文章编号: 1000-0887(2009)09-1117-08

洛伦兹平坦空间 L^4 中的一般弹性曲线*

黄荣培, 商东虎

(华东师范大学 数学系, 上海 200241)

(陈立群推荐)

摘要: 研究了 4 维 Lorentz-Minkowski 空间中,非类光曲线的曲率能量作用的极值曲线. 求出了一般弹性曲线的运动方程和 3 个沿着一般弹性曲线的 Killing 场,用这些 Killing 场建立了一个柱面坐标系并用积分表示了一般弹性曲线.

关 键 词: 一般弹性曲线; 几何粒子模型; Killing 场; Lorentz-Minkowski 空间
中图分类号: O186.12; O186.14 文献标识码: A
DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2009.09.014

引 言

我们将研究作用在 4 维 Lorentz-Minkowski 空间 L^4 中, 非类光曲线空间上的形如 $F(\gamma)=\int_\gamma f(k_1,k_2)\mathrm{d}s$(曲率能量泛函)的泛函的变分问题. 这里 k_1 和 k_2 表示非类光曲线 γ 的第一和第二曲率, $f(k_1,k_2)$ 是 k_1 和 k_2 的光滑函数. 称这个泛函的临界点为一般弹性曲线. 弹性棒的数学理论可能要追溯到 1730 年代的 Bernoulli 和 Euler[1], 经典的 Bernoulli 模型赋给了一个正比于 $\int_\gamma k^2(s)\mathrm{d}s$ 的数值为弹性能量. 近 20 年来, Euler-Bernoulli 模型由于多种原因被重新考虑[2-3]. 全平方曲率能量被看作研究测地线的有用的量,而且闭的细弹性棒常常被用作 DNA 分子的一个模型[4]. Langer 和 Singer 在一系列论文中开始了常曲率空间中的闭弹性曲线的研究并且进一步研究了全平方曲率能量的负梯度流的收敛性[5]. 曲率能量泛函从物理中的数学模型的构造到高维变分问题的研究中有着大量的应用. 在场论中, L^4 中的曲线可以被看作粒子模型. Poincar 不变性要求意味着可允许的 Lagrange 量 F 必须依赖于背景重力场的曲率. 我们将研究 L^4 中的非类光曲线几何模型动力学的 Lagrange 描述.

文章安排如下: 第 1 节我们给出 4 维 Lorentz-Minkowski 空间 L^4 中, 非类光曲线空间上的形如 $F(\gamma)=\int_\gamma f(k_1,k_2)\mathrm{d}s$ 的曲率能量泛函所对应的 Euler-Lagrange 方程, 并将临界曲线的运动方程表示为曲率 k_i 的一个常微分方程组. 第 2 节, 通过应用关于平移和旋转对称的 Noether 推理, 我们找到 3 个沿着临界曲线的 Killing 场和一些守恒律. 第 3 节, 我们用这些 Killing 场建立

* 收稿日期: 2009-03-23; 修订日期: 2009-07-15
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10671066); 上海市重点学科资助项目(B407)
作者简介: 黄荣培(1963—), 男, 上海人, 副教授(联系人. E-mail: rphuang@math.ecnu.edu.cn).

了一个柱面坐标系并用积分表示了一般弹性曲线．这就将三维空间的结果[6-8]推广到 L^4 上来．

1 一般曲率能量泛函的运动方程

设 L^4 是一个 4 维 Lorentz-Minkowski 空间．它的半 Riemann 度量记为 $\langle,\rangle$，它的平坦 Levi-Civita 联络为 ∇．则我们有结构方程[9]

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0, \tag{1}$$

$$\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z = 0, \tag{2}$$

其中 X, Y, Z 是 L^4 上的向量场．

设 $\gamma = \gamma(t): I \rightarrow L^4$ 是一条 L^4 中的正则浸入非类光曲线．γ 有曲率 $\{k_1 \geqslant 0, k_2, k_3\}$ 和 Frenet 标架 $\{T = N_0, N_1, N_2, N_3\}$．然后我们有 Frenet 公式

$$\nabla_T N_i = -\varepsilon_{i-1} k_i N_{i-1} + \varepsilon_{i+1} k_{i+1} N_{i+1}, \qquad i = 0, 1, 2, 3. \tag{3}$$

