文章编号: 1000-0887(2009) 09-1107-10

求解非线性不适定问题的隐式迭代法*

柳建军[1,2], 贺国强[1], 康传刚[1]

(1. 上海大学 数学系, 上海 200444;
2. 中国石油管道研究中心, 河北 廊坊 065000)

(郭兴明推荐)

摘要: 将处理线性不适定算子方程的隐式迭代法推广到非线性不适定问题, 证明了迭代解误差序列的单调性, 并进一步利用迭代误差的单调性得出求解非线性不适定问题隐式迭代法对精确方程和扰动方程的收敛性.

关 键 词: 非线性不适定问题; 非线性隐式迭代法; 单调性; 收敛性
中图分类号: O241 文献标识码: A
DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2009.09.013

引 言

目前, 关于线性不适定问题的理论研究已相对完善, 实际应用中也取得良好效果, 而非线性不适定问题的理论和实践都还有许多有待完善的地方[1]. 事实上, 大部分数学物理反问题都是用非线性模型描述的, 比如参数识别问题, 逆散射问题以及第一类非线性 Fredholm 方程的求解问题等, 它们往往归结为求解下面的非线性不适定算子方程:

$$F(x) = y, \tag{1}$$

其中, $F: D(F) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ 是一个非线性算子, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ 是 Hilbert 空间. 不适定性是指即使解 $x = x^+$ 被右端 y 唯一确定, 但映射 $y \mapsto x$ 缺乏连续性. 在实际问题中, 右端数据 y 一般通过测量得到, 常含有扰动, 因此上面的方程一般又写为具有扰动右端的形式:

$$F(x) = y^\delta, \tag{2}$$

且满足 $\|y^\delta - y\| \leqslant \delta$, δ 是扰动水平.

求解非线性不适定问题主要有两类方法: 变分法和迭代法[2-4]. 作为变分方法中最重要的非线性 Tikhonov 正则化方法, 通过极小化 Tikhonov 泛函 $J_\alpha(x)$ 得到方程(2) 的近似解 x_α^δ, 即

$$J_\alpha(x) = \|y^\delta - F(x)\|^2 + \alpha\|x - x\|^2,$$

$$x_\alpha^\delta = \arg\min_x J_\alpha(x),$$

* 收稿日期: 2008-07-28; 修订日期: 2009-07-02
基金项目: 上海市重点学科(第三期) 资助项目(S30104); 上海市教委重点学科建设资助项目(J50101)
作者简介: 柳建军(1980—), 男, 河北人, 博士;
贺国强(1946—), 男, 上海人, 教授(联系人. Tel: +86-21-54137079; E-mail: gqhe@staff.shu.edu.cn);
康传刚(1978—), 男, 山东人, 博士.

其中 x 是真解 $x^{\dagger}$ 的某个给定的初始猜测值. 对于固定 $\alpha>0$ 和迭代初值 x_0^δ, 借鉴线性定常隐式迭代法的思想[5], 应用非线性 Tikhonov 正则化方法求解方程(2), 产生如下迭代序列:

$$\begin{cases} x_{n+1}^\delta = \arg\min\limits_x J_\alpha(x, x_n^\delta), & n=0,1,2,\cdots, \\ J_\alpha(x, x_n^\delta) = \|y^\delta - F(x)\|^2 + \alpha\|x - x_n^\delta\|^2, \end{cases} \tag{3}$$

即每步迭代计算 x_{n+1}^δ 都用上一步的计算结果 x_n^δ 更新 Tiknonov 泛函中的 x, 就得到非线性隐式迭代法. 因为有理由认为, 得到的迭代解 x_n^δ 是对 $x^{\dagger}$ 比 x 更好的近似, 从直观上来看隐式迭代法比 Tikhonov 方法应该有更好的计算效果(事实上, 对线性不适定问题确是如此[5-6]), 但尚未见到有关非线性不适定问题分析方面的结果.

本文安排如下: 第 1 节给出非线性隐式迭代法解的存在性; 第 2 节证明迭代解误差序列的单调性; 第 3 节利用迭代误差的单调性得出非线性隐式迭代法对精确方程和扰动方程的收敛分析.

1 非线性隐式迭代法解的存在性

令

$$r^\delta = \frac{\|y^\delta - F(x_0^\delta)\|}{\sqrt{\alpha}}, \tag{4}$$

$$J(x) = \|y^\delta - F(x)\|^2, \tag{5}$$

关于 $J_\alpha(x, x_n^\delta)$ 极小点的存在性, 有如下定理.

定理 1 对任意固定的 $\alpha>0$ 和 x_n^δ, $J_\alpha(x, x_n^\delta)$ 的极小点总存在, 且极小点满足

$$x_{n+1}^\delta \in K_{r^\delta}(x_n^\delta), \tag{6}$$

$$\|y^\delta - F(x_{n+1}^\delta)\| \leqslant \|y^\delta - F(x_n^\delta)\|, \qquad n=0,1,2\cdots, \tag{7}$$

其中 $K_r(z)$ 表示以 z 为球心 r 为半径的闭球.

