

# 热偶极子与圆形界面裂纹的作用\*

肖万伸, 谢超, 刘又文

(湖南大学 力学与航空航天学院, 长沙 410082)

(郭兴明推荐)

摘要: 热偶极子由热源和热汇组成. 应用解析延拓方法、广义 Liouville 定理及 Muskhelishvili 边值问题理论, 研究了在热源偶极子作用下含圆形夹杂复合材料的界面裂纹问题. 导出温度场和应力场之后, 分析了温度场和夹杂对界面断裂的效应. 作为实例, 针对若干种组合材料及热偶极子处于不同位置, 给出了界面裂纹热应力强度因子的数值变化曲线. 结果表明, 界面裂纹特性取决于材料的弹性常数和热学性能及偶极子的情况.

关键词: 热弹性; 热偶极子; 界面裂纹; 圆形夹杂; 非均质

中图分类号: TB381.0343.7 文献标识码: A

DOI 10.3879/j.issn.1000-0887.2009.10.002

## 符号说明

$R$ 夹杂半径	$(\bar{\phantom{x}})$ 复数的共轭
$L'$ 界面裂纹弧	$g(\phantom{x})$ 其导数的实部是温度函数
$L$ 界面弧	$q$ 热流
$S^+, S^-$ 分别为夹杂区、基体区	$Q$ 总热流量
$I, II$ 分别为夹杂和基体的材料号	$k_i$ 热传导系数
$\mu_j, \kappa_j$ 第 $j$ 号材料弹性常数	$\sigma$ 正应力
$\rho$ 热偶极子中心位置极半径	$\tau$ 剪应力
$\theta$ 热偶极子中心位置极角	$\Phi(\phantom{x}), \phi(\phantom{x})$ 应力复势函数
$r$ 热偶极子半臂长	$\Phi'(\phantom{x}), \Psi'(\phantom{x})$ 应力复势函数的导数
$z_1, z_2$ 分别为热源、热汇的坐标	$\beta$ 热膨胀系数
$\varphi$ 偶极子臂线相对于 $x$ 坐标轴的夹角	$u, v$ 位移
$\alpha$ 裂纹弧线所张角度的一半	$e, f, K, W, \xi, S, J, N, O$ 常数
$T(\phantom{x})$ 温度分布函数	$K_p, K_{ji}$ 裂纹尖端应力强度因子
$\operatorname{Re}(\phantom{x})$ 实部	$Y(\phantom{x})$ Plemelj 函数
$i$ 虚数单位	$\omega(\phantom{x})$ 变换函数

\* 收稿日期: 2008-09-25; 修订日期: 2009-09-01

基金项目: 湖南省自然科学基金资助项目 (05JJ30140)

作者简介: 肖万伸 (1959-), 男, 湖南永州人, 教授, 博士 (联系人, Tel + 86-731-8882330, E-mail xwshnd@126.com).

# 引 言

非均质性与热弹性的相互作用是过去几十年的热门课题<sup>[1,2]</sup>. Mindlin 和 Cheng 分析过含夹杂半无限大弹性体的热应力. Zhu 和 Muquid<sup>[2]</sup>运用 Muskhelishvili<sup>[3]</sup>的复势理论给出了含多个夹杂二维热弹性问题的解析解. 最近越来越多的研究者热衷于研究各种缺陷固体的热弹性问题, 这些问题常在工程中出现. Chao 和 Chang<sup>[4]</sup>基于 Hilbert 理论和解析延拓, 分析了均匀热流作用下各向异性复合材料的界面开裂问题. 结合 Stroh 公式、共形映射、摄动和解析延拓方法, Qin<sup>[5]</sup>得到了无限大压电基体中含椭圆形夹杂的解析通解. 肖万伸和魏刚<sup>[6]</sup>用分区全纯函数技术及 Riemann 边值理论, 求解了热流作用下压电复合材料螺位错与界面裂纹的相互作用. Phan 等<sup>[7]</sup>运用 Green 函数、变换函数及复变函数方法分析了断裂孔与线裂纹的相互作用. Hasebe 和 Wang 等<sup>[8]</sup>应用复变函数方法及有理式变换解决了均匀热流作用下无限大平面中线裂纹与刚性夹杂的干涉问题.

上述提及的文献均假定温度分布或热流已知. 然而在大多数实际场合, 只有热源的情况是已知的, 而温度分布或热流必须通过求解才能知道. 因此, 研究热应力结构的热源问题很有意义. Chao 和 Shen<sup>[9]</sup>基于 Laurent 级数展开和相应的复势理论、解析延拓方法解出了含点热源的圆形夹杂问题. Chao 和 Tan<sup>[10]</sup>用 Fourier 展开和解析延拓方法, 获得了扇形体的点热源问题. Rahman<sup>[11]</sup>用复势方法将轴对称接触的点热源问题化为积分方程.

Chao 和 Chen<sup>[12]</sup>基于解析延拓方法给出了关于各向同性 3 种材料含点热源的解析通解. Hasebe 和 Wang<sup>[13]</sup>利用复变函数方法获得热偶极子与各种异型孔洞及刚性夹杂的热弹性干涉封闭形式解答.