这里我们定义 $k_0 N_{-1} = k_4 N_4 = \mathbf{0}$，$\varepsilon_i = \langle N_i, N_i\rangle = \pm 1$，$\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = -1$，$v$ 将记为曲线的速度

$$v(t) = \| \gamma'(t) \| = |\langle \gamma'(t), \gamma'(t)\rangle|^{1/2}.$$

字母 γ 也用来表示一个变分 $\gamma = \gamma(w, t): (-\varepsilon, \varepsilon) \times I \rightarrow L^4$ 而且 $\gamma(0, t) = \gamma(t)$．联系着这个变分的是一个沿着曲线 $\gamma(t)$ 的变分向量场 $W = W(t) = (\partial\gamma/\partial w)(0, t)$．我们将记 $W = W(w, t)$，$T = T(w, t)$，$v = v(w, t)$ 等．设 s 为曲线的弧长参数并且在相应的参数化下记为 $\gamma(s)$，$k_i(w, s)$ 等．设 L 是曲线 γ 的弧长，我们假定 $t = s$ 就是 γ 的弧长参数．因此有 $I = [0, L]$．通过直接计算，我们有下面的引理(类似于参考文献[2, 7]中的结果)

引理 1 使用上述记号，我们有下列公式：

1) $[\gamma'(t), W(t)] = 0$;

2) $W(v) = -\varepsilon_0 g v$，其中 $g = -\langle \nabla_T W, T\rangle$;

3) $[W, T] = \varepsilon_0 g T$;

4) $W(k_1) = \langle \nabla_T^2 W, N_1\rangle + 2\varepsilon_0 g k_1$;

5) $W(k_2) = \left\langle \nabla_T\left(\dfrac{\varepsilon_1}{k_1}\nabla_T^2 W\right) + \varepsilon_0 k_1 \nabla_T W, N_2 \right\rangle - \dfrac{k_2}{k_1}\langle \nabla_T^2 W, N_1\rangle + \varepsilon_0 g k_2$;

6) $W(k_3) = \left\langle \nabla_T\left(\dfrac{\varepsilon_2}{k_2}\left(\nabla_T\left(\dfrac{\varepsilon_1}{k_1}\nabla_T^2 W\right) + \varepsilon_0 k_1 \nabla_T W\right)\right) + \dfrac{k_2}{k_1}\nabla_T^2 W, N_3 \right\rangle + 4\varepsilon_0 g k_3 - \dfrac{k_3}{k_2}W(k_2) - \dfrac{k_3}{k_1}W(k_1)$.

我们将分析 Lagrange 量依赖于非类光曲线 γ 的第一曲率 k_1 和第二曲率 k_2 的力学系统．这个模型的曲线空间是给定边界条件使得计算作用的变分时出现的边界项消失的非类光曲线集合．

我们考虑定义在 L^4 中一类正则非类光曲线上的曲率能量泛函

$$F(\gamma) = \int_\gamma f(k_1, k_2)\,\mathrm{d}s. \tag{4}$$

其中 $f(k_1, k_2)$ 是 k_1 和 k_2 的光滑函数．当我们限制在曲线 $\gamma(t) = \gamma(0, t)$ 时，由于 $s = t$，我们将在表示式中去掉 t 和 s．整篇文章中不包含测地线($k_1 = 0$)这种平凡的情况．我们用标准的分部积分法计算这个作用的一阶变分，我们得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\int_0^{L(w)} f(k_1, k_2)\,\mathrm{d}s\,\Big|_{w=0} = \int_0^L \langle E, W\rangle \mathrm{d}s + B[W, \gamma]_0^L, \tag{5}$$

其中 $L(w)$ 是曲线 $\gamma_w(t) = \gamma(w, t)$ 的弧长而且我们将用下列记号:

$$\begin{cases} g_0 = \varepsilon_0(f - k_1 f_{k_1} - k_2 f_{k_2}), \\ g_1 = -f'_{k_1} - \dfrac{k_2 f'_{k_2}}{k_1}, \\ g_2 = \varepsilon_0 k_1 f_{k_2} - \varepsilon_2 k_2 f_{k_1} + \varepsilon_1 \left(\dfrac{f'_{k_2}}{k_1}\right)' + \varepsilon_0 \dfrac{k_3^2 f_{k_2}}{k_1}, \\ g_3 = \varepsilon_1 \varepsilon_3 \left[\dfrac{k_3 f'_{k_2}}{k_1} + \left(\dfrac{k_3 f_{k_2}}{k_1}\right)' \right], \end{cases} \tag{6}$$

这里我们用 f_{k_i} 表示 f 关于 k_i 的偏导, $(\quad)'$ 意思是关于 s 的通常导数. 边界项 $B[\boldsymbol{W}, \gamma]$ 为

$$B[\boldsymbol{W}, \gamma] = \left\langle \frac{\varepsilon_1 f_{k_2}}{k_1} \boldsymbol{N}_2, \nabla_T^2 \boldsymbol{W} \right\rangle + \langle \boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{W} \rangle + \left\langle f_{k_1} \boldsymbol{N}_1 - \varepsilon_1 \frac{f'_{k_2}}{k_1} \boldsymbol{N}_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_3 \frac{k_3 f_{k_2}}{k_1} \boldsymbol{N}_3, \nabla_T \boldsymbol{W} \right\rangle, \tag{7}$$

