

正交异性双材料反平面界面端应力场分析

李俊林, 王小丽

(太原科技大学 应用科学学院, 太原 030024)

(郭兴明推荐)

摘要: 研究了正交异性双材料反平面平板搭接界面端问题. 采用复合材料断裂复变方法, 构造了特殊应力函数, 通过求解一类广义重调和方程组的边值问题, 推导出平板搭接界面端的应力场、位移场及应力强度因子的表达式. 结果显示: 反平面搭接界面端只有一个奇异性, 上下材料常数比 > 0 时, 应力场具有幂次奇异性, 且随着 λ 增长, 奇异指数趋于 $-1/2$, 并利用有限元算例分析验证了理论结果的正确性.

关键词: 正交异性; 反平面; 平板搭接; 界面端; 应力场; 有限元

中图分类号: O346 **文献标识码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2009.09.009

引 言

文献[1]采用 Mellin 变换法研究了各向同性双材料界面端问题, 得出界面端的应力场具有奇异性. 文献[2]应用 Goursat 复变应力函数法, 对具有任意几何结合形状的界面端的应力和位移场进行推导, 得到均匀材料平板搭接界面端有两个特征值, 并且当材料 1 的弹性模量远远大于材料 2 时, 还会出现振荡应力奇异性. 研究发现界面端奇异性远比界面裂纹情况复杂. 文献[3]运用复合材料断裂复变方法, 通过构造特殊应力函数, 推出了正交异性复合材料型界面裂纹尖端附近应力场、位移场的理论解, 其应力场没有振荡奇异性. 文献[4]对各向同性双材料反平面问题界面端奇异应力场进行了分析, 利用位移函数的级数展开, 得出了一些重要结论. 本文主要利用复合材料断裂复变方法, 构造新的应力函数, 讨论了正交异性双材料反平面平板搭接界面端问题, 得到平板搭接界面端的应力场、位移场及应力强度因子的解析表达式, 并利用有限元计算比较, 验证理论公式的正确性.

1 力学模型

如图 1 所示, $x > 0, y = 0$ 为材料粘接界面. $y > 0$ 部分为第 1 种正交异性复合材料, 其材料工程常数为 $(G_{23})_1, (G_{31})_1$, 而 $y < 0$ 为第 2 种正交异性复合材料, 其材料工程常数为 $(G_{23})_2, (G_{31})_2$.

收稿日期: 2009-04-10; 修订日期: 2009-07-18

基金项目: 山西省自然科学基金资助项目(2007011008)

作者简介: 李俊林(1963), 男, 山西芮城人, 教授, 博士(联系人. Tel: + 86-351-6998309; E-mail: lijunlin9726@yahoo.com.cn).

由弹性力学可知,控制方程为

$$(Q_{55})_j \frac{w_j^2}{x^2} + (Q_{44})_j \frac{w_j^2}{y^2} = 0 \quad (j = 1, 2), \quad (1)$$

其中 $w_j(j = 1, 2)$ 是位移函数,边界条件为

$$\begin{cases} = 0: \\ (z)_1 = (z)_2, w_1 = w_2, \end{cases} \quad (2)$$

$$1 = /2: (z)_1 = 0, \quad (3)$$

$$1 = - : (z)_2 = 0 \quad (4)$$

由弹性力学可知,其相应的应力分量为^[5]

$$(r_z)_j = (Q_{55})_j \frac{w_j}{r}, \quad (5)$$

$$(z)_j = (Q_{44})_j \frac{w_j}{r}; \quad (6)$$

位移分量为

$$u_j = v_j = 0, w_j = w_j(x, y) \quad (j = 1, 2),$$

r 和 θ 为从裂纹边缘起度量的极坐标,常数 $(Q_{44})_j = (G_{23})_j, (Q_{55})_j = (G_{31})_j, (G_{23})_j, (G_{31})_j$ 为剪切模量