证明 对任意固定的 $\alpha>0$ 和 x_n^δ, 由(3)式定义的泛函 $J_\alpha(x, x_n^\delta)$ 是强制的, 因此极小点存在且有界. 下面应用数学归纳法证明 $x_{n+1}^\delta \in K_{r^\delta}(x_n^\delta)$. 当 $n=0$ 时, $x_1^\delta = \arg\min_x J_\alpha(x, x_0^\delta)$, 由 r^δ 的定义(4)可得

$$\alpha\|x_1^\delta - x_0^\delta\|^2 \leqslant J_\alpha(x_1^\delta, x_0^\delta) \leqslant J_\alpha(x_0^\delta, x_0^\delta) = J(x_0^\delta) = \|y^\delta - F(x_0^\delta)\|^2,$$

$$\|x_1^\delta - x_0^\delta\|^2 \leqslant \frac{\|y^\delta - F(x_0^\delta)\|^2}{\alpha} = (r^\delta)^2.$$

于是, $x_1^\delta \in K_{r^\delta}(x_0^\delta)$, 同时

$$\|y^\delta - F(x_1^\delta)\|^2 \leqslant J_\alpha(x_1^\delta, x_0^\delta) = J(x_0^\delta) \leqslant \|y^\delta - F(x_0^\delta)\|^2.$$

假设 $n=k-1$ 时, (6) 式和(7)式成立, 即对于 $i=1,2,\cdots,k-1$ 有

$$x_i^\delta \in K_{r^\delta}(x_{i-1}^\delta),$$

$$\|y^\delta - F(x_i^\delta)\|^2 \leqslant \|y^\delta - F(x_{i-1}^\delta)\|^2.$$

当 $n=k$ 时

$$\alpha\|x_k^\delta - x_{k-1}^\delta\|^2 \leqslant J_\alpha(x_k^\delta, x_{k-1}^\delta) \leqslant J_\alpha(x_{k-1}^\delta, x_{k-1}^\delta) = J(x_{k-1}^\delta) = \|y^\delta - F(x_{k-1}^\delta)\|^2,$$

$$\|x_k^\delta - x_{k-1}^\delta\|^2 \leqslant \frac{\|y - F(x_{k-1}^\delta)\|^2}{\alpha} \leqslant \frac{\|y - F(x_0^\delta)\|^2}{\alpha} = (r^\delta)^2,$$

因此有

$$x_k^\delta \in K_{r^\delta}(x_{k-1}^\delta),$$

$$\| y^{\delta} - F(x_k^{\delta}) \|^2 \leqslant J_{\alpha}(x_k^{\delta}, x_{k-1}^{\delta}) = J(x_{k-1}^{\delta}) = \| y^{\delta} - F(x_{k-1}^{\delta}) \|^2 .$$

即(6)式和(7)式对 $n = k$ 成立, 于是定理得证. □

定理1证明了非线性隐式迭代法的解的存在性结果, 下面我们给出关于非线性隐式迭代法迭代解误差序列单调性的结果, 其中关键的一点是证明迭代解误差序列的单调性.

2 非线性隐式迭代法的迭代解误差序列的单调性

首先, 给出一些假设, 这些假设在非线性不适定问题中经常用到[7-8].

假设2 设存在某个以方程(4)的精确解 $x^{\dagger}$ 为中心、$r > 0$ 为半径的球 $\mathcal{B}(x^{\dagger}, r) \subset D(F)$, 满足

(i) 局部 Lipschitz 条件: 即对所有的 $x, x \in \mathcal{B}(x^{\dagger}, r)$ 成立

$$\| F'(x) - F'(x) \| \leqslant L \| x - x \| ; \tag{8}$$

(ii) 存在某个常数 $\eta > 0$, 对所有的 $x, x \in \mathcal{B}(x^{\dagger}, r)$ 成立

$$\| F(x) - F(x) - F'(x)(x - x) \| \leqslant \eta \| x - x \| \| F(x) - F(x) \| . \tag{9}$$

实际上, 由假设2(i)的局部 Lipschitz 条件可以推出 $F'(\cdot)$ 局部有界, 即

$$M = \sup\left\{ \| F'(x) \| \mid x \in \mathcal{B}(x^{\dagger}, r) \right\} < \infty, \tag{10}$$

因为 M 至少满足

$$M \leqslant \| F'(x^{\dagger}) \| + \| F'(x) - F'(x^{\dagger}) \| \leqslant \| F'(x^{\dagger}) \| + Lr .$$

首先考虑方程(1)右端精确即 $y^{\delta} = y$ 的情况, 此时的迭代解记为 x_n, $r^{\delta} = r$, $J_{\alpha}(x, x_{n-1})$ 的导映像为

$$J_{\alpha}'(x, x_{n-1})h = 2\langle F'(x)h, y - F(x) \rangle + 2\alpha \langle h, x - x_{n-1} \rangle, \qquad \forall h \in \mathcal{X}, \tag{11}$$

则由 $J_{\alpha}(x, x_{n-1})$ 极小点 x_n 满足的必要性条件 $J_{\alpha}'(x_n, x_{n-1}) = 0$ 可得

$$x_n = \frac{1}{\alpha} F'(x_n)^* (y - F(x_n)) + x_{n-1} . \tag{12}$$

定理3 设 $y^{\delta} = y = F(x^{\dagger})$ 对某个 $x^{\dagger} \in D(F)$ 成立, 并且假设2成立. 选取 $\alpha > 0$ 和迭代初值 $x_0 \in \mathcal{B}(x^{\dagger}, r)$ 满足

(i) $\alpha \geqslant \alpha_0^2 M^2$, 其中常数 $\alpha_0 > \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}$;

(ii) $\| x_0 - x^{\dagger} \| < \dfrac{2\alpha_0^2 - 2\alpha_0 - 1}{2(L/\sqrt{\alpha} + \eta)\alpha_0^2}$;

(iii) $r + \dfrac{2\alpha_0^2 - 2\alpha_0 - 1}{2(L/\sqrt{\alpha} + \eta)\alpha_0^2} \leqslant r$.

