$

注 2 当函数 $T(\boldsymbol{x}_0)$ 满足定义 1.5 时称为系统(1) 关于初始条件 $\boldsymbol{x}_0$ 的停息时间.

显然若系统(1) 关于闭不变集 $\mathcal{A}$ 全局有限时间稳定, 则对于 $\forall\boldsymbol{x}_0\in\mathcal{D}$, 任意 Filippov 解 $\boldsymbol{x}(t)$ 满足: (i) $\boldsymbol{x}(t)$ 绝对连续; (ii) $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$; (iii) 对于 $\forall t,s\in[t_0,+\infty)$, 有 $\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{x}(s))=\boldsymbol{x}(t+s)$ 及 $\boldsymbol{x}(T(\boldsymbol{x}_0)+t)\in\mathcal{A}$ 成立.

下面回顾关于非光滑情形下的 Clarke 广义导数概念, 以及 Lipschitz 连续的正则函数(Filippov 意义下) 沿着 Filippov 解轨道的链法则.

定义 1.6[3,18] (Clarke 广义梯度) 对于局部 Lipschitz 连续的函数 $V:\mathcal{D}\to\mathbf{R}$, 在 $\boldsymbol{x}$ 处的广义梯度定义为

$$\partial V(\boldsymbol{x})=\overline{\mathrm{co}}\left\{\lim_{i\to+\infty}\nabla V(\boldsymbol{x}_i)\mid\boldsymbol{x}_i\to\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_i\notin\Omega_V\right\},\tag{4}$$

其中 Ω_V 为包含所有 V 不可导的点的零测集, 梯度 ∇ 为相对于时间的导数$(\partial/\partial t)$.

定义 1.7[3,18] 函数 $g(\boldsymbol{x})$ 的广义方向导数定义为

$$g^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})=\lim_{\boldsymbol{y}\to\boldsymbol{x}}\sup_{t\to0^+}\frac{g(\boldsymbol{y}+t\boldsymbol{v})-g(\boldsymbol{y})}{t}.\tag{5}$$

定义 1.8[3,18] $g(\boldsymbol{x})$ 称为正则函数, 如果满足:

(i) 对于 $\forall\boldsymbol{v}$, 函数 $g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ 的单侧方向导数 $g'(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ 存在;

(ii) 对于 $\forall\boldsymbol{v}$, $g'(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})=g^0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$.

引理 1.1[3,18] (链法则) 令 $\boldsymbol{x}(t)\in S(\boldsymbol{x}_0)$ 为系统(1) 在包含 t 的区间 I 上的 Filippov 解, $V:\mathcal{D}\to\mathbf{R}$ 是局部Lipschitz 连续的正则函数. 则 $V(\boldsymbol{x}(t))$ 是绝对连续的, $\mathrm{d}V(\boldsymbol{x}(t))/\mathrm{d}t$ 几乎处处存在, 且满足:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(\boldsymbol{x}(t))\overset{\text{a.e}}{\in}\dot{V}(\boldsymbol{x}(t)),\tag{6}$$

其中
$$\dot{V}(\boldsymbol{x}(t)):=\bigcap_{\xi\in\partial V(\boldsymbol{x}(t))}\xi^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}[\boldsymbol{f}](\boldsymbol{x}(t)).\tag{7}$$

2 主要结果

首先给出 Liapunov 函数 V 是 Lipschitz 连续且正则的情况下的比较原理以及不连续系统(1) 关于闭不变集 $\mathcal{A}$ 全局渐近稳定的 Liapunov 定理.

考虑标量非线性系统:

$$\dot{y}(t)=w(y(t)),\quad y(t_0)=y_0,$$

其中 $y \in \mathbf{R}$ 为比较系统的状态变量, w 是单调非减的连续函数, 且用 $y(t)$ 来表示上述系统以 y_0 为初值的解.

命题 2.1 若存在 Lipschitz 连续的正则函数 V, 使得:

$$\dot{V}(t) \leqslant w(V(t)).$$

则当 $V(t_0) = y_0$ 时成立 $V(t) \leqslant y(t)$.

证明类似于 Khalil[19] 比较原理的证明. 略.