其中 $\boldsymbol{P}_1$ 是向量场

$$\boldsymbol{P}_1 = g_0 \boldsymbol{T} + g_1 \boldsymbol{N}_1 + g_2 \boldsymbol{N}_2 + g_3 \boldsymbol{N}_3, \tag{8}$$

而且项 $\boldsymbol{E}$ 为

$$\boldsymbol{E} = (g'_0 - \varepsilon_0 k_1 g_1) \boldsymbol{T} + (\varepsilon_1 k_2 g_2 - g'_1 - \varepsilon_1 k_1 g_0) \boldsymbol{N}_1 + (\varepsilon_2 k_3 g_3 - g'_2 - \varepsilon_2 k_2 g_1) \boldsymbol{N}_2 + (\varepsilon_3 k_3 g_2 + g'_3) \boldsymbol{N}_3. \tag{9}$$

因此 Euler-Lagrange 方程 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$ 等价于

$$\begin{cases} g'_0 - \varepsilon_0 k_1 g_1 = 0, \\ \varepsilon_1 k_2 g_2 - g'_1 - \varepsilon_1 k_1 g_0 = 0, \\ \varepsilon_2 k_3 g_3 - g'_2 - \varepsilon_2 k_2 g_1 = 0, \\ \varepsilon_3 k_3 g_2 + g'_3 = 0. \end{cases} \tag{10}$$

定义 1 一条 L^4 中的单位正则非类光曲线称为一般弹性曲线, 如果它满足上述 Euler-Lagrange 方程(10).

对一般函数 $f(k_1, k_2)$, 要解出 Euler-Lagrange 方程(10)是困难的. 我们将在下一节给出一些有趣的情形.

2 沿着一般弹性曲线的 Killing 场

在这一节我们将介绍沿着 L^4 中一条曲线的 Killing 向量场. 这个概念是由 Langer-Singer[10] 为了用积分在柱面坐标系中积出弹性曲线的结构方程而引进的.

我们称 L^4 中沿着一条正则非类光曲线 $\gamma(t)$ 的向量场 $\boldsymbol{W}$ 是 Killing 的, 如果它作用在 v, k_1, k_2 和 k_3 上不变, 即

$$\boldsymbol{W}(v) = \boldsymbol{W}(k_1) = \boldsymbol{W}(k_2) = \boldsymbol{W}(k_3) = \boldsymbol{0}.$$

从引理 1 和 Euler-Lagrange 方程(10), 我们发现向量场 $\boldsymbol{P}_1$ 是沿着一般弹性曲线 γ 的 Killing 向量场. 方程 $\boldsymbol{W}(v) = \boldsymbol{W}(k_1) = \boldsymbol{W}(k_2) = \boldsymbol{W}(k_3) = \boldsymbol{0}$ 构成一个解空间为 12 维的线性系统. 这个维数正好与等距群 $O(1, 3)$ 的维数相等. 因此沿着一条一般弹性曲线 γ 的 Killing 向量场可以扩充为 L^4 上的 Killing 向量场.

沿着一条一般弹性曲线, 第一变分公式变成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\int_0^{L(w)} f(k_1, k_2)\,\mathrm{d}s\,|_{w=0} = B[W, \gamma]_0^L. \tag{11}$$

我们考虑一个常向量场的平移对称性. 对这样的 W, $F(\gamma)$ 的第一变分为 0, 所以我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}w}\int_0^{L(w)} f(k_1, k_2)\,\mathrm{d}s\,|_{w=0} = \langle \boldsymbol{P}_1(L), \boldsymbol{W}(L)\rangle - \langle \boldsymbol{P}_1(0), \boldsymbol{W}(0)\rangle. \tag{12}$$

当 L 换成一个任意中间值 L' $(0< L' < L)$ 时, 这个变分公式继续保持. 因此 $\langle \boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{W}\rangle$ 在 $[0, L]$ 上是常数. 但是 $\boldsymbol{W}$ 是一个任意常向量场, 所以我们得到 $\boldsymbol{P}_1$ 是沿着任意一条一般弹性曲线的常向量场.

L^4 中的旋转也保持 $F(\gamma)$ 不变. 首先我们回忆 L^4 中 3 个向量的向量积运算. L^4 中 3 个向量 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}$ 的向量积是一个向量 $\times(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$ 使得对 L^4 中的任意向量 $\boldsymbol{V}$ 满足

$$\langle \times(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}), \boldsymbol{V}\rangle = -\omega(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{V}), \tag{13}$$