则非线性隐式迭代法的迭代误差序列 $\left\{ \| x_n - x^{\dagger} \| \right\}$ 单调下降, 并且存在常数 $\gamma_0 < 0$, 使得

$$\| x^{\dagger} - x_{n+1} \|^2 - \| x^{\dagger} - x_n \|^2 \leqslant \gamma_0 \| y - F(x_n) \|^2 < 0, \qquad n = 0, 1, \cdots . \tag{13}$$

证明 用数学归纳法证明. 当 $n = 0$ 时, 利用 $x_1 = (1/\alpha) F'(x_1)^* (y - F(x_1)) + x_0$ 有如下估计:

$$\begin{aligned}
&\| x^{\dagger} - x_1 \|^2 - \| x^{\dagger} - x_0 \|^2 = \\
&\quad 2\langle x_0 - x^{\dagger}, x_1 - x_0 \rangle + \| x_1 - x_0 \|^2 = \\
&\quad \frac{2}{\alpha} \langle y - F(x_1), F'(x_1)(x_0 - x^{\dagger}) \rangle + \| x_1 - x_0 \|^2 = \\
&\quad \frac{2}{\alpha} \langle y - F(x_1), (F'(x_1) - F'(x_0))(x_0 - x^{\dagger}) \rangle +
\end{aligned}$$

$$\frac{2}{\alpha}\langle y-F(x_1),F(\bar{x})-F(x_0)-F'(x_0)(\bar{x}-x_0)\rangle-$$
$$\frac{2}{\alpha}\langle y-F(x_1),F(\bar{x})-F(x_0)\rangle+\|x_1-x_0\|^2=$$
$$\frac{2}{\alpha}\langle y-F(x_1),(F'(x_1)-F'(x_0))(x_0-\bar{x})\rangle+$$
$$\frac{2}{\alpha}\langle y-F(x_1),F(\bar{x})-F(x_0)-F'(x_0)(\bar{x}-x_0)\rangle-$$
$$\frac{2}{\alpha}\|y-F(x_0)\|^2+\frac{2}{\alpha}\langle F(x_1)-F(x_0),y-F(x_0)\rangle+\|x_1-x_0\|^2=:$$
$$\mathrm{I}+\mathrm{II}-\frac{2}{\alpha}\|y-F(x_0)\|^2+\mathrm{III}+\mathrm{IV}.$$

由(6)式及假设(ii)、(iii)可得

$$\|x_1-\bar{x}\|\leqslant\|x_1-x_0\|+\|x_0-\bar{x}\|\leqslant r,$$

所以

$$x_1\in K_r(x_0)\subset\mathcal{B}(\bar{x},r).\tag{14}$$

根据(14)式,即有 $\|x_1-x_0\|\leqslant r\leqslant\|y-F(x_0)\|/\sqrt{\alpha}$, 再结合(7)式和(8)式可以推出

$$\mathrm{I}=\frac{2}{\alpha}\langle y-F(x_1),(F'(x_1)-F'(x_0))(x_0-\bar{x})\rangle\leqslant$$
$$\frac{2}{\alpha}L\|x_1-x_0\|\,\|x_0-\bar{x}\|\,\|y-F(x_1)\|\leqslant$$
$$\frac{2}{\alpha}\frac{L}{\sqrt{\alpha}}\|x_0-\bar{x}\|\,\|y-F(x_0)\|^2.$$

由假设2(ii)和(7)式推出

$$\mathrm{II}=\frac{2}{\alpha}\langle y-F(x_1),F(\bar{x})-F(x_0)-F'(x_0)(\bar{x}-x_0)\rangle\leqslant$$
$$\frac{2}{\alpha}\eta\|x_0-\bar{x}\|\,\|y-F(x_0)\|\,\|y-F(x_1)\|\leqslant$$
$$\frac{2}{\alpha}\eta\|x_0-\bar{x}\|\,\|y-F(x_0)\|^2.$$

由(7)式、(10)式和(14)式推出

$$\mathrm{III}=\frac{2}{\alpha}\langle F(x_1)-F(x_0),y-F(x_0)\rangle\leqslant$$
$$\frac{2}{\alpha}\sup_{x\in K_r(x_0)}\|F'(x)\|\,\|x_1-x_0\|\,\|y-F(x_0)\|\leqslant$$
$$\frac{2}{\alpha}\frac{M}{\sqrt{\alpha}}\|y-F(x_0)\|^2.$$

由(7)式和(14)式推出

$$\mathrm{IV}=\|x_1-x_0\|^2=\frac{1}{\alpha^2}\langle y-F(x_1),F'(x_1)F'(x_1)^*(y-F(x_1))\rangle\leqslant$$
$$\frac{1}{\alpha}\left(\frac{M}{\sqrt{\alpha}}\right)^2\|y-F(x_0)\|^2.$$

综上可得

$$\|\bar{x}-x_1\|^2-\|\bar{x}-x_0\|^2\leqslant$$
$$\frac{2}{\alpha}\left(\left(\frac{L}{\sqrt{\alpha}}+\eta\right)\|x_0-\bar{x}\|-1+\frac{M}{\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{2}\left(\frac{M}{\sqrt{\alpha}}\right)^2\right)\|y-F(x_0)\|^2.$$

令

$$\gamma_0 = \frac{2}{\alpha}\left(\left(\frac{L}{\sqrt{\alpha}} + \eta\right)\|x_0 - \bar{x}\| - 1 + \frac{M}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{2}\left(\frac{M}{\sqrt{\alpha}}\right)^2\right),$$

由于 $\alpha \geqslant \alpha_0^2 M^2$, 所以 $M/\sqrt{\alpha} \leqslant 1/\alpha_0$, 于是

$$\gamma_0 \leqslant \frac{2}{\alpha}\left(\left(\frac{L}{\sqrt{\alpha}} + \eta\right)\|x_0 - \bar{x}\| - 1 + \frac{1}{\alpha_0} + \frac{1}{2\alpha_0^2}\right).$$

再由上面的估计, 我们有 $\gamma_0 < 0$. 所以

$$\|\bar{x} - x_1\|^2 - \|\bar{x} - x_0\|^2 \leqslant \gamma_0 \|y - F(x_0)\|^2 < 0, \tag{15}$$

即(13)式对 $n = 0$ 成立, 且

$$\|\bar{x} - x_1\| < \|\bar{x} - x_0\| < \frac{2\alpha_0^2 - 2\alpha_0 - 1}{2(L/\sqrt{\alpha} + \eta)\alpha_0^2}.$$

同时, 由假设(iii)还有 $K_r(x_1) \subset \mathcal{B}(\bar{x}, r)$.