然而, 就作者所知, 脱层弹性夹杂与热偶极子相互作用问题尚未见报道. 本文研究弹性圆形夹杂、界面裂纹与热偶极子的相互作用问题. 采用复势解析延拓技术, 得到了温度场和应力场的封闭解. 数值分析揭示了热偶极子和夹杂与基体材料错配度对界面裂纹的屏蔽与反屏蔽效应的影响, 以及温度及夹杂对界面裂纹特性的影响.

## 1 问题描述

如图 1 所示, 剪切弹性模量为  $\mu_1$  的介质 I 占据半径为  $R$  的圆内域  $S^+$ , 剪切弹性模量为  $\mu_2$  的介质 II 占据半径为  $R$  的圆外域  $S^-$ . 界面裂纹  $L'$  位于界面圆周上, 裂纹的两个端点为  $a$  和  $b$ . 裂纹以外的界面圆弧为  $L$ . 热偶极子由一个位于点  $z_1$  ( $z_1 = \rho e^{i\theta} + r e^{i\varphi}$ ), 热流强度为  $q_0$  的热源, 及一个位于点  $z_2$  ( $z_2 = \rho e^{i\theta} - r e^{i\varphi}$ ), 热流强度为  $-q_0$  的热汇组成. 显然, 偶极子臂长为  $2r$ . 假定热源和热汇均位于  $S^-$ , 即界面圆外. 圆心与坐标系原点重合, 圆周半径为  $R$ , 于是界面圆周可用公式  $z = t = R e^{i\theta}$  表达. 对于平面问题, 图中  $\kappa = 3 - 4\nu$ ,  $\nu$  为 Poisson 系数.

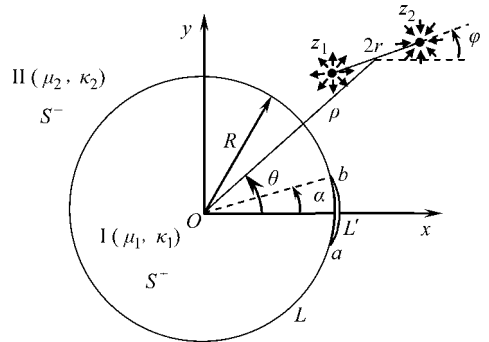


图 1 含热偶极子圆形夹杂复合材料的脱层

## 2 温度场的解

考虑二维问题. 当热传导达到稳定状态时, 温度场将不随时间  $t$  变化, 因此温度场函数

$T(x, y)$  满足 Laplace 方程  $\nabla^2 T = 0$ . 从而  $T$  可用解析函数的实部表示成  $T = \text{Re}[g'(z)]$ , 将它代入热流矢的直角坐标分量表达式  $q_x = -k_i \partial T / \partial x$ ,  $q_y = -k_i \partial T / \partial y$  ( $k_i$  为热传导系数), 得二维传导热流表达式:

$$-q_x + iq_y = k_i g''(z), \quad Q = \int (q_x dy - q_y dx) = -k_i \text{Im}[g'(z)], \quad (1)$$

其中,  $Q$  为总热流量,  $i$  为虚数单位. 顶杠表示取复共轭.

用下标 1 和 2 分别代表域  $S^+$  和  $S^-$  中的物理量, 对于稳态热传导问题, 温度势函数可写为

$$g_2(z) = Q_0 \ln[(z - z_1)/(z - z_2)] + g_{20}(z), \quad z \in S^-,$$

其中  $Q_0 = -q_0 / (2\pi k_{21})$ ; 函数  $g_{20}(z)$  在  $S^-$  内正则, 即  $g_{20}(z) = O(1/z)$ , ( $|z| \rightarrow \infty$ ). 函数  $g_1(z)$  在  $S^+$  内也是正则的, 它可展开成 Taylor 级数:

$$g_1'(z) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k, \quad z \in S^+.$$

热传导速率及温度场连接条件可表为

$$\begin{aligned} Q_1^+(t) &= Q_2^-(t), \quad T_1^+(t) = T_2^-(t), & t \in L, \\ Q_1^+(t) &= Q_2^-(t) = 0 & t \in L', \end{aligned}$$

其中上标 + 和 - 分别表示物理量从  $S^+$  和  $S^-$  两侧逼近界面.

利用复势解析延拓方法, 可得

$$g_1'(z) = \frac{k_{21}}{k_{11} + k_{21}} \cdot \left\{ X_0(z) G_{1\infty}(z) + Q_0 \left[ \ln \left( \frac{z - z_1}{z - z_2} \right) + \ln \left( \frac{z - z_1^*}{z - z_2^*} \right) \right] \right\} - \frac{k_{11} D_0}{k_{11} + k_{21}}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} g_2'(z) &= \frac{k_{11}}{k_{11} + k_{21}} X_0(z) G_{1\infty}(z) + \\ &\frac{k_{21} Q_0}{k_{11} + k_{21}} \left[ \ln \left( \frac{z - z_1}{z - z_2} \right) + \ln \left( \frac{z - z_1^*}{z - z_2^*} \right) \right] - \frac{k_{11} D_0}{k_{11} + k_{21}}, \end{aligned} \quad (3)$$