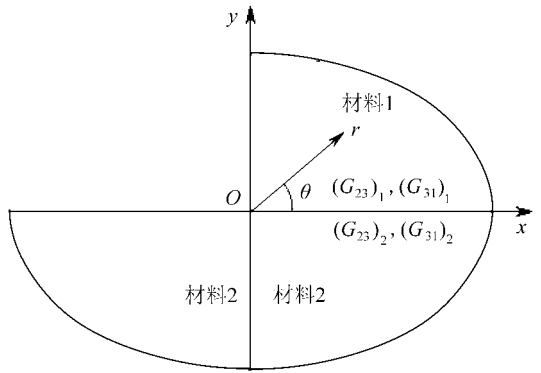


图 1 正交异性双材料界面端模型

2 应力函数

假设位移为 $w_j = w_j(x + s_j y), w_j(x + s_j y)$ 对固定的 j 是任一复变函数 将 $w_j(x + s_j y)$ 带入控制方程(1),得到特征方程

$$(Q_{44})_j s_j^2 + (Q_{55})_j = 0 \quad (j = 1, 2) \quad (7)$$

方程(7)有一对共轭虚根,取其虚部大于0的根如下:

$$s_j = i \sqrt{\frac{(Q_{55})_j}{(Q_{44})_j}} = i j \quad (j = 1, 2) \quad (8)$$

由方程(1)选取特殊应力函数如下:

$$w_j(r, \theta) = \frac{1}{+ 1} \left[\frac{z_j^{+1} + z_j^{-1}}{2} a_j + \frac{z_j^{+1} - z_j^{-1}}{2i} b_j \right] \quad (j = 1, 2) \quad (9)$$

其中

$$\begin{cases} z_j = x + s_j y = r(\cos \theta + s_j \sin \theta) \\ z_j = x + s_j y = r(\cos \theta + s_j \sin \theta) \end{cases} \quad (j = 1, 2) \quad (10)$$

式(9)给出的 $w_j(r, \theta)$ 满足偏微分方程(1),将式(9)、(10)分别代入式(5)、(6)可得

$$\begin{aligned} (r_z)_j &= (Q_{55})_j \frac{w_j}{r} = \\ & (Q_{55})_j r \left[\frac{(\cos \theta + s_j \sin \theta)^{+1} + (\cos \theta + s_j \sin \theta)^{-1}}{2} a_j + \right. \\ & \left. \frac{(\cos \theta + s_j \sin \theta)^{+1} - (\cos \theta + s_j \sin \theta)^{-1}}{2i} b_j \right], \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} (z)_j &= (Q_{44})_j \frac{w_j}{r} = \\ & (Q_{44})_j r \left\{ [(\cos \theta + s_j \sin \theta)^{-1} (-\sin \theta + s_j \cos \theta) + \right. \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} & (\cos \theta_j + s_j \sin \theta_j) (-\sin \theta_j + s_j \cos \theta_j) \left] a_j/2 + \right. \\ & \left. \left[(\cos \theta_j + s_j \sin \theta_j) (-\sin \theta_j + s_j \cos \theta_j) - \right. \right. \\ & \left. \left. (\cos \theta_j + s_j \sin \theta_j) (-\sin \theta_j + s_j \cos \theta_j) \right] b_j/2i \right\} \quad (j = 1, 2) \end{aligned} \quad (12)$$

注意到式(8)及式(10)有 $z_j = r(\cos \theta_j + i s_j \sin \theta_j)$, 记 $\cos \theta_j + i s_j \sin \theta_j = \rho_j e^{i \theta_j}$, 其中

$$\rho_j = \sqrt{\cos^2 \theta_j + s_j^2 \sin^2 \theta_j}, \quad \tan \theta_j = s_j \tan \theta_j \quad (j = 1, 2)$$

将式(11)、(12)分别代入边界条件, 可得一组关于 (a_1, a_2, b_1, b_2) 的四阶齐次线性方程组:

$$\begin{cases} a_1 - a_2 = 0, \\ (Q_{44})_1 b_1 - (Q_{44})_2 b_2 = 0, \\ \cos \frac{\theta_j}{2} a_1 + \sin \frac{\theta_j}{2} b_1 = 0, \\ \sin \frac{\theta_j}{2} a_2 + \cos \frac{\theta_j}{2} b_2 = 0 \end{cases} \quad (13)$$