假设结论对 $n = k - 1$ 时也成立, 则

$$\|\bar{x} - x_k\| < \|\bar{x} - x_{k-1}\| < \cdots < \|\bar{x} - x_0\| < \frac{2\alpha_0^2 - 2\alpha_0 - 1}{2(L/\sqrt{\alpha} + \eta)\alpha_0^2}, \tag{16}$$

$$K_r(x_k) \subset \mathcal{B}(\bar{x}, r). \tag{17}$$

当 $n = k$ 时, 类似有

$$\begin{aligned}
&\|\bar{x} - x_{k+1}\|^2 - \|\bar{x} - x_k\|^2 = \\
&\quad 2\langle x_k - \bar{x}, x_{k+1} - x_k\rangle + \|x_{k+1} - x_k\|^2 = \\
&\quad \frac{2}{\alpha}\langle y - F(x_{k+1}), F'(x_{k+1})(x_k - \bar{x})\rangle + \|x_{k+1} - x_k\|^2 = \\
&\quad \frac{2}{\alpha}\langle y - F(x_{k+1}), (F'(x_{k+1}) - F'(x_k))(x_k - \bar{x})\rangle + \\
&\quad \frac{2}{\alpha}\langle y - F(x_{k+1}), F(\bar{x}) - F(x_k) - F'(x_k)(\bar{x} - x_k)\rangle - \\
&\quad \frac{2}{\alpha}\langle y - F(x_{k+1}), F(\bar{x}) - F(x_k)\rangle + \|x_{k+1} - x_k\|^2 = \\
&\quad \frac{2}{\alpha}\langle y - F(x_{k+1}), (F'(x_{k+1}) - F'(x_k))(x_k - \bar{x})\rangle + \\
&\quad \frac{2}{\alpha}\langle y - F(x_{k+1}), F(\bar{x}) - F(x_k) - F'(x_k)(\bar{x} - x_k)\rangle - \\
&\quad \frac{2}{\alpha}\|y - F(x_k)\|^2 + \frac{2}{\alpha}\langle F(x_{k+1}) - F(x_k), y - F(x_k)\rangle + \|x_{k+1} - x_k\|^2 =: \\
&\quad \mathrm{I}_k + \mathrm{II}_k - \frac{2}{\alpha}\|y - F(x_k)\|^2 + \mathrm{III}_k + \mathrm{IV}_k.
\end{aligned}$$

类似 $n = 0$ 情况, 应用(7)式、(12)式、(16)式和(17)式可分别估计出

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_k &= \frac{2}{\alpha}\langle y - F(x_{k+1}), (F'(x_{k+1}) - F'(x_k))(x_k - \bar{x})\rangle \leqslant \\
&\quad \frac{2}{\alpha}\frac{L}{\sqrt{\alpha}}\|x_k - \bar{x}\|\,\|y - F(x_k)\|^2, \\
\mathrm{II}_k &= \frac{2}{\alpha}\langle y - F(x_{k+1}), F(\bar{x}) - F(x_k) - F'(x_k)(\bar{x} - x_k)\rangle \leqslant \\
&\quad \frac{2}{\alpha}\eta\|x_k - \bar{x}\|\,\|y - F(x_k)\|^2, \\
\mathrm{III}_k &= \frac{2}{\alpha}\langle F(x_{k+1}) - F(x_k), y - F(x_k)\rangle \leqslant \frac{2}{\alpha}\frac{M}{\sqrt{\alpha}}\|y - F(x_k)\|^2,
\end{aligned}$$

$$\mathrm{IV}_k = \|x_{k+1} - x_k\|^2 \leqslant \frac{1}{\alpha}\left(\frac{M}{\sqrt{\alpha}}\right)^2 \|y - F(x_k)\|^2.$$

综上可得

$$\|\bar{x} - x_{k+1}\|^2 - \|\bar{x} - x_k\|^2 \leqslant \gamma_0 \|y - F(x_k)\|^2 < 0.$$

由数学归纳法, 定理得证. □

注 4 看一下选取 α 和 x_0 满足的 3 个条件. 首先, 定理 3(i) 中的 $\alpha_0 > (1+\sqrt{3})/2$ 保证定理 3(ii) 中不等号右端 $(2\alpha_0^2 - 2\alpha_0 - 1)/(2(L/\sqrt{\alpha} + \eta)\alpha_0^2) > 0$, 即满足定理 3(ii) 的 x_0 一定存在, 并且当 $\alpha_0 \to (1+\sqrt{3})/2$ 时 $(2\alpha_0^2 - 2\alpha_0 - 1)/(2(L/\sqrt{\alpha} + \eta)\alpha_0^2) \to 0$; 其次, 由 r 的定义, 当 $\alpha \to \infty$ 时 $r \to 0$, 总存在 α_0(充分接近 $(1+\sqrt{3})/2$) 和 α (充分大) 的选取方式, 使得定理 3(iii) 成立.