其中 ω 是 L^4 的标准体积 4- 形式. 我们可以把 $\times(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$ 简记为 $\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y}\times\boldsymbol{Z}$. 因此我们有

$$\begin{cases} \boldsymbol{N}_1\times\boldsymbol{N}_2\times\boldsymbol{N}_3 = -\varepsilon_0\boldsymbol{T}, \\ \boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N}_2\times\boldsymbol{N}_3 = \varepsilon_1\boldsymbol{N}_1, \\ \boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N}_1\times\boldsymbol{N}_3 = -\varepsilon_2\boldsymbol{N}_2, \\ \boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N}_1\times\boldsymbol{N}_2 = \varepsilon_3\boldsymbol{N}_3. \end{cases} \tag{14}$$

L^4 中的一个具有 $\gamma\times\boldsymbol{Z}_1\times\boldsymbol{Z}_2$ 形式的向量场可以生成一个单参数旋转变换, 其中 $\boldsymbol{Z}_1$ 和 $\boldsymbol{Z}_2$ 是常向量场. 当 γ 是一般弹性曲线时, 作用(4) 是旋转不变的, 我们发现对任意常向量场 $\boldsymbol{Z}_2$,

$$\begin{aligned} B[\gamma\times\boldsymbol{Z}_1\times\boldsymbol{Z}_2, \gamma] = \Big\langle & f_{k_2}\boldsymbol{N}_1\times\boldsymbol{N}_2\times\boldsymbol{Z}_1 + f_{k_1}\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N}_1\times\boldsymbol{Z}_1 - \\ & \frac{\varepsilon_1 f_{k_2}'}{k_1}\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N}_2\times\boldsymbol{Z}_1 - \varepsilon_1\varepsilon_3\frac{k_3 f_{k_2}}{k_1}\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N}_3\times\boldsymbol{Z}_1 + \gamma\times\boldsymbol{P}_1\times\boldsymbol{Z}_1, \boldsymbol{Z}_2\Big\rangle \end{aligned} \tag{15}$$

是一个常数. 因此对任意常向量场 $\boldsymbol{Z}_1$, 向量场

$$\begin{aligned} A(\gamma, \boldsymbol{Z}_1) = {} & f_{k_2}\boldsymbol{N}_1\times\boldsymbol{N}_2\times\boldsymbol{Z}_1 + f_{k_1}\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N}_1\times\boldsymbol{Z}_1 - \\ & \frac{\varepsilon_1 f_{k_2}'}{k_1}\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N}_2\times\boldsymbol{Z}_1 - \varepsilon_1\varepsilon_3\frac{k_3 f_{k_2}}{k_1}\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N}_3\times\boldsymbol{Z}_1 + \gamma\times\boldsymbol{P}_1\times\boldsymbol{Z}_1 \end{aligned} \tag{16}$$

是一个沿着 γ 垂直于 $\boldsymbol{Z}_1$ 的常向量场. 特别地, 我们用 $\boldsymbol{P}_1$ 代替 $\boldsymbol{Z}_1$ 就得到一个常向量场

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}_2 = A(\gamma, \boldsymbol{P}_1) = {} & -\varepsilon_0 f_{k_2} g_3\boldsymbol{T} + \left(\varepsilon_3\frac{k_3 f_{k_2}}{k_1}g_2 - \frac{f_{k_2}'}{k_1}g_3\right)\boldsymbol{N}_1 + \\ & \left(\varepsilon_0\frac{k_3 f_{k_2}}{k_1}g_1 - \varepsilon_2 f_{k_1}g_3\right)\boldsymbol{N}_2 + \varepsilon_3\left(f_{k_2}g_0 + f_{k_1}g_2 + \varepsilon_1\frac{f_{k_2}'}{k_1}g_1\right)\boldsymbol{N}_3. \end{aligned} \tag{17}$$

这是一个常向量场而且从表达式(16) 我们看出 $\langle \boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2\rangle = 0$. 我们选用下面的记号:

$$\begin{cases} G_0 = -\varepsilon_0 f_{k_2} g_3, \\ G_1 = \varepsilon_3\dfrac{k_3 f_{k_2}}{k_1}g_2 - \dfrac{f_{k_2}'}{k_1}g_3, \\ G_2 = \varepsilon_0\dfrac{k_3 f_{k_2}}{k_1}g_1 - \varepsilon_2 f_{k_1}g_3, \\ G_3 = \varepsilon_3\left(f_{k_2}g_0 + f_{k_1}g_2 + \varepsilon_1\dfrac{f_{k_2}'}{k_1}g_1\right). \end{cases} \tag{18}$$

这时我们可以把 $\boldsymbol{P}_2$ 写成

$$\boldsymbol{P}_2 = G_0\boldsymbol{T} + G_1\boldsymbol{N}_1 + G_2\boldsymbol{N}_2 + G_3\boldsymbol{N}_3. \tag{19}$$

由于 $\boldsymbol{P}_2$ 是一个常向量场, 我们得到一个与 Euler-Lagrange 方程(10) 相似的新的方程组

$$\begin{cases} G_0' - \varepsilon_0 k_1 G_1 = 0, \\ \varepsilon_1 k_2 G_2 - G_1' - \varepsilon_1 k_1 G_0 = 0, \\ \varepsilon_2 k_3 G_3 - G_2' - \varepsilon_2 k_2 G_1 = 0, \\ \varepsilon_3 k_3 G_2 + G_3' = 0. \end{cases} \tag{20}$$