命题 2.2 令 $\boldsymbol{x}(t) \in S(\boldsymbol{x}_0)$ 为系统(1) 以 $\boldsymbol{x}_0$ 为初值的任意 Filippov 解. 若存在 Lipschitz 连续的正则函数 $V: \mathscr{D} \to \mathbf{R}$, 使得:

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}(t)) \leqslant w(V(\boldsymbol{x}(t))). \tag{8}$$

则当 $V(\boldsymbol{x}_0) = y_0$ 时成立 $V(\boldsymbol{x}(t)) \leqslant y(t, V(\boldsymbol{x}_0))$.

证明 注意到函数 V 为 Lipschitz 连续和正则的, 则由引理 1.1 可知, $V(\boldsymbol{x}(t))$ 绝对连续, $\mathrm{d}V(\boldsymbol{x}(t))/\mathrm{d}t$ 几乎处处存在且 $\mathrm{d}V(\boldsymbol{x}(t))/\mathrm{d}t \overset{\text{a.e}}{\in} \dot{V}(\boldsymbol{x}(t))$. 结合(8) 式, 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(\boldsymbol{x}(t)) \leqslant w(V(\boldsymbol{x}(t))).$$

令 $\xi(t) := V(\boldsymbol{x}(t))$, 则上式意味着 $\mathrm{d}\xi(t)/\mathrm{d}t \leqslant w(\xi(t))$. 进一步地, 由命题 2.1 以及 $V(\boldsymbol{x}_0) = \xi(t_0) = y_0$, 成立 $V(\boldsymbol{x}(t)) = \xi(t) \leqslant y(t, y_0) = y(t, V(\boldsymbol{x}_0))$. 证毕.

引理 2.1 令 $\boldsymbol{x}(t) \in S(\boldsymbol{x}_0)$ 为系统(1) 的任意 Filippov 解. 若存在 Lipschitz 连续的正则函数 $V: \mathscr{D} \to \mathbf{R}_+$ 满足

(i) 存在 $\mathscr{K}_\infty$ 函数 α_1 和 α_2 使得

$$\alpha_1(|\boldsymbol{x}(t)|_{\mathscr{A}}) \leqslant V(\boldsymbol{x}(t)) \leqslant \alpha_2(|\boldsymbol{x}(t)|_{\mathscr{A}}); \tag{9}$$

(ii) 存在正定函数 α_3 使得

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}(t)) \leqslant -\alpha_3(|\boldsymbol{x}(t)|_{\mathscr{A}}). \tag{10}$$

则系统(1) 关于闭不变集 $\mathscr{A}$ 全局渐近稳定.

证明 先证系统(1) 关于 $\mathscr{A}$ 全局稳定.

由引理 1.1 及(10) 式, 有 $\mathrm{d}V(\boldsymbol{x}(t))/\mathrm{d}t \leqslant 0$, 则函数 $V(\boldsymbol{x}(t))$ 递减且

$$\sup_{t \in [t_0, +\infty)} V(\boldsymbol{x}(t)) \leqslant V(\boldsymbol{x}_0).$$

任给 $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta = \alpha_2^{-1} \circ \alpha_1(\varepsilon) > 0$, 当 $|\boldsymbol{x}_0|_{\mathscr{A}} < \delta$ 时, 有

$$\alpha_1(|\boldsymbol{x}(t)|_{\mathscr{A}}) \leqslant V(\boldsymbol{x}(t)) \leqslant V(\boldsymbol{x}_0) \leqslant \alpha_2(|\boldsymbol{x}_0|_{\mathscr{A}}) < \alpha_2(\alpha_2^{-1} \circ \alpha_1(\varepsilon)) = \alpha_1(\varepsilon).$$

因此由 α_1 递增性质得到 $|\boldsymbol{x}(t)|_{\mathscr{A}} \leqslant \varepsilon$.

下面只需证明系统(1) 关于闭不变集 $\mathscr{A}$ 的吸引性: $\lim_{t \to +\infty} |\boldsymbol{x}(t)|_{\mathscr{A}} = 0$.