为使该齐次线性方程组有一组非零解, 其系数行列式必须为 0

$$\cos \frac{\theta_j}{2} \left\{ 2(1 + s_j^2) \sin^2 \left[\frac{\theta_j}{2} \right] - \frac{(Q_{44})_1}{(Q_{44})_2} \right\} = 0, \quad (14)$$

其中

$$= \frac{1(Q_{44})_1}{2(Q_{44})_2}$$

若 $\cos(\theta_j/2) = 0$, 则 $\theta_j = \pi/2, 3\pi/2$, 因与复合材料工程常数无关, 舍去此

当 $\theta_j > 0$ 时, 有

$$2(1 + s_j^2) \sin^2 \left[\frac{\theta_j}{2} \right] - \frac{(Q_{44})_1}{(Q_{44})_2} = 0, \quad (15)$$

可得

$$\theta_j = 4k \frac{\arcsin \sqrt{\frac{(Q_{44})_1}{2(Q_{44})_2(1 + s_j^2)}}}{2} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (16)$$

考虑到界面端, θ_j 在 $(-1, 0)$ 范围内, 有

$$\theta_j = - \frac{\arcsin \sqrt{\frac{(Q_{44})_1}{2(Q_{44})_2(1 + s_j^2)}}}{2}, \quad (17)$$

即正交异性双材料反平面平板搭接界面端应力存在唯一幂次奇异性

由式(17)可以看出, θ_j 随材料参数的不同而变化 图2给出了特征值 λ 随材料参数比 Γ 变化的关系图 从图2可以看出, 随着材料参数比的增大, 应力奇异指数趋于 $-1/2$

由式(13)、(15)可得

$$\begin{cases} b_1 = \left[\frac{1}{2} \csc^2 \left[\frac{\theta_j}{2} \right] - 1 \right] b_2 \\ a_1 = a_2 = - \cot \left(\frac{\theta_j}{2} \right) b_2 \end{cases} \quad (b_2 \text{ 为自由变量}) \quad (18)$$