在(16) 式中用 $\boldsymbol{P}_2$ 代替 $\boldsymbol{Z}_1$, 我们得到一个新的常向量场

$$A(\gamma, \boldsymbol{P}_2) = \\ -\varepsilon_0 f_{k_2} G_3 \boldsymbol{T} + \left(\varepsilon_3 \frac{k_3 f_{k_2}}{k_1} G_2 - \frac{f_{k_2}'}{k_1} G_3\right)\boldsymbol{N}_1 + \left(\varepsilon_0 \frac{k_3 f_{k_2}}{k_1} G_1 - \varepsilon_2 f_{k_1} G_3\right)\boldsymbol{N}_2 + \\ \varepsilon_3\left(f_{k_2} G_0 + f_{k_1} G_2 + \varepsilon_1 \frac{f_{k_2}'}{k_1} G_1\right)\boldsymbol{N}_3 + \gamma \times \boldsymbol{P}_1 \times \boldsymbol{P}_2. \tag{21}$$

令 $\boldsymbol{P}_3 = A(\gamma, \boldsymbol{P}_2) - \gamma \times \boldsymbol{P}_1 \times \boldsymbol{P}_2$, 这是一个平移和旋转合成的向量场. 经过一个很长的计算, 可以证明 $\boldsymbol{P}_2$ 和 $\boldsymbol{P}_3$ 象 $\boldsymbol{P}_1$ 一样是沿着一条一般弹性曲线Killing 的而且

$$\langle \boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2\rangle = 0,\ \langle \boldsymbol{P}_3, \boldsymbol{P}_2\rangle = 0,\ \langle \boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_3\rangle + \langle \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_2\rangle = 0. \tag{22}$$

$$\langle \boldsymbol{P}_3, \boldsymbol{P}_3\rangle = \varepsilon_1\left(\varepsilon_3 \frac{k_3 f_{k_2}}{k_2} G_2 - \frac{f_{k_2}'}{k_1} G_3\right)^2 + \varepsilon_2\left(f_{k_1} G_3 + \varepsilon_1\varepsilon_3 \frac{k_3 f_{k_2}}{k_1} G_1\right)^2 + \\ \varepsilon_0 (f_{k_2} G_3)^2 + \varepsilon_3\left(f_{k_2} G_0 + f_{k_1} G_2 + \varepsilon_1 \frac{f_{k_2}'}{k_1} G_1\right)^2. \tag{23}$$

一般弹性曲线沿着任意Killing 场演化是不变的, 即 $B[\boldsymbol{W}, \gamma]$ 沿着 γ 是常数. 所以我们有 3 个守恒律

$$\begin{cases} \langle \boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_1\rangle = c_1,\ \langle \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_2\rangle = c_2, \\ B[\boldsymbol{P}_3, \gamma] = \left\langle \boldsymbol{P}_3', f_{k_1}\boldsymbol{N}_1 - \dfrac{\varepsilon_1 f_{k_2}'}{k_1}\boldsymbol{N}_2 - \varepsilon_1\varepsilon_3 \dfrac{k_3 f_{k_2}}{k_1}\boldsymbol{N}_3 \right\rangle + \\ \qquad \left\langle \boldsymbol{P}_3'', \dfrac{\varepsilon_1 f_{k_2}}{k_1}\boldsymbol{N}_2 \right\rangle + \langle \boldsymbol{P}_3, \boldsymbol{P}_1\rangle = c_3, \end{cases} \tag{24}$$

其中 c_1, c_2 和 c_3 是积分常数. 它们是 Euler-Lagrange 方程(10) 的 3 个首次积分. 这些等式将帮助我们求解运动方程. 我们举两个有趣的例子.

1) $f(k_1, k_2)$ 只依赖于 k_1.

这时 $g_0 = \varepsilon_0(f - k_1 f_{k_1})$, $g_1 = -f_{k_1}'$, $g_2 = -\varepsilon_2 k_2 f_{k_1}$, $g_3 = 0$. 当$f_{k_1} \neq 0$时, Euler-Lagrange 方程(10) 的第 4 个方程给出 $k_3 = 0$. 因而$\boldsymbol{N}_3$ 是一个常向量场. 一般弹性曲线 γ 可以浸入到一个 3-维空间中. 方程(24) 变成

$$\begin{cases} c_2 = \varepsilon_3 (k_2 f_{k_1}^2)^2, \\ c_1 = \varepsilon_0 (f - k_1 f_{k_1})^2 + \varepsilon_1 (f_{k_1 k_1})^2 \left(\dfrac{\mathrm{d}k_1}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \varepsilon_2 (k_2 f_{k_1})^2. \end{cases} \tag{25}$$

所以我们发现 k_2 是 k_1 的一个函数而且可以用积分(椭圆函数) 解出 k_1.