下面讨论方程(1) 右端有扰动的情况. 由于误差 δ 的存在, 迭代步数不能无限增大, 必须配以合适的终止准则. 我们应用下面形式的残差准则[2]:

$$\|y^\delta - F(x^\delta_{n(\delta)})\| \leqslant \tau\delta, \qquad \tau = \text{const} > 1, \tag{18}$$

即第一个满足(18) 式的 $n(\delta)$ 作为终止迭代步数. 类似地可以得到方程(1) 右端有扰动时迭代误差的单调性定理.

定理 5 若假设 2 满足, $F(\bar{x}) = y$ 对某个 $\bar{x} \in D(F)$ 成立且 $\|y - y^\delta\| \leqslant \delta$. 选取 $\alpha > 0$ 和迭代初值 $x_0^\delta \in \mathcal{B}(\bar{x}, r)$ 满足:

(i) $\alpha \geqslant \alpha_0^2 M^2$, 其中常数 $\alpha_0 > \dfrac{\tau + \sqrt{3\tau^2 - 2\tau}}{2\tau - 2}$;

(ii) $\|x_0^\delta - \bar{x}\| < \dfrac{(2\tau - 2)\alpha_0^2 - 2\tau\alpha_0 - \tau}{2\tau(L/\sqrt{\alpha} + \eta + \eta/\tau)\alpha_0^2}$;

(iii) $r^\delta + \dfrac{(2\tau - 2)\alpha_0^2 - 2\tau\alpha_0 - \tau}{2\tau(L/\sqrt{\alpha} + \eta + \eta/\tau)\alpha_0^2} \leqslant r$.

则配以残差准则(18) 的非线性隐式迭代法的迭代误差序列 $\left\{\|x_n^\delta - \bar{x}\|\right\}_{n=0}^{n(\delta)}$ 单调下降, 并且存在常数 $\gamma_0^\delta < 0$, 使得

$$\|\bar{x} - x_{n+1}^\delta\|^2 - \|\bar{x} - x_n^\delta\|^2 \leqslant \gamma_0^\delta \|y^\delta - F(x_n^\delta)\|^2 < 0, \qquad 0 \leqslant n \leqslant n(\delta) - 1. \tag{19}$$

证明 用数学归纳法证明. 当 $n = 0$ 时, 利用 $x_1^\delta = (1/\alpha)F'(x_1^\delta)^*(y - F(x_1^\delta)) + x_0^\delta$ 有如下估计:

$$\begin{aligned}
&\|\bar{x} - x_1^\delta\|^2 - \|\bar{x} - x_0^\delta\|^2 = \\
&\quad \frac{2}{\alpha}\langle y^\delta - F(x_1^\delta), (F'(x_1^\delta) - F'(x_0^\delta))(x_0^\delta - \bar{x})\rangle + \\
&\quad \frac{2}{\alpha}\langle y^\delta - F(x_1^\delta), F(\bar{x}) - F(x_0^\delta) - F'(x_0^\delta)(\bar{x} - x_0^\delta)\rangle - \\
&\quad \frac{2}{\alpha}\langle y^\delta - F(x_1^\delta), F(\bar{x}) - F(x_0^\delta)\rangle + \|x_1^\delta - x_0^\delta\|^2 = \\
&\quad \frac{2}{\alpha}\langle y^\delta - F(x_1^\delta), (F'(x_1^\delta) - F'(x_0^\delta))(x_0^\delta - \bar{x})\rangle + \\
&\quad \frac{2}{\alpha}\langle y^\delta - F(x_1^\delta), F(\bar{x}) - F(x_0^\delta) - F'(x_0^\delta)(\bar{x} - x_0^\delta)\rangle - \\
&\quad \frac{2}{\alpha}\langle y^\delta - F(x_1^\delta), y - y^\delta\rangle - \frac{2}{\alpha}\langle y^\delta - F(x_1^\delta), y^\delta - F(x_0^\delta)\rangle + \|x_1^\delta - x_0^\delta\|^2 =
\end{aligned}$$

$$\frac{2}{\alpha}\langle y^{\delta}-F(x_1^{\delta}),(F'(x_1^{\delta})-F'(x_0^{\delta}))(x_0^{\delta}-\bar{x})\rangle+$$
$$\frac{2}{\alpha}\langle y^{\delta}-F(x_1^{\delta}),F(\bar{x})-F(x_0^{\delta})-F'(x_0^{\delta})(\bar{x}-x_0^{\delta})\rangle+$$
$$\frac{2}{\alpha}\langle y^{\delta}-F(x_1^{\delta}),y^{\delta}-y\rangle-\frac{2}{\alpha}\|y^{\delta}-F(x_0^{\delta})\|^2+$$
$$\frac{2}{\alpha}\langle F(x_1^{\delta})-F(x_0^{\delta}),y^{\delta}-F(x_0^{\delta})\rangle+\|x_1^{\delta}-x_0^{\delta}\|^2=:$$
$$\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}-\frac{2}{\alpha}\|y-F(x_0^{\delta})\|^2+\mathrm{IV}+\mathrm{V}.$$