由引理 1.1 及(10) 式, $\mathrm{d}V(\boldsymbol{x}(t))/\mathrm{d}t \leqslant -\alpha_3(|\boldsymbol{x}(t)|_{\mathscr{A}})$, 两端积分, 得到

$$\int_{t_0}^{t} \alpha_3(|\boldsymbol{x}(\tau)|_{\mathscr{A}})\mathrm{d}\tau \leqslant V(\boldsymbol{x}_0) - V(\boldsymbol{x}(t)) \leqslant V(\boldsymbol{x}_0).$$

从而 $\lim_{t \to +\infty} \int_{t_0}^{t} \alpha_3(|\boldsymbol{x}(\tau)|_{\mathscr{A}})\mathrm{d}\tau < +\infty$. 由 Barbalat 引理得到 $\lim_{t \to +\infty} \alpha_3(|\boldsymbol{x}(t)|_{\mathscr{A}}) = 0$, 则由函数 α_3 的正定性成立 $\lim_{t \to +\infty} |\boldsymbol{x}(t)|_{\mathscr{A}} = 0$. 证毕.

注 3 当函数 V 满足(9) 式时, 有

$$V(\boldsymbol{x}) = 0 \Leftrightarrow |\boldsymbol{x}|_{\mathscr{A}} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} \in \mathscr{A}.$$

最后给出关于闭不变集 $\mathcal{A}$ 的全局有限时间稳定定理.

定理 2.1 令 $\boldsymbol{x}(t)\in S(\boldsymbol{x}_0)$ 为系统(1)以 $\boldsymbol{x}_0$ 为初值的任意 Filippov 解. 若存在 Lipschitz 连续的正则函数 $V:\mathcal{D}\to\mathbf{R}$, 使得

(i) 存在正定函数 γ_1 和 γ_2 使得

$$\gamma_1(|\boldsymbol{x}(t)|_{\mathcal{A}})\leqslant V(\boldsymbol{x}(t))\leqslant\gamma_2(|\boldsymbol{x}(t)|_{\mathcal{A}});\tag{11}$$

(ii) 存在常数 $c>0$, 及 $k\in(0,1)$, 使得对几乎所有的 $t\geqslant t_0$ 成立

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}(t))+c(V(\boldsymbol{x}(t)))^k\leqslant 0,\tag{12}$$

则系统(1)关于闭不变集 $\mathcal{A}$ 全局有限时间稳定, 且

$$T(\boldsymbol{x}_0)\leqslant\frac{1}{c(1-k)}(V(\boldsymbol{x}(t)))^{1-k}.$$

证明 (12)式等价于

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}(t))\leqslant -c(V(\boldsymbol{x}(t)))^k\leqslant -c(\gamma_1(|\boldsymbol{x}(t)|_{\mathcal{A}}))^k.$$

由引理 2.1 易知系统(1)是关于闭不变集 $\mathcal{A}$ 全局渐近稳定的.

下面只需证明系统(1)关于闭不变集 $\mathcal{A}$ 的有限时间收敛性. 再次考察(12)式, 显然 $V(\boldsymbol{x}(t))$ 递减, 结合其 Lipschitz 连续性知 $-c(V(\boldsymbol{x}(t)))^k$ 是非减的连续函数. 从而设

$$-c(V(\boldsymbol{x}(t)))^k=w(V(\boldsymbol{x}(t))^k),$$

考察标量方程

$$\dot{y}(t)=-c\,\mathrm{sgn}(y(t))|(y(t))|^k,\quad y(t_0)=y_0,$$

上述微分方程的解为

$$y(t,y_0)=\begin{cases}\mathrm{sgn}(y_0)[|y_0|^{1-k}-c(1-k)t]^{1/(1-k)}, & t<\dfrac{|y_0|^{1-k}}{c(1-k)},\ y_0\neq 0,\\ 0, & t\geqslant\dfrac{|y_0|^{1-k}}{c(1-k)},\ y_0\neq 0,\\ 0, & y_0=0.\end{cases}\tag{13}$$

取 $y_0=V(\boldsymbol{x}_0)$, 则由比较原理(命题 2.2), 得到

$$V(\boldsymbol{x}(t))\leqslant y(t,y_0),\qquad t\geqslant t_0.\tag{14}$$

由 $\dot{V}\leqslant 0$, (13)式以及不等式(14)可得

$$V(\boldsymbol{x}(t))=0,\qquad t\geqslant\frac{(V(\boldsymbol{x}_0))^{1-k}}{c(1-k)},$$

即

$$\boldsymbol{x}(t)\in\mathcal{A},\qquad t\geqslant\frac{(V(\boldsymbol{x}_0))^{1-k}}{c(1-k)}.$$

从而 $\inf\left\{t\geqslant t_0:\boldsymbol{x}(t)\in\mathcal{A}\right\}<+\infty$. 因此由停息时间的定义, 得到

$$T(\boldsymbol{x}_0)=\sup_{\boldsymbol{x}(t)\in S(\boldsymbol{x}_0)}\inf\left\{T\geqslant t_0:\boldsymbol{x}(t)\in\mathcal{A},\,t\geqslant T\right\}\leqslant\frac{(V(\boldsymbol{x}_0))^{1-k}}{c(1-k)}.$$

定理证毕.