2) $f(k_1, k_2) = ak_1 + bk_2$, a 和 b 是常数.

这时 Euler-Lagrange 方程(10)变成

$$\begin{cases} k_2\left(\varepsilon_0 bk_1-\varepsilon_2 ak_2+\varepsilon_0\dfrac{bk_3^2}{k_1}\right)=0,\\ \varepsilon_0 k_3\left(\dfrac{bk_3}{k_1}\right)'+\left(\varepsilon_0 bk_1-\varepsilon_2 ak_2+\varepsilon_0\dfrac{bk_3^2}{k_1}\right)'=0,\\ k_3\left(\varepsilon_0 bk_1-\varepsilon_2 ak_2+\varepsilon_0\dfrac{bk_3^2}{k_1}\right)+\varepsilon_1\left(\dfrac{bk_3}{k_1}\right)''=0.\end{cases}\tag{26}$$

当 $k_2\neq 0$ 时, 这等价于

$$\varepsilon_0 bk_1-\varepsilon_2 ak_2+\varepsilon_0\frac{bk_3^2}{k_1}=0,\quad k_3\left(\frac{bk_3}{k_1}\right)'=0.\tag{27}$$

因而 k_3/k_1 是常数并且我们把它写成 $k_3=c_4k_1$. 从方程(27)的第 1 个方程, 我们得到 $k_2=\varepsilon_0\varepsilon_2 b(1+c_4^2)k_1/a$. 所以这里一般弹性曲线 γ 是一般螺线. 通过一个参数变换 $t=\int k_1\mathrm{d}s$, Frenet 公式(3)变成一个常系数线性常微分方程组.

3 柱面坐标和积分表示

Killing 场 $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$ 和 $\boldsymbol{P}_3$ 可以被用来建立一个柱面坐标系. 通过计算, 我们知道 $\langle\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2\rangle=0$, $\langle\boldsymbol{P}_3,\boldsymbol{P}_2\rangle=0$ 和 $\langle\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_3\rangle+\langle\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_2\rangle=0$. 我们将依照平面 $\Pi=\mathrm{span}(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2)$ 的因果律特性考虑两种情况.

情形 1 Π 非退化

我们能选择 y 轴和 z 轴使得 $\boldsymbol{P}_1=p_1\partial_y$ 和 $\boldsymbol{P}_2=p_2\partial_z$, 其中 p_1 和 p_2 是常数. 依照平面 Π 的因果律特性, L^4 中由 $\{\partial_y,\partial_z\}$ 张成平面附近的非退化柱面坐标 (r,θ,y,z) 可以表示成

$$\begin{cases}\boldsymbol{X}(r,\theta,y,z)=(r\cosh\theta, r\sinh\theta, y, z), & r\neq 0,\\ \boldsymbol{X}(r,\theta,y,z)=(y, r\cos\theta, r\sin\theta, z), & r>0,\ \theta\in(0,2\pi).\end{cases}\tag{28}$$

我们将平移原点使得 $\boldsymbol{P}_3+\gamma\times\boldsymbol{P}_1\times\boldsymbol{P}_2=A(\gamma,\boldsymbol{P}_2)$ 是 $\boldsymbol{P}_1$ 的一个倍数. 设 $\gamma_1=\gamma+\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Z}$ 是一个待定常向量场. 则

$$\boldsymbol{P}_3+\gamma_1\times\boldsymbol{P}_1\times\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{P}_1\times\boldsymbol{P}_2+A(\gamma,\boldsymbol{P}_2).\tag{29}$$

由于 $\boldsymbol{P}_1$ 和 $\boldsymbol{P}_2$ 不是类光的而且 $A(\gamma,\boldsymbol{P}_2)$ 垂直于 $\boldsymbol{P}_2$, 我们能够找到一个常向量场和常数 λ 使得 $\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{P}_1\times\boldsymbol{P}_2+A(\gamma,\boldsymbol{P}_2)=\lambda\boldsymbol{P}_1$. 直接计算可以证明 $\gamma\times\partial_y\times\partial_z=-\partial_\theta$ 和 $\boldsymbol{P}_3=p_2(p_1\partial_\theta+(p_2/p_1)\partial_y)$. 从一般弹性曲线的切向量 $\boldsymbol{T}=r_s\partial_r+\theta_s\partial_\theta+y_s\partial_y+z_s\partial_z$, 我们得到

$$\begin{cases}\langle\boldsymbol{T},\boldsymbol{P}_1\rangle=\varepsilon_2 p_1 y',\quad \langle\boldsymbol{T},\boldsymbol{P}_3\rangle=-\varepsilon_2\varepsilon_3 p_1p_2r^2\theta'+\varepsilon_2\dfrac{p_2^2}{p_1}y',\\ \langle\boldsymbol{T},\boldsymbol{P}_2\rangle=\varepsilon_3 p_2 z',\quad \langle\boldsymbol{P}_3,\boldsymbol{P}_3\rangle=-\varepsilon_2\varepsilon_3 p_1^2p_2^2r^2+\varepsilon_2\dfrac{p_2^4}{p_1^2}.\end{cases}\tag{30}$$