类似(14)式,有
$$x_1^{\delta}\in K_{r^{\delta}}(x_0^{\delta})\subset\mathcal{B}(\bar{x},r).$$
注意,当 x_0^{δ} 不满足残差准则(18),即
$$\|y^{\delta}-F(x_0^{\delta})\|>\tau\delta \tag{20}$$
时,由假设2(ii)可推出
$$\|F(\bar{x})-F(x_0^{\delta})-F'(x_0^{\delta})(\bar{x}-x_0^{\delta})\|\leqslant\eta\|\bar{x}-x_0^{\delta}\|\|y-F(x_0^{\delta})\|=$$
$$\eta\|\bar{x}-x_0^{\delta}\|\|y-y^{\delta}+y^{\delta}-F(x_0^{\delta})\|\leqslant$$
$$\left(\frac{\eta}{\tau}+\eta\right)\|\bar{x}-x_0^{\delta}\|\|y^{\delta}-F(x_0^{\delta})\|.$$
对Ⅰ、Ⅱ、Ⅳ、Ⅴ估计完全类似于定理3,这里不再详述.下面重点估计Ⅲ,由(20)式得
$$\mathrm{III}=\frac{2}{\alpha}\langle y^{\delta}-F(x_1^{\delta}),y^{\delta}-y\rangle\leqslant$$
$$\frac{2}{\alpha}\|y^{\delta}-F(x_1^{\delta})\|\|y^{\delta}-y\|\leqslant\frac{2}{\alpha\tau}\|y^{\delta}-F(x_0^{\delta})\|^2.$$
于是可得
$$\|\bar{x}-x_1^{\delta}\|^2-\|\bar{x}-x_0^{\delta}\|^2\leqslant$$
$$\frac{2}{\alpha}\left(\left(\frac{L}{\sqrt{\alpha}}+\frac{\eta}{\tau}+\eta\right)\|x_0^{\delta}-\bar{x}\|+\frac{1}{\tau}-1+\frac{M}{\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{2}\left(\frac{M}{\sqrt{\alpha}}\right)^2\right)\|y^{\delta}-F(x_0^{\delta})\|^2.$$
令
$$\gamma_0^{\delta}=\frac{2}{\alpha}\left(\left(\frac{L}{\sqrt{\alpha}}+\frac{\eta}{\tau}+\eta\right)\|x_0^{\delta}-\bar{x}\|+\frac{1}{\tau}-1+\frac{M}{\sqrt{\alpha}}+\frac{1}{2}\left(\frac{M}{\sqrt{\alpha}}\right)^2\right),$$
由于 $\alpha\geqslant\alpha_0^2M^2$, 所以
$$\gamma_0^{\delta}\leqslant\frac{2}{\alpha}\left(\left(\frac{L}{\sqrt{\alpha}}+\frac{\eta}{\tau}+\eta\right)\|x_0^{\delta}-\bar{x}\|+\frac{1}{\tau}-1+\frac{1}{\alpha_0}+\frac{1}{2\alpha_0^2}\right).$$
再由(i)、(ii)即有 $\gamma_0^{\delta}<0$, 所以
$$\|\bar{x}-x_1^{\delta}\|^2-\|\bar{x}-x_0^{\delta}\|^2\leqslant\gamma_0^{\delta}\|y^{\delta}-F(x_0^{\delta})\|^2<0,$$
即(19)式对 $n=0$ 成立,且
$$\|\bar{x}-x_1^{\delta}\|<\|\bar{x}-x_0^{\delta}\|<\frac{(2\tau-2)\alpha_0^2-2\tau\alpha_0-\tau}{2\tau(L/\sqrt{\alpha}+\eta+\eta/\tau)\alpha_0^2},$$
同时,由假设(iii),还有
$$K_{r^{\delta}}(x_1^{\delta})\subset\mathcal{B}(\bar{x},r).$$
当 $n=k\leqslant n(\delta)-1$ 时,类似可得
$$\|\bar{x}-x_{k+1}^{\delta}\|^2-\|\bar{x}-x_k^{\delta}\|^2\leqslant\gamma_0^{\delta}\|y^{\delta}-F(x_k^{\delta})\|^2<0,$$
即证得定理结论成立. □

3 非线性隐式迭代法的收敛性分析

首先考虑方程(1)右端精确时隐式迭代法的收敛性.

定理6 在定理3的条件下, 当 $n\to\infty$ 时迭代序列$\{x_n\}$收敛到方程(1)的一个解.

证明 由定理3, $\{\|\bar{x}-x_n\|\}$在整个迭代中单调下降, 下面证明$\{x_n\}$是Cauchy序列. 令 $e_n=\bar{x}-x_n$. 给定 $m,n\in\mathbf{N}(m>n)$, 由(7)式得

$$\|y-F(x_m)\|\leqslant\|y-F(x_i)\|,\qquad i=n,n+1,\cdots,m-1. \tag{21}$$

现在考虑

$$\|e_m-e_n\|^2=\|e_n\|^2-\|e_m\|^2+2\langle e_m-e_n,e_m\rangle. \tag{22}$$

由(12)式可得

$$|\langle e_m-e_n,e_m\rangle|=\left|\left\langle\sum_{i=n}^{m-1}\frac{1}{\alpha}F'(x_{i+1})^*(y-F(x_{i+1})),e_m\right\rangle\right|\leqslant$$
$$\sum_{i=n}^{m-1}\frac{1}{\alpha}\|y-F(x_{i+1})\|\,\|F'(x_{i+1})e_m\|, \tag{23}$$

和式中各项的因子 $\|F'(x_{i+1})e_m\|$ 可通过(9)式估计为

$$\|F'(x_{i+1})e_m\|=\|F'(x_{i+1})e_{i+1}-F'(x_{i+1})(x_m-x_{i+1})\|\leqslant$$
$$\|y-F(x_{i+1})-F'(x_{i+1})e_{i+1}\|+$$
$$\|F(x_m)-F(x_{i+1})-F'(x_{i+1})(x_m-x_{i+1})\|+\|y-F(x_m)\|\leqslant$$
$$\eta\|\bar{x}-x_{i+1}\|\,\|y-F(x_{i+1})\|+$$
$$\eta\|x_m-x_{i+1}\|\,\|F(x_m)-F(x_{i+1})\|+\|y-F(x_m)\|.$$