式中

$$G_{1\infty}(z) = \sum_{j=1}^2 [G_{z_j}(z) + G_{z_j^*}(z)] + G_{\infty}(z),$$

$$G_{z_j}(z) = (-1)^{j+1} \frac{Q_0 \ln(z - z_j)}{X_0(z_j)}, \quad G_{z_j^*}(z) = (-1)^j \frac{Q_0 \ln(z - z_j^*)}{X_0(z_j^*)},$$

$$G_{\infty}(z) = (z - R \cos \alpha) D_0 + (z_2 - z_1 + z_1^* - z_2^*) Q_0,$$

$$P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_0,$$

$$X_0(z) = (z - a)^{-1/2} (z - b)^{-1/2}, \quad D_0 = -a_0, \quad c_1 = 0, \quad c_0 = 0.$$

令 (2) 式中  $z = 0$  可得关于  $a_0$  的方程:

$$a_0 = \frac{k_{21}}{k_{11} + k_{21}} \left\{ X_0(0) G_{1\infty}(0) + Q_0 \left[ \ln \left( \frac{z_1}{z_2} \right) + \ln \left( \frac{z_1^*}{z_2^*} \right) \right] \right\} + \frac{k_{11} a_0}{k_{11} + k_{21}}. \quad (4)$$

### 3 应力场的解

据 Muskhelishvili (1975)<sup>[3]</sup>, 可将热弹性应力和位移表示成:

$$\sigma_x + \sigma_y = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}]; \quad \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_y = 2[z\Phi'(z) + \Psi(z)], \quad (5)$$

$$2\mu(u + iv) = \kappa\Phi(z) - z\overline{\Phi'(z)} - \overline{\Phi(z)} + 2\mu\beta \int g'(z) dz, \quad (6)$$

式中,  $\Phi(z) = \varphi'(z)$ ,  $\Psi(z) = \psi'(z)$ , 且

$$\begin{aligned} \Phi_2(z) &= A_1 z \ln(z - z_1) + B_1 \ln(z - z_1) + A_2 z \ln(z - z_2) + \\ & B_2 \ln(z - z_2) + \Phi_{20}(z), \quad z \in S^-, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\psi_2(z) = C_1 \ln(z - z_1) + C_2 \ln(z - z_2) + \psi_{20}(z), \quad z \in S^-, \quad (8)$$

这里  $\varphi_{20}(z)$  及  $\psi_{20}(z)$  在  $S^-$  中正则. 热弹性应力场必须满足力及位移的单值条件, 得

$$\begin{cases} B_1 - C_1 = 0 & A_1 = -\frac{2\mu_2 \beta_2 k_2 Q_0}{(k_{11} + k_{21})(K_2 + 1)}, \\ B_2 - C_2 = 0 & A_2 = \frac{2\mu_2 \beta_2 k_2 Q_0}{(k_{11} + k_{21})(K_2 + 1)}. \end{cases} \quad (9)$$

将方程 (9) 代入方程 (7) 及 (8) 的微分式, 得应力的微分函数:

$$\Phi_2(z) = A_1 \ln \left[ \frac{z - z_1}{z - z_2} \right] + \Phi_{20}(z), \quad z \in S^-, \quad (10)$$

$$\Psi_2(z) = \Psi_{20}(z), \quad z \in S^-, \quad (11)$$

式中,  $\Phi_{20}(z)$ ,  $\Psi_{20}(z)$  是正则函数并在无穷远处收敛于 0.

界面应力条件可表示为

$$[\Phi_1(t) + \Phi_2(t)]^+ = [\Phi_1(t) + \Phi_2(t)]^-, \quad t \in L + L', \quad (12)$$

有

$$\Phi_1(z) + \Phi_2(z) = G(z) + F, \quad (13)$$

其中

$$\begin{cases} F = -\overline{\Phi_1(0)}, \\ G(z) = A_1 \ln \left[ \frac{z - z_1}{z - z_2} \right] + A_1 \ln \left[ \frac{z - z_2^*}{z - z_1^*} \right] + A_1 \left[ \frac{z_2^*}{z - z_2^*} - \frac{z_1^*}{z - z_1^*} \right]. \end{cases} \quad (14)$$

位移界面连接条件为

$$\begin{aligned} \frac{\kappa_1}{\mu_1} \Phi_1^+(t) + \frac{1}{\mu_1} \Phi_1^-(t) + 2\beta_1 g_1'(t) &= \\ \frac{\kappa_2}{\mu_2} \Phi_2^+(t) + \frac{1}{\mu_2} \Phi_2^-(t) + 2\beta_2 g_2'(t), \quad t \in L. \end{aligned} \quad (15)$$

联立两组边界条件, 得

$$\Phi_{20}^+(t) - e \Phi_{20}^-(t) = fG(t) + WI(t) + JF, \quad (16)$$

式中

$$e = -\frac{\kappa_2 \mu_1 + \mu_2}{\mu_1 + \kappa_1 \mu_2}, \quad f = -\frac{(1 + \kappa_2) \mu_1}{\mu_1 + \kappa_1 \mu_2}, \quad J = \frac{(1 + \kappa_1) \mu_2}{\mu_1 + \kappa_1 \mu_2},$$

$$I(t) = 2\beta_1 g_1'(t) - 2\beta_2 g_2'(t), \quad W = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \kappa_1 \mu_2}.$$