这些方程可以推出下面的定理:

定理 1 设 $\gamma: I\to L^4$ 是一条一般弹性曲线, Π 是一个非退化平面. 则 γ 在 Π 附近的柱面坐标中可以表示成

$$\begin{cases} y'=\varepsilon_0\varepsilon_2\dfrac{g_0}{p_1},\quad r^2=\dfrac{\varepsilon_2}{p_1^2}\left(\dfrac{p_2^2}{p_1^2}-\varepsilon_2\dfrac{\langle\boldsymbol{P}_3,\boldsymbol{P}_3\rangle}{p_2^2}\right),\\ z'=\varepsilon_0\varepsilon_3\dfrac{G_0}{p_2},\quad \theta'=\dfrac{\varepsilon_1}{p_1p_2r^2}\left(f_{k_2}G_3-\dfrac{p_2^2g_0}{p_1}\right),\end{cases}\tag{31}$$

其中 $g_i, G_i(i=0,1,2,3)$ 和 $\langle \boldsymbol{P}_3, \boldsymbol{P}_3\rangle$ 分别由公式(6)、(20)和(23)给出.

情形 2　Π 退化

这时 L^4 中由 $\{\partial_y, \partial_z\}$ 张成平面附近的目标柱面坐标 (r, θ, y, z) 可以表示成

$$\boldsymbol{X}(r, \theta, y, z)=\left(y-\frac{\varepsilon_2 r}{2}(\theta^2+1), y-\frac{\varepsilon_2 r}{2}(\theta^2-1), -\varepsilon_2 r\theta, z\right), \qquad r\neq 0. \tag{32}$$

它的度量是 $\mathrm{d}s^2=2\varepsilon_2\mathrm{d}r\,\mathrm{d}y+r^2\mathrm{d}\theta^2+\mathrm{d}z^2$. 由于 Π 是退化的, $\boldsymbol{P}_1$ 和 $\boldsymbol{P}_2$ 中有一个是类光的. 我们依照 $\boldsymbol{P}_1$ 和 $\boldsymbol{P}_2$ 的因故律特性再分成两种情况.

情形 2.1　$\boldsymbol{P}_1$ 是类光的

我们可以假设 $\boldsymbol{P}_1=p_1\partial_y$ 和 $\boldsymbol{P}_2=p_2\partial_z$, 其中 p_1 和 p_2 是常数. 直接计算可以证明

$$\boldsymbol{P}_3=\frac{p_2^2}{2p_1}(\theta-1)^2\partial_y+\left(p_1p_2+\frac{\varepsilon_2 p_2^2}{p_1 r}(\theta-1)\right)\partial_\theta-\frac{\varepsilon_2 p_2^2}{p_1}\partial_r. \tag{33}$$

从一般弹性曲线的切向量 $\boldsymbol{T}=r_s\partial_r+\theta_s\partial_\theta+y_s\partial_y+z_s\partial_z$, 我们得到

$$\begin{cases}\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{P}_1\rangle=\varepsilon_2 p_1 r', \\ \langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{P}_2\rangle=p_2 z', \\ \langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{P}_3\rangle=\varepsilon_2\dfrac{p_2^2}{2p_1}(\theta-1)^2 r'-\dfrac{p_2^2}{p_1}y'+\left(p_1p_2+\varepsilon_2\dfrac{p_2^2}{p_1 r}(\theta-1)\right)r^2\theta', \\ \langle \boldsymbol{P}_3, \boldsymbol{P}_3\rangle=p_2^2(p_1^2 r^2+2\varepsilon_2 p_2 r(\theta-1)).\end{cases} \tag{34}$$

这些方程可以推出下面的定理:

定理 2　设 $\gamma: I\to L^4$ 是一条一般弹性曲线, Π 是一个退化平面并且 $\boldsymbol{P}_1$ 是类光向量场. 则 γ 在 Π 附近的柱面坐标中可以表示成

$$\begin{cases} r'=\varepsilon_0\varepsilon_2\dfrac{g_0}{p_1}, \quad \theta=1+\dfrac{\varepsilon_2}{2p_2 r}\left(\dfrac{\langle \boldsymbol{P}_3, \boldsymbol{P}_3\rangle}{p_2^2}-p_1^2 r^2\right), \\ z'=\varepsilon_0\dfrac{G_0}{p_2}, \quad y'=\dfrac{p_1}{p_2^2}f_{k_2}G_3+\dfrac{\varepsilon_0(\theta-1)^2}{2p_1}g_0+\left(\dfrac{p_1^2}{p_2}+\varepsilon_2\dfrac{\theta-1}{r}\right)r^2\theta',\end{cases} \tag{35}$$

其中 $g_i, G_i(i=0,1,2,3)$ 和 $\langle \boldsymbol{P}_3, \boldsymbol{P}_3\rangle$ 分别由公式(6)、(20)和(23)给出.