由$\{\|\bar{x}-x_n\|\}$的单调性、$\|\bar{x}-x_0\|<(2\alpha_0^2-2\alpha_0-1)/(2(L/\sqrt{\alpha}+\eta)\alpha_0^2)$ 及(21)式, 有

$$\|F'(x_{i+1})e_m\|\leqslant\eta\frac{2\alpha_0^2-2\alpha_0-1}{2(L/\sqrt{\alpha}+\eta)\alpha_0^2}\|y-F(x_{i+1})\|+$$
$$2\eta\frac{2\alpha_0^2-2\alpha_0-1}{2(L/\sqrt{\alpha}+\eta)\alpha_0^2}\|F(x_m)-F(x_{i+1})\|+\|y-F(x_m)\|\leqslant$$
$$3\eta\frac{2\alpha_0^2-2\alpha_0-1}{2(L/\sqrt{\alpha}+\eta)\alpha_0^2}\|y-F(x_{i+1})\|+$$
$$\left[2\eta\frac{2\alpha_0^2-2\alpha_0-1}{2(L/\sqrt{\alpha}+\eta)\alpha_0^2}+1\right]\|y-F(x_m)\|\leqslant$$
$$\left(5\eta\frac{2\alpha_0^2-2\alpha_0-1}{2(L/\sqrt{\alpha}+\eta)\alpha_0^2}+1\right)\|y-F(x_{i+1})\|.$$

因此由(13)式、(23)式和 $\|y-F(x_{i+1})\|\leqslant\|y-F(x_i)\|$ 可得

$$|\langle e_m-e_n,e_m\rangle|\leqslant\left(5\eta\frac{2\alpha_0^2-2\alpha_0-1}{2(L/\sqrt{\alpha}+\eta)\alpha_0^2}+1\right)\sum_{i=n}^{m-1}\frac{1}{\alpha}\|y-F(x_{i+1})\|^2\leqslant$$
$$\frac{1}{\alpha}\left(5\eta\frac{2\alpha_0^2-2\alpha_0-1}{2(L/\sqrt{\alpha}+\eta)\alpha_0^2}+1\right)\sum_{i=n}^{m-1}\|y-F(x_i)\|^2\leqslant$$
$$\frac{1}{-\gamma_0\alpha}\left(5\eta\frac{2\alpha_0^2-2\alpha_0-1}{2(L/\sqrt{\alpha}+\eta)\alpha_0^2}+1\right)(\|\bar{x}-x_n\|^2-\|\bar{x}-x_m\|^2).$$

由上式和(22)式得

$$\|e_m-e_n\|^2\leqslant(2\lambda+1)(\|\bar{x}-x_n\|^2-\|\bar{x}-x_m\|^2),$$

其中 $$\lambda = \frac{1}{-\gamma_0\alpha}\left(5\eta\frac{2\alpha_0^2 - 2\alpha_0 - 1}{2(L/\sqrt{\alpha} + \eta)\alpha_0^2} + 1\right)$$
不依赖于 m, n. 于是有
$$\|x_m - x_n\|^2 = \|e_m - e_n\|^2 \leqslant (2\lambda + 1)(\|\bar{x} - x_n\|^2 - \|\bar{x} - x_m\|^2).$$
由迭代误差的单调性, 当 $m, n \to \infty$ 时, 上式右端趋向于 0, 所以 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列.

记 x_n 的极限为 x. 由 (13) 式可得 $\sum_{n=0}^{\infty}\|y - F(x_n)\|^2$ 收敛, 所以当 $n \to \infty$ 时, $F(x_n) \to y$, 这样就证明了 x 是方程 (1) 的一个解. □

下面讨论方程 (1) 右端有扰动时非线性隐式迭代法的收敛性, 相应的迭代值仍记为 x_n^δ. 为防止迭代发散, 使用残差准则 (18) 终止迭代.

定理 7 在定理 5 的条件, 残差准则使求解方程 (2) 的非线性隐式迭代法在 $n(\delta) < \infty$ 步后停止, 且当 $\delta \to 0$ 时, 由非线性隐式迭代法得到的迭代序列 $\{x_{n(\delta)}^\delta\}$ 收敛于方程 (1) 的一个解.

证明 由定理 5, 当 $0 \leqslant n \leqslant n(\delta)$ 时, $\{\|x_n^\delta - \bar{x}\|\}$ 单调下降. 对于 (19) 式从 $n = 0$ 到 $n(\delta) - 1$ 求和, 可得
$$n(\delta)\tau^2\delta^2 \leqslant \sum_{n=0}^{n(\delta)-1}\|y - F(x_n)\|^2 \leqslant \frac{1}{-\gamma_0^\delta}\|\bar{x} - x_0^\delta\| < \infty,$$
这就证明了 $n(\delta)$ 是一个有限数.

下面考虑 $\delta \to 0$ 时 $x_{n(\delta)}^\delta$ 的收敛性, 先讨论两种特殊情况.

第 1 种情况: 假设对所有的 $\delta > 0$, $n(\delta) = n$. 由算子 F, F' 的连续性, 可得当 $\delta \to 0$ 时, $x_n^\delta \to x_n$, 其中 x_n 是右端 y 精确时用同样算法计算得到的第 n 步的迭代解. 此外, 由 $n = n(\delta)$ 的定义知 $\|y^\delta - F(x_n^\delta)\| \leqslant \tau\delta$, 因此当 $\delta \to 0$ 时, $F(x_n) = y$ 成立. 因此, 在第 1 种情况的假设下有 $x_{n(\delta)}^\delta$ 收敛于 $F(x) = y$ 的一个解.