据 Muskhelishvili (1975)<sup>[3]</sup>, 方程 (16) 的通解可写成

$$\Phi_{20}(z) = \frac{Y_0(z)}{2\pi i} \int_L \frac{fG(t) + WI(t) + JF}{Y_0^*(t)(t-z)} dt + R(z) Y_0(z), \quad (17)$$

由此得

$$\Phi_{20}(Z) = \frac{fG(z) + WI(z) + JF}{1-e} - Y_0(z) \left[ \frac{H_{1\infty}(z)}{1-e} + R(z) \right], \quad (18)$$

式中

$$H_{1\infty}(z) = \sum_{j=1}^2 [H_{z_j}(z) + H_{z_j^*}(z)] + H_{\infty}(z),$$

$$Y_0(z) = (z-a)^{-(1/2)-\delta} (z-b)^{-(1/2)+i\delta}, \quad \delta = \frac{\ln e}{2\pi}$$

$$H_{z_j}(z) = -\frac{1}{Y_0(z_j)} \left\{ (-1)^j f A_1 \ln(z-z_j) + (2W/(k_{11}+k_{21})) [(\beta_2 k_{11} - \beta_1 k_{21}) G_{z_j} X_0(z_j) + (-1)^j (\beta_1 - \beta_2) k_{21} Q_0 \ln(z-z_j)] \right\},$$

$$H_{z_j^*}(z) = \frac{1}{Y_0(z_j^*)} \left\{ (-1)^j f A_1 [\ln(z-z_j^*) + z_j^*/(z-z_j^*)] + 2[(\beta_1 k_{21} - \beta_2 k_{11}) G_{z_j^*} X_0(z_j^*) - (-1)^j (\beta_1 - \beta_2) k_{21} Q_0 \ln(z-z_j^*)] W/(k_{11}+k_{21}) \right\},$$

$$H_{\infty}(z) = [z - (R/2)(e^{n_1} + e^{n_2}) - R\delta(e^{n_1} - e^{n_2})] \times [JF + 2W(-k_1 D_0)(\beta_1 - \beta_2)] + G_{f1}$$

其中

$$G_{f1} = f A_1 (z_2 - z_1) + \frac{2W}{k_{11} + k_{21}} [(\beta_1 k_{21} - \beta_2 k_{11}) G_{\infty} + (\beta_1 - \beta_2) k_{21} Q_0 (z_2 - z_1 + z_2^* - z_1^*)],$$

$$d_1 = 0 \quad d_0 = 0.$$

将(18)式代入(10)式得(19)式,再将(19)式代入(13)式得(20)式:

$$\Phi_2(z) = \frac{JG(z) + WI(z) + JF}{1-e} - \frac{Y_0(z)}{1-e} H_{1\infty}(z), \tag{19}$$

$$\Phi_1(Z) = \frac{-fG(z) - WI(z) - fF}{1-e} + \frac{Y_0(Z)}{1-e} H_{1\infty}(z). \tag{20}$$

在(20)式中令  $z=0$  可得关于  $\Phi_1(0)$  的方程:

$$\Phi_1(0) = \frac{-fG(0) - WI(0) + f\Phi_1(0)}{1-e} + \frac{Y_0(0)}{1-e} H_{1\infty}(0), \tag{21}$$

求解即得  $\Phi_1(0)$ .

### 4 裂纹尖端应力强度因子

取坐标变换

$$z = \omega(Z) = ie^n [Z - R - (R/2)\sin(2\alpha)]. \tag{22}$$

Z-平面如图 2 所示. 参考文献 [14], 界面裂纹尖端强度因子可写成:

$$K_1 - K_2 = 2\sqrt{2}e^{\pi\delta} \lim_{Z \rightarrow b_1} (Z - b_1)^{0.5-i\delta} \Phi_2[\omega(Z)], \quad \text{在 } b_1 \text{ 处,} \tag{23}$$

将(22)式代入(23)式,得

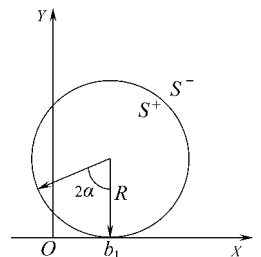


图 2 新坐标平面

$$K_1^b - K_2^b = \frac{\sqrt{2} \exp[(\pi - \alpha) \delta - \alpha/2] H_{1\infty}(b)}{(1 - e)(2R \sin \alpha)^{(1/2) + i\delta}} \quad (24)$$

这里的界面裂纹尖端强度因子表达式、及其前面的解答均是在裂纹表面相互间无接触应力的前提条件下得到的. 裂纹表面相互间无接触的条件要求径向位移差为正值, 即有不等式

$$R \left\{ e^{-\theta} \left[ \frac{k_2 \varphi_2(z) - z \overline{\varphi_2(z)} - \overline{\psi_2(z)} + 2\mu_2 \beta_2 \int_0^z g_2(z) dz}{\mu_2} - \frac{k_1 \varphi_1(z) - z \overline{\varphi_1(z)} - \overline{\psi_1(z)} + 2\mu_1 \beta_1 \int_0^z g_1(z) dz}{\mu_1} \right] \right\} \geq 0 \quad |\theta| < \alpha. \quad (25)$$