[参 考 文 献]

[1] Matrosov V M. On the stability of motion[J]. J Appl Math Mech, 1962, **26**(4): 1337-1353.

[2] 贺建勋. 关于不连续系统稳定性的比较原理[J]. 厦门大学学报(自然科学版), 1982, **13**(2): 117-126.

[3] Shevitz Daniel, Paden Bard. Lyapunov stability theory of nonsmooth systems[J]. IEEE Transactions

on Automatic Control, 1994, **39**(9): 1910-1914.

[4] Bacciottic A, Ceragioli F. Stability and stabilization of discontinuous systems and nonsmooth Lyapunov function[J]. Esaim-Cocv, 1999, **4**(2): 361-376.

[5] 慕小武, 程桂芳, 唐风军. 非自治非光滑系统的 Matrosov 稳定性定理[J]. 应用数学学报, 2007, **30**(1): 168-175.

[6] 程桂芳, 慕小武, 丁志帅. 一类不连续非自治系统的一致最终有界性[J]. 应用数学学报, 2007, **30**(4): 675-681.

[7] 慕小武, 程桂芳, 丁志帅. 基于向量 Liapunov 函数不连续系统的稳定性研究[J]. 应用数学和力学, 2007, **28**(12): 1441-1447.

[8] Lin Y D, Sontag E D, Wang Y. A smooth converse Lyapunov theorem for robust stability[J]. SIAM J Control and Optimization, 1996, **34**(1): 124-160.

[9] Haimo V T. Finite time Controller[J]. SIAM J Control and Optimization, 1986, **24**(4): 760-770.

[10] Moulay E, Perruquetti W. Finite time stability of differential inclusions[J]. IMA Journal of Mathematical Control and Information, 2005, **22**(4): 465-475.

[11] Bhat S P, Bernstein D S. Continuous, finite-time stabilization of the translational and rotational double integrators[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1998, **43**(5): 678-682.

[12] Bhat S P, Bernstein D S. Finite-time stability of continuous autonomous systems[J]. SIAM J Control and Optimization, 2000, **38**(3): 751-766.

[13] Hong Y. Finite-time stabilization and stabilizability of a class controllable systems[J]. Systems and Control Letters, 2002, **46**(2): 231-236.

[14] Orlov Y. Finite time stability and robust control synthesis of uncertain switched systems[J]. SIAM J Control and Optimization, 2005, **43**(4): 1253-1271.

[15] Filippov A F. Differential Equations With Discontinuous Right-Hand Sides[M]. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer, 1988.

[16] Aubin J P, Cellina A. Differential Inclusions[M]. Grundlehren der Mathematischen Wiissenschaften. New York: Springer-Verlag, 1984.

[17] Kim S J, Ha I J. Existence of caratheodory solutions in nonlinear systems with discontinuous switching feedback controllers[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, **49**(7): 1167-1171.

[18] Clarke F H, Ledyaev Yu S, Stern R J, et al. Nonsmooth Analysis and Control Theory[M]. Graduate Texts in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 1998.

[19] Khalil H K. Nonlinear Systems[M]. 3rd Ed. New Jersey: Prentice Hall, 2002.

Finite-Time Stability With Respect to a Closed Invariant Set for a Class of Discontinuous Systems

CHENG Gui-fang[1,2], MU Xiao-wu[1]

(1. Department of Mathematics, Zhengzhou University, Zhengzhou 450001, P.R.China;
2. Physical Engineering College, Zhengzhou University, Zhengzhou 450001, P.R.China)

Abstract: The problem of finite-time stability is mainly discussed with respect to a closed (not necessarily compact) invariant set for a class of nonlinear systems with discontinuous right-hand sides in the sense of Filippov solutions. When Liapunov function is Lipschitz continuous and regular, Liapunov theorem on finite-time stability with respect to a closed invariant set was presented.

Key words: Filippov solution; closed invariant set; finite-time stability; discontinuous systems