第 2 种情况: 假设当 $\delta \to 0$ 时, $n(\delta) \to \infty$. 记精确方程的迭代序列 $\{x_n\}$ 的极限为 x, 由定理 1 知 x 存在且为方程 (1) 的一个解. 给定 $\varepsilon > 0$, 设 $m(\varepsilon) \in \mathbf{N}$, 使得对 $m \geqslant m(\varepsilon)$, $\|x - x_m\| < \varepsilon/2$ 成立, 令 $\delta(\varepsilon)$ 充分小使得当 $\delta < \delta(\varepsilon)$ 时, $n(\delta) > m(\varepsilon)$ 成立, 于是由 (19) 式得
$$\|x - x_{n(\delta)}^\delta\| < \|x - x_m^\delta\| \leqslant \|x - x_m\| + \|x_m - x_m^\delta\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \|x_m - x_m^\delta\|$$
对所有的 $\delta < \delta(\varepsilon)$ 和 $m = m(\varepsilon)$ 成立. 又由连续性可得当 δ 充分小时, $\|x_m - x_m^\delta\| < \varepsilon/2$. 于是由上述不等式, 对充分小的 δ, 有 $\|x - x_{n(\delta)}^\delta\| < \varepsilon$. 因此, 在 $n(\delta) \to \infty$ 假设下证明了当 $\delta \to 0$ 时 $x_{n(\delta)}^\delta \to x$.

最后考虑一般情形. 如果收敛性结果不成立, 则存在 $\sigma > 0$ 和子列 $\{\delta_i\}$, 其中 $\delta_i \to 0$, 使得
$$\|x_{n(\delta_i)}^{\delta_i} - x\| \geqslant \sigma. \tag{24}$$
由于实数列 $\{n(\delta_i)\}$ 一定存在收敛子列 (有限或无限), 我们仍记收敛子列为 $\{n(\delta_i)\}$, 如果当 $i \to \infty$ 时, $n(\delta_i) \to \infty$, 则由第 2 种情况知
$$\|x_{n(\delta_i)}^{\delta_i} - x\| \to 0 \qquad 当\ i \to \infty\ 时.$$
这与 (24) 式矛盾. 如果 $n(\delta_i) \to n$, 类似地, 可得到与第 1 种情况相矛盾的结论. 这就证明了在一般情况下, 当 $\delta \to 0$ 时有 $x_{n(\delta)}^\delta \to x$. □

4 小 结

本文提出求解非线性不适定问题的隐式迭代法, 对于方程右端精确和扰动两种情况分别证明了方法的收敛性, 数值试验可以参考文献[9].

证明过程不难发现, 固定 $\alpha>0$, 随着迭代步数 n 的增加 $\alpha\|x-x_n\|^2$ 不断减小且趋向于 0, 在非线性Tikhonov正则化中 $\alpha_n\|x-x_n\|^2$ 具有相同的性质. 用隐式迭代法求解非线性不适定问题要比Tikhonov 方法容易且稳定. 另外我们猜测, 非线性隐式迭代法当 $\alpha=\alpha_n$ 随着 n 的增加趋向于0时会有更好的效果.

[参 考 文 献]

[1] Tikhonov A N, Leonov A S, Yagola A G. Nonlinear Ill-Posed Problems[M]. London: Chapman and Hall, 1998.

[2] Engl H W, Hanke M, Neubauer A. Regularization of Inverse Problems[M]. Dordrecht: Kluwer, 1996.

[3] JIN Qi-nian. A convergence analysis of the iteratively regularized Gauss-Newton method under the Lipschitz condition[J]. Inverse Problems, 2008, **24**(4): 045002, 16.

[4] Böckmann C, Pornsawad P. Iterative Runge-Kutta-type methods for nonlinear ill-posed problems[J]. Inverse Problems, 2008, **24**(2): 025002, 17.

[5] HE Guo-qiang, LIU Lin-xian. A kind of implicit iterative methods for ill-posed operator equation[J]. J Comput Math, 1999, **17**(3): 275-284.

[6] HE Guo-qiang, WANG Xin-ge, LIU Lin-xian. Implicit iterative methods with variable control parameters for ill-posed operator equations[J]. Acta Mathematica Scientia B, 2000, **20**(4): 485-494.

[7] Hanke M. A regularization Levenberg-Marquardt scheme, with applications to inverse groundwater filtration problem[J]. Inverse Problems, 1997, **13**(1): 79-95.

[8] Hanke M. Regularizing properties of a truncated Newton-CG algorithm for nonlinear inverse problems [J]. Numer Funct Anal Optim, 1997, **18**(9): 971-993.

[9] 柳建军. 求解不适定问题的非线性隐式迭代法和正则化 GMRES 方法[D]. 博士论文. 上海: 上海大学, 2008.

Nonlinear Implicit Iterative Method for Solving Nonlinear Ill-Posed Problems

LIU Jian-jun[1,2], HE Guo-qiang[1], KANG Chuan-gang[1]

(1. Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200436, P. R. China;
2. PetroChina Pipeline R D Center, Langfang, Hebei 065000, P. R. China)

Abstract: The implicit iterative method was extended for linear ill-posed operator equations to solve nonlinear ill-posed problems. It shows that under some conditions the error sequence of solutions of the nonlinear implicit iterative method is monotonically decreasing. And with this monotonicity, the convergence of the new method for both of the exact and perturbed equations was proved.

Key words: nonlinear ill-posed problem; nonlinear implicit iterative method; monotonicity; convergence