### 5 结果及其讨论

无量纲化裂纹尖端  $b$  的应力强度因子:

$$K_{10}^b - K_{20}^b = \frac{K_1^b - K_2^b}{\mu_2 \beta_2 Q_0 b^{(1/2) - i\delta}} \quad (26)$$

考虑裂纹关于  $x$  轴对称的特例. 下面所有讨论均基于前提

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = \pi/12 \quad \theta = 0 \quad \rho/R = 2.$$

#### 1) I 型裂纹应力强度因子的变化规律

a)  $\varphi = 0$

对于给定的比值  $\rho/R (\rho > R)$ , 当  $\theta = 0$  及  $\varphi = 0$  时, 热源比热汇更接近裂纹.

设  $k_1 = k_2 = 1$  且设两组分材料具有相同的热性能常数, 即  $k_{11} = k_{21}$ ,  $\beta_1 = \beta_2$ , 但具有不同的剪切模量. 对于各种不同的剪切模量比值  $\mu_2/\mu_1$ , 裂纹应力强度因子  $K_{10}^b$  随热偶极子半臂长  $r$  变化的数值曲线如图 3 所示. 随着  $r$  的增长, 热源向裂纹靠近而热汇远离裂纹, 对于裂纹尖端的 I 型反屏蔽效应则逐渐增强, 即是说, 裂纹愈易扩展. 这趋势是合理的, 因为热源加热双材料使其膨胀, 从而界面裂纹孔亦膨胀扩大, 即界面裂纹扩展. 热源愈接近于裂纹, 或者热汇愈远离裂纹, 那么裂纹愈易扩展. 而且, 剪切模量比值  $\mu_2/\mu_1$  愈小, 即基体材料愈软、夹杂材料愈硬, 则反屏蔽效应愈强.

设  $k_1 = k_2 = 1$  且  $\mu_2 = 2\mu_1$  (夹杂比基体软), 但两种材料热膨胀性能相同, 即  $\beta_1 = \beta_2$ , 图 4 画出了热传导系数比  $k_{21}/k_{11}$  取各种不同值时裂纹应力强度因子随热偶极子半臂长  $r$  变化的数值曲线. 当  $k_{21}/k_{11}$  较大即  $k_{21}/k_{11} \geq 1$  时, 随着  $r$  的增长, 即热源向裂纹靠近而热汇远离裂纹, 热偶极子对于裂纹尖端的 I 型反屏蔽效应则逐渐增强, 即是说, 裂纹愈易扩展. 此外, 热传导系数比  $k_{21}/k_{11}$  愈大, 即与夹杂相比, 基体材料热传导性能愈好, 则裂纹尖端的反屏蔽效应愈强.

设  $k_1 = k_2 = 1$  且  $\mu_2 = 2\mu_1$  (夹杂比基体软), 但两种材料热传导性能相同, 即  $k_{21}/k_{11} = 1$ , 图 5 画出了热膨胀系数比  $\beta_2/\beta_1$  取各种不同值时, 裂纹应力强度因子随热偶极子半臂长  $r$  变化的数值曲线. 当热膨胀系数比  $\beta_2/\beta_1$  较小, 例如在图 5 中  $\beta_2/\beta_1 = 0.5$  或  $\beta_2/\beta_1 = 1$  时, 随着  $r$  的增长, 即热源向裂纹靠近而热汇远离裂纹, 对于裂纹尖端的 I 型反屏蔽效应则逐渐增强, 即是说, 裂纹愈易扩展. 当热膨胀系数比  $\beta_2/\beta_1$  较大时, 例如  $\beta_2/\beta_1 = 2$  随着  $r$  的增长, 裂纹应力强度因子先增后降. 不过在  $\beta_2/\beta_1 = 5$  的情形, 裂纹应力强度因子是半臂长  $r$  的单调减函数. 这意味

随着  $r$  的增长, 裂纹尖端的屏蔽效应逐渐增强, 即是说, 裂纹愈难扩展. 此外, 热膨胀系数比  $\beta_2/\beta_1$  愈大, 则裂纹尖端的屏蔽效应愈强, 从而裂纹扩展阻力愈大.