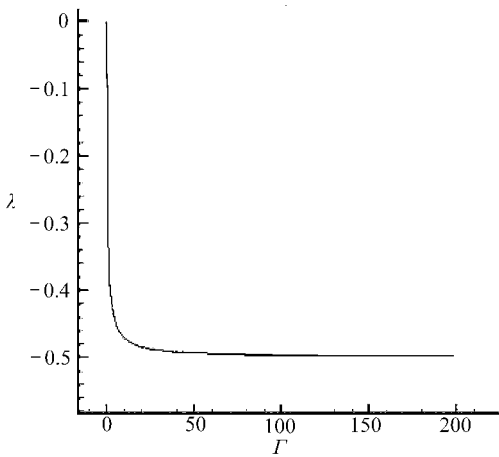


图2 λ 随 Γ 的变换图

3 应力场和位移场

由式(11)、(12)、(18), 正交异性双材料反平面平板搭接界面端应力场为

$$\begin{aligned}
 (\sigma_z)_1 &= (Q_{55})_1 \frac{w_1}{r} = (Q_{55})_1 r \left[\frac{(\cos \theta + s_1 \sin \theta)^{+1} + (\cos \theta - s_1 \sin \theta)^{+1}}{2} a_1 + \right. \\
 &\quad \left. \frac{(\cos \theta + s_1 \sin \theta)^{+1} - (\cos \theta - s_1 \sin \theta)^{+1}}{2i} b_1 \right] = \\
 &= (Q_{55})_1 r^{+1} [\cos(\theta + 1) a_1 + \sin(\theta + 1) b_1] = \\
 &= (Q_{55})_1 r^{+1} \left\{ -\cos(\theta + 1) \cot(\theta) + \right. \\
 &\quad \left. \sin(\theta + 1) \left[\frac{1}{2} \operatorname{cs}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) - 1 \right] \right\} b_2, \quad (19)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\sigma_z)_2 &= (Q_{55})_2 \frac{w_2}{r} = \\
 &= (Q_{55})_2 r \left[\frac{(\cos \theta + s_2 \sin \theta)^{+1} + (\cos \theta - s_2 \sin \theta)^{+1}}{2} a_2 + \right. \\
 &\quad \left. \frac{(\cos \theta + s_2 \sin \theta)^{+1} - (\cos \theta - s_2 \sin \theta)^{+1}}{2i} b_2 \right] = \\
 &= (Q_{55})_2 r^{+1} [\cos(\theta + 1) a_2 + \sin(\theta + 1) b_2] = \\
 &= (Q_{55})_2 r^{+1} [-\cos(\theta + 1) \cot(\theta) + \sin(\theta + 1)] b_2, \quad (20)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\sigma_z)_1 &= (Q_{44})_1 \frac{w_1}{r} = (Q_{44})_1 r \left\{ [(\cos \theta + s_1 \sin \theta)(-\sin \theta + s_1 \cos \theta) + \right. \\
 &\quad (\cos \theta - s_1 \sin \theta)(-\sin \theta + s_1 \cos \theta)] a_1 / 2 + \\
 &\quad \left. [(\cos \theta + s_1 \sin \theta)(-\sin \theta + s_1 \cos \theta) - \right. \\
 &\quad \left. (\cos \theta - s_1 \sin \theta)(-\sin \theta + s_1 \cos \theta)] b_1 / 2i \right\} = \\
 &= (Q_{44})_1 r \left\{ [-\sin \theta \cos \theta - s_1 \cos \theta \sin \theta] a_1 + \right. \\
 &\quad \left. [s_1 \cos \theta \cos \theta - \sin \theta \sin \theta] b_1 \right\} = \\
 &= (Q_{44})_1 r \left\{ [s_1 \cos \theta + \cos \theta \sin \theta] \cot(\theta) + \right. \\
 &\quad \left. [s_1 \cos \theta \cos \theta - \sin \theta \sin \theta] \left[\frac{1}{2} \operatorname{cs}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) - 1 \right] \right\} b_2, \quad (21)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\sigma_z)_2 &= (Q_{44})_2 \frac{w_2}{r} = (Q_{44})_2 r \left\{ [(\cos \theta + s_2 \sin \theta)(-\sin \theta + s_2 \cos \theta) + \right. \\
 &\quad (\cos \theta - s_2 \sin \theta)(-\sin \theta + s_2 \cos \theta)] a_2 / 2 + \\
 &\quad \left. [(\cos \theta + s_2 \sin \theta)(-\sin \theta + s_2 \cos \theta) - \right. \\
 &\quad \left. (\cos \theta - s_2 \sin \theta)(-\sin \theta + s_2 \cos \theta)] b_2 / 2i \right\} = \\
 &= (Q_{44})_2 r \left\{ [-\sin \theta \cos \theta - s_2 \cos \theta \sin \theta] a_2 + \right. \\
 &\quad \left. [s_2 \cos \theta \cos \theta - \sin \theta \sin \theta] b_2 \right\} = \\
 &= (Q_{44})_2 r \left\{ [s_2 \cos \theta + \cos \theta \sin \theta] \cot(\theta) + \right. \\
 &\quad \left. [s_2 \cos \theta \cos \theta - \sin \theta \sin \theta] \left[\frac{1}{2} \operatorname{cs}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) - 1 \right] \right\} b_2, \quad (22)
 \end{aligned}$$

位移场为

$$w_1(r, H) = \frac{(rQ)^{K_1}}{K+1} [\cos(K+1) U\#a_1 + \sin(K+1) U\#b_1] = \frac{(rQ)^{K_1}}{K+1} \left\{ -\cos(K+1) U\cot(PK) + \sin(K+1) U \left[\frac{1}{2} \csc^2 \left(\frac{PK}{2} \right) - 1 \right] \right\} b_2, \quad (23)$$

$$w_2(r, H) = \frac{(rQ)^{K_1}}{K+1} [\cos(K+1) U\#a_2 + \sin(K+1) U\#b_2] = \frac{(rQ)^{K_1}}{K+1} [-\cos(K+1) U\cot(PK) + \sin(K+1) U] b_{21} \quad (24)$$

4 应力强度因子的计算

定义

$$K = \lim_{r \rightarrow 0} (2Pr)^{-K} (SH)_j |_{H=0} = B_2(Q_{44})_2 (2P)^{-K} b_2 \quad (25)$$