情形 2.2　$\boldsymbol{P}_2$ 是类光的

我们可以假设 $\boldsymbol{P}_1=p_1\partial_z$ 和 $\boldsymbol{P}_2=p_2\partial_y$, 其中 p_1 和 p_2 是常数. 直接计算可以证明

$$\boldsymbol{P}_3=-p_1p_2\partial_\theta.$$

由于一般弹性曲线的切向量是 $\boldsymbol{T}=r_s\partial_r+\theta_s\partial_\theta+y_s\partial_y+z_s\partial_z$, 我们得到

$$\begin{cases}\langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{P}_1\rangle=p_1 z', \quad \langle \boldsymbol{P}_3, \boldsymbol{P}_3\rangle=p_1^2p_2^2r^2, \\ \langle \boldsymbol{T}, \boldsymbol{P}_3\rangle=-p_1p_2r^2\theta', \\ 2\varepsilon_2 r'y'+r^2(\theta')^2+(z')^2=\varepsilon_0.\end{cases} \tag{36}$$

这些方程可以推出下面的定理:

定理 3　设 $\gamma: I\to L^4$ 是一条一般弹性曲线, Π 是一个退化平面并且 $\boldsymbol{P}_2$ 是类光向量场. 则 γ 在 Π 附近的柱面坐标中可以表示成

$$\begin{cases} r^2=\dfrac{\langle \boldsymbol{P}_3, \boldsymbol{P}_3\rangle}{p_1^2p_2^2}, \quad \theta'=-\varepsilon_2\dfrac{f_{k_2}G_3}{p_1p_2r^2}, \\ z'=\varepsilon_0\dfrac{g_0}{p_1}, \quad y'=\dfrac{\varepsilon_2}{2r'}(\varepsilon_0-(\theta')^2r^2-(z')^2),\end{cases} \tag{37}$$

其中 g_i, G_i(i = 0, 1, 2, 3) 和 $\langle \boldsymbol{P}_3, \boldsymbol{P}_3\rangle$ 分别由公式(6)、(20)和(23)给出.

致谢　作者衷心感谢审稿人给出的很有价值的评论和建议.

[参 考 文 献]

[1] Goldstine H. A History of the Calculus of Variations from the 17th Through the 19th Century[M]. New York: Springer-Verlag, 1980.

[2] Langer J, Singer D A. The total squared curvature of closed curves[J]. J Diff Geom, 1984, **20**(1): 1-22.

[3] Linn r A. Explicit elastic curves[J]. Ann Global Anal Geom, 1998, **16**(5): 445-475.

[4] Shi Y, Hearst J. The Kirchhoff elastic rod, the nonlinear Schrödinger equation, and DNA supercoiling[J]. J Chem Phys, 1994, **101**(6): 5186-5200.

[5] Langer J, Singer D A. Curve-straightening in Riemannian manifolds[J]. Ann Global Anal Geom, 1987, **5**(2): 133-150.

[6] Huang R. A note on the p-elastica in a constant sectional curvature manifold[J]. J Geom Phys, 2004, **49**(3/4): 343-349.

[7] Gurbuz N. p-elastic in 3-dimensional Lorentzian space[J]. Turk J Math, 2006, **30**(1): 33-41.

[8] Ferrûndez A, Guerrero J, Javaloyes M, et al. Particles with curvature and torsion in three-dimensional pseudo-Riemannian space forms[J]. J Geom Phys, 2006, **56**(9): 1666-1687.

[9] O'Neill B. Semi-Riemannian Geometry[M]. New York: Academic, 1983.

[10] Langer J, Singer D A. Lagrangian aspects of the Kirchhoff elastic rod[J]. SIAM Review, 1996, **8**(4): 605-618.

Generalized Elastic Curves in Lorentz Flat Space L^4

HUANG Rong-pei, SHANG Dong-hu

(Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200241, P. R. China)

Abstract: The extremals of curvature energy actions on non-null curves in 4-dimensional Lorentz-Minkowski space are studied. The motion equations were worked out and three Killing fields along the generalized elastic curves were found. A cylindric coordinate system by using these Killing fields was constructed and the generalized elastic curves by quadratures were expressed.

Key words: generalized elastic curve; geometrical particle model; Killing field; Lorentz-Minkowski space