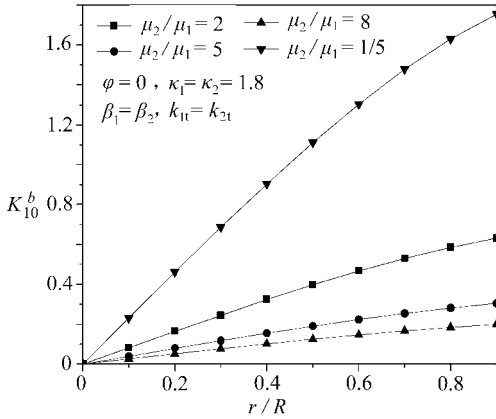


图 3 剪切模量比  $\mu_2/\mu_1$  取各值时裂纹应力强度因子  $K_{10}^b$  随热偶极子半臂长  $r$  的变化

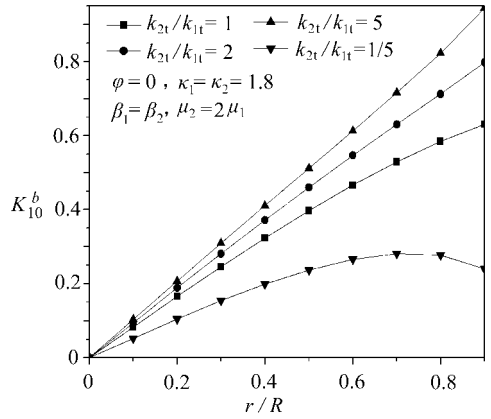


图 4 热传导系数比  $k_{2t}/k_{1t}$  取各值时裂纹应力强度因子  $K_{10}^b$  随热偶极子半臂长  $r$  的变化

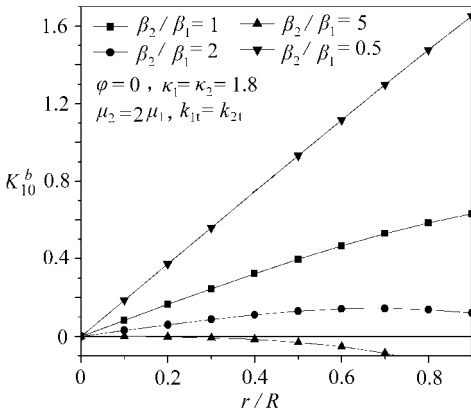


图 5 热膨胀系数比  $\beta_2/\beta_1$  取各值时裂纹应力强度因子  $K_{10}^b$  随热偶极子半臂长  $r$  的变化

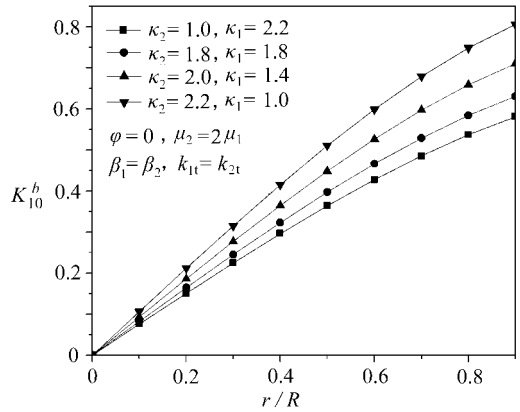


图 6 Poisson 比  $\kappa_2, \kappa_1$  取各值时裂纹应力强度因子  $K_{10}^b$  随热偶极子半臂长  $r$  的变化

对于  $\mu_2 = 2\mu_1$  (夹杂比基体软), 但两种材料热传导性能相同, 即  $k_{2t}/k_{1t} = 1$ , 热膨胀系数相同, 即  $\beta_1 = \beta_2$  的情形, 图 6 画出了 Poisson 系数比  $\kappa_2, \kappa_1$  取各种不同值时裂纹应力强度因子随热偶极子半臂长  $r$  变化的数值曲线. 随着  $r$  的增长, 即热源向裂纹靠近而热汇远离裂纹, 对于裂纹尖端的 I 型反屏蔽效应则逐渐增强, 即是说, 裂纹愈易扩展. 此外, Poisson 系数比愈大, 即基体比夹杂具有更大的横向变形系数, 则裂纹尖端的反屏蔽效应愈强, 即裂纹愈易扩展.

b)  $\varphi = \pi$

对于给定的比值  $\rho/R$  ( $\rho > R$ ), 当  $\theta = 0$  及  $\varphi = \pi$  时, 热汇比热源更接近裂纹.

对于  $\kappa_1 = \kappa_2 = 1.8$ ,  $\mu_2 = 2\mu_1$  (夹杂比基体软), 热膨胀系数相同, 即  $\beta_1 = \beta_2$  的情形, 图 7 画出了热传导系数比  $k_{2t} = k_{1t}$  取各种不同值时, 裂纹应力强度因子随热偶极子半臂长  $r$  变化的数值曲线. 偶极子半臂长  $r$  的增长会增强偶极子对于裂纹尖端的 I 型屏蔽效应, 即阻止裂纹

扩展. 此外, 热传导系数比  $k_{11}/k_{21}$  愈大, 即热传导方面基体材料的性能比夹杂的愈好, 则热汇对裂纹尖端的屏蔽效应愈强, 从而裂纹愈难扩展.

对于  $\kappa_1 = \kappa_2 = 1.8$ ,  $\mu_2 = 2\mu_1$  (夹杂比基体软), 两种材料热传导性能相同, 即  $k_{21}/k_{11} = 1$  的情形, 图 8 画出了热膨胀系数比  $\beta_2/\beta_1$  取各种不同值时, 裂纹应力强度因子随热偶极子半臂长  $r$  变化的数值曲线. 当  $\beta_2/\beta_1 \leq 1$ , 偶极子半臂长  $r$  的增长会增强热汇对于裂纹尖端的 I 型屏蔽效应, 即阻止裂纹扩展. 反之, 当  $\beta_2/\beta_1$  较大时 (例如  $\beta_2/\beta_1 \geq 5$ ), 热偶极子对于裂纹产生反屏蔽效应, 随着  $r$  的增长, 热偶极子对于裂纹尖端的反屏蔽效应增强, 从而裂纹愈易扩展.

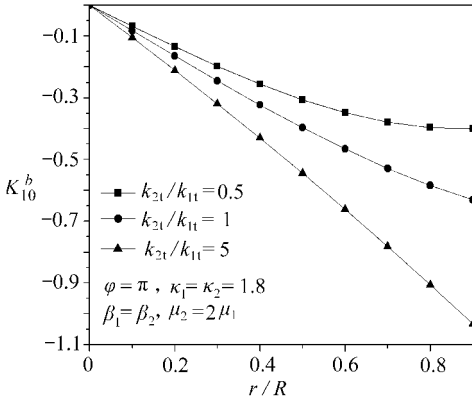


图 7 热传导系数比  $k_{11}/k_{21}$  取各值时裂纹应力强度因子  $K_{10}^b$  随热偶极子半臂长  $r$  的变化

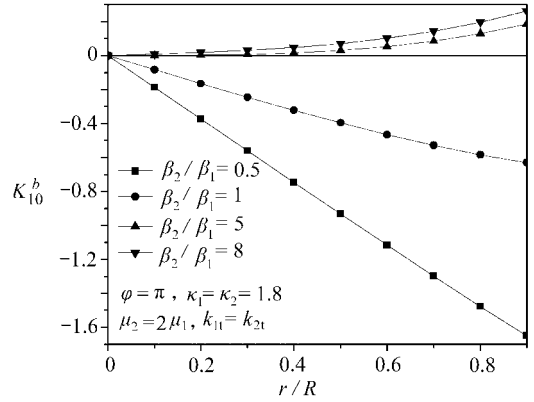


图 8 热膨胀系数比  $\beta_2/\beta_1$  取各值时裂纹应力强度因子  $K_{10}^b$  随热偶极子半臂长  $r$  的变化

## 2) $\varphi = 0$ 时, II 型裂纹应力强度因子的变化规律

对于给定的比值  $\rho/R$  ( $\rho > R$ ), 当  $\theta = 0$  及  $\varphi = 0$  时热源比热汇更接近裂纹.

假定两材料具有相同的热性能常数, 即  $k_{11} = k_{21}$ ,  $\beta_1 = \beta_2$  但具有不同的剪切模量. 对于  $\kappa_1 = \kappa_2 = 1.8$  剪切模量比值  $\mu_2/\mu_1$  取各种不同值时, 裂纹应力强度因子  $K_{20}^b$  随热偶极子半臂长  $r$  变化的数值曲线如图 9 所示. 随着  $r$  的增长, 热源向裂纹靠近而热汇远离裂纹, 对于裂纹尖端的 II 型屏蔽效应则逐渐增强, 即是说, 裂纹愈难扩展. 而且, 剪切模量比值  $\mu_2/\mu_1$  愈小, 即基体材料愈软、夹杂材料愈硬, 则 II 型屏蔽效应愈强.

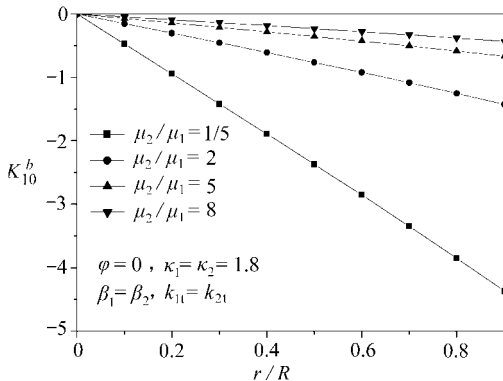


图 9 剪切模量比  $\mu_2/\mu_1$  取各值时裂纹应力强度因子  $K_{20}^b$  随热偶极子半臂长  $r$  的变化

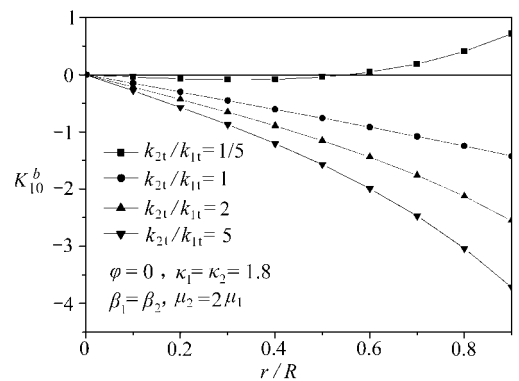


图 10 热传导系数比  $k_{21}/k_{11}$  取各值时裂纹应力强度因子  $K_{30}^b$  随热偶极子半臂长  $r$  的变化



对于  $\kappa_1 = \kappa_2 = 1.8$  &  $\mu_2 = 2\mu_1$  (夹杂比基体软), 两种材料热膨胀性能相同, 即  $\beta_1 = \beta_2$  的情形, 图 10画出了热传导系数比  $k_{21}/k_{11}$  取各种不同值时, 裂纹应力强度因子随热偶极子半臂长  $r$  变化的数值曲线. 当  $k_{21}/k_{11}$  较大即  $k_{21}/k_{11} \geq 1$  时, 随着  $r$  的增长, 即热源向裂纹靠近而热汇远离裂纹, 热偶极子对于裂纹尖端的 II 型屏蔽效应则逐渐增强, 即是说, 裂纹愈难扩展. 此外, 热传导系数比  $k_{21}/k_{11}$  愈大, 即与夹杂相比, 基体材料热传导性能愈好, 则裂纹尖端的 II 型屏蔽效应愈强. 当  $k_{21}/k_{11} = 0.2$  时, 短臂热偶极子对裂纹尖端产生屏蔽作用, 而长臂偶极子则对裂纹尖端产生反屏蔽作用.