则

$$(S_z)_1 = \frac{K (Q_{55})_1 (2Pr)^{K_1}}{B_2(Q_{44})_2} \left\{ -\cos(K+1) U\cot(KP) + \sin(K+1) U \left[\frac{1}{2} \csc^2 \left(\frac{KP}{2} \right) - 1 \right] \right\}, \quad (26)$$

$$(S_z)_2 = K B_2(Q_{44})_2^{-K_1} (2Pr)^{K_1} [-\cos(K+1) U\cot(KP) + \sin(K+1) U], \quad (27)$$

$$(SH)_1 = \frac{K (Q_{44})_1 (2PrQ)^{K_1}}{B_2(Q_{44})_2} \left\{ [\sin H \cos(KU) + B_1 \cos H \sin(KU)] \cot(KP) + [B_1 \cos H \cos(KU) - \sin H \sin(KU)] \left[\frac{1}{2} \csc^2 \left(\frac{PK}{2} \right) - 1 \right] \right\}, \quad (28)$$

$$(SH)_2 = \frac{K (2PrQ)^{K_1}}{B_2} \left\{ [\sin H \cos(KU) + B_2 \cos H \sin(KU)] \cot(KP) + [B_2 \cos H \cos(KU) - \sin H \sin(KU)] \right\}, \quad (29)$$

$$w_1(r, H) = \frac{K (2P)^{K_1} (rQ)^{K_1}}{(K+1) B_2(Q_{44})_2} \left\{ -\cos(K+1) U\cot(KP) + \sin(K+1) U \left[\frac{1}{2} \csc^2 \left(\frac{KP}{2} \right) - 1 \right] \right\}, \quad (30)$$

$$w_2(r, H) = \frac{K (2P)^{K_1} (rQ)^{K_1}}{(K+1) B_2(Q_{44})_2} [-\cos(K+1) U\cot(KP) + \sin(K+1) U] \quad (31)$$

5 有限元算例

上述过程推导了正交异性双材料反平面搭接问题的界面端的应力场理论计算公式¹ 为验证该组理论公式计算的正确性和精度, 这里同有限元的结果进行比较¹ 比较用的算例模型见图 31 材料 1 的弹性常数^[6] 为

$$E_{11} = 150 \text{ GPa}, E_{22} = 9.5 \text{ GPa}, E_{33} = 9.5 \text{ GPa}, L_{12} = 0.263, L_{23} = 0.263, \\ L_{31} = 0.0167, G_{12} = 3.5 \text{ GPa}, G_{23} = 3.5 \text{ GPa}, G_{31} = 3.5 \text{ GPa}$$

材料 2 的弹性常数为

$$E_{11} = 135 \text{ GPa}, E_{22} = 10.3 \text{ GPa}, E_{33} = 10.3 \text{ GPa}, L_{12} = 0.21, L_{23} = 0.21, \\ L_{31} = 0.11, G_{12} = 6.6 \text{ GPa}, G_{23} = 2.6 \text{ GPa}, G_{31} = 6.6 \text{ GPa}$$