对于  $\kappa_1 = \kappa_2 = 1.8$  &  $\mu_2 = 2\mu_1$  (夹杂比基体软), 两种材料热传导性能相同, 即  $k_{21}/k_{11} = 1$  的情形, 图 11画出了热膨胀系数比  $\beta_2/\beta_1$  取各种不同值时, 裂纹应力强度因子随热偶极子半臂长  $r$  变化的数值曲线. 当热膨胀系数比  $\beta_2/\beta_1$  较小, 例如在图 11中  $\beta_2/\beta_1 = 0.5$  或  $\beta_2/\beta_1 = 1$  时, 随着  $r$  的增长, 即热源向裂纹靠近而热汇远离裂纹, 对于裂纹尖端的 II 型屏蔽效应则逐渐增强, 即是说, 裂纹愈难扩展. 当热膨胀系数比  $\beta_2/\beta_1$  较大时, 例如  $\beta_2/\beta_1 = 5$  的情形, 随热偶极子半臂长  $r$  增长, 屏蔽效应先增强后减弱.

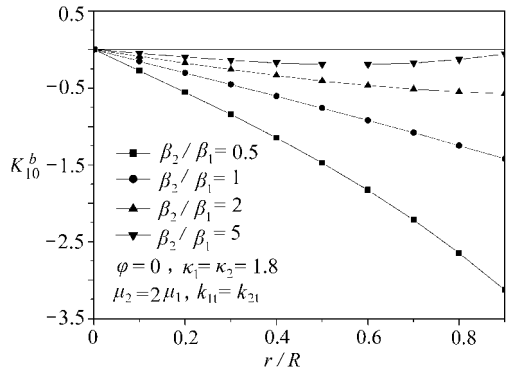


图 热膨胀系数比  $\beta_2/\beta_1$  取各值时裂纹应力强度因子  $K_{10}^b$  随热偶极子半臂长  $r$  的变化

## 6 结 论

研究了热偶极子作用下夹杂复合材料脱层问题. 热偶极子由一个热源和一个热汇构成. 应用复势理论得到了温度场和应力场的封闭形式通解. 基于奇性主分离方法和解析延拓理论, 温度场和位移场的复势通过未知函数表达. 这些未知函数由界面上的连续条件、越过裂纹的间断条件及无穷远处的边界条件所决定. 导出问题的 Riemann-Hilbert 方程后, 用 Muskhelishvili<sup>[3]</sup> 理论求解. 最后通过分析数值曲线详细地讨论了热偶极子对于界面裂纹性能的影响.

总结前节讨论可知: 当位于基体中热偶极子的热源端接近于裂纹时, 相对于夹杂而言, 基体的材质愈软、热传导性能愈好、热膨胀系数愈小或 Poisson 比愈大, 则热偶极子对于界面裂纹的 I 型反屏蔽效应愈强, 即界面裂纹愈易扩展; 反之, 当热偶极子的热汇端接近于裂纹时, 所有趋势则完全相反; 此外, 随着热偶极子半臂长增长, 热偶极子对于裂纹施加的无论是 I 型屏蔽效应还是反屏蔽效应, 均逐渐明显化; 而相对于夹杂而言, 基体的材质愈软、热传导性能愈好、热膨胀系数愈小, 则热偶极子对于界面裂纹的 II 型屏蔽效应愈强, 即界面裂纹愈难扩展.

致谢 感谢湖南自然科学基金 (05JJ30140) 的支持.

### [参 考 文 献]

- [1] Raymond D, Davil M, Cheng H. Thermoelastic stress in the semi-infinite solid[J]. Journal of Applied Physics, 1950, 2(9): 931-933
- [2] Zhu ZH, Muguid SA. On the thermoelastic stresses of multiple interacting inhomogeneities [J]. Int J Solids and Structures, 2000, 37(16): 2313-2330

- [ 3 ] Muskhelishvili N L. Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity [M]. Leyden: Noordhoff, 1975
- [ 4 ] Chao C K, Chang R C. Thermal interface crack problems in dissimilar anisotropic media [J]. Journal of Applied Physics, 1992, 72(7): 2598-2604
- [ 5 ] Qin Q-H. Thermoelastic solution for elliptic inclusions and application to crack-inclusion problems [J]. Applied Mathematical Modelling, 2000, 25(1): 1-23
- [ 6 ] 肖万伸, 魏刚. 稳态温度场下螺旋位错与圆弧裂纹的交互作用 [J]. 机械强度, 2007, 29(5): 779-783
- [ 7 ] Phan C V, Hasebe N, Wang X F, et al. Interaction between a cracked hole and a line crack under uniform heat flux [J]. Int J Fract, 2005, 3(4): 367-384
- [ 8 ] Hasebe N, Wang X F, Saito T, et al. Interaction