用有限元软件 ANSYS 中的 Shell93 号单元, 进行界面端应力分析, 网格见图 41

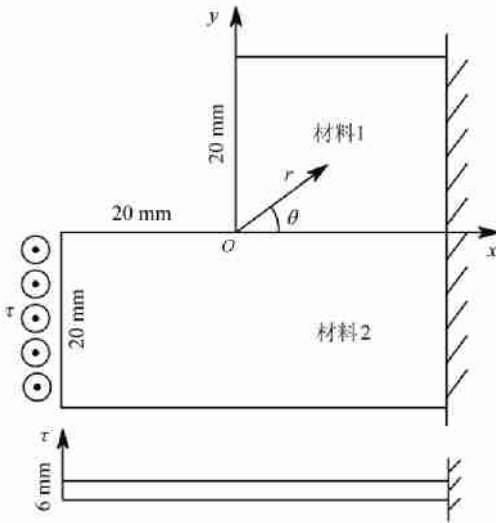


图3 力学模型

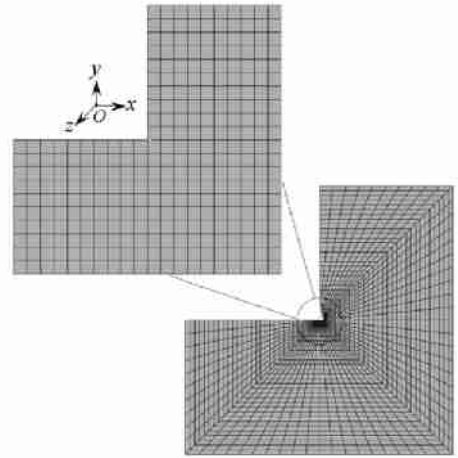


图4 裂纹尖端网格

进行理论求解和有限元分析,表1、表2分别给出了反平面搭接界面端 $H = 0$ 方向应力 S_z 的比较结果¹ 从结果来看,理论解和有限元解结果接近¹

表1 材料1中 $(S_z)_1$ 理论值与有限元结果的比较

r/mm	理论解 $(S_z)_1 / \text{MPa}$	有限元解 $(S_z)_1 / \text{MPa}$	相对误差 $e / (\%)$
0.3	- 2.72	- 3.02	10.6
0.4	- 2.49	- 2.62	5.2
0.5	- 2.32	- 2.31	0.4
0.6	- 2.19	- 2.06	5.9

表2 材料2中 $(S_z)_2$ 理论值与有限元结果的比较

r/mm	理论解 $(S_z)_2 / \text{MPa}$	有限元解 $(S_z)_2 / \text{MPa}$	相对误差 $e / (\%)$
0.4	- 4.70	- 4.98	6.0
0.5	- 4.37	- 4.38	0.2
0.6	- 4.13	- 3.91	5.3
0.7	- 3.93	- 3.51	10.7

6 结 论

本文采用建立在 z_j 平面上的复变函数方法,研究了正交异性双材料反平面平板搭接界面端问题,通过建立新的应力函数,问题最终归结为求解一组四阶齐次线性方程组的边值问题,给出了正交异性双材料反平面平板搭接界面端应力场、位移场以及应力强度因子的解析表达式¹ 结果显示:反平面搭接界面端只有一个奇异性,上下材料常数比 $\# > 0$ 时,应力场具有幂次奇异性,且随着 $\#$ 增长,奇异指数趋于 $-1/21$ 通过有限元算例比较,与理论值结果比较接近¹

[参 考 文 献]

- [1] Bogy D B. Two edge bonded elastic wedges of different materials and wedge angles under surface tractions[J]. J Appl Mech, 1971, 38(7): 377-386.
- [2] 许金泉. 界面力学[M]. 北京: 科学出版社, 2006.
- [3] 李俊林, 张少琴, 杨维阳. 正交异性双材料界面裂纹尖端应力场[J]. 应用数学和力学, 2008, 29(8): 947-953.
- [4] 郑百林, 戴瑛, 嵇醒, 等. 双材料反平面问题界面端奇异应力场分析[J]. 应用力学学报, 1992, 16(4): 21-26.
- [5] 杨维阳, 李俊林, 张雪霞. 复合材料断裂复变方法[M]. 北京: 科学出版社, 2005.
- [6] 邵小军, 岳珠峰, 李立州, 等. 复合材料中厚层合板在轴压位移和剪切作用下的稳定性研究[J]. 机械强度, 2006, 28(5): 716-720.

S t r e s s F i e l d A n a l y s i s o n A n t i - P l a n e O r t h o t r o p i c
B i - M a t e r i a l s o f I n t e r f a c e E n d

L I J u n - l i n , W A N G X i a o - l i

(School of Applied Science, Taiyuan University of Science and Technology ,
Taiyuan 030024, P. R. China)

Abstract: Orthotropic bi-materials anti-plane interface end of flat lap was studied by constructing new stress function and using composite complex function method of material fracture. The expression of stress fields, displacements fields and stress intensity factor around flat lap interface end, are derived by solving a class of generalized bi-harmonic equations. The result shows: this type of problems has one singularity, the stress fields has no singularity when two materials constant ratio $\# > 0$, *the stress field has power singularity, and singularity index trends to $-1/2$ as $\#$ increases.* FEM analysis was done to verify correction of the derived equation.

Key words: orthotropic; anti-plane; flat lap; interface end; stress fields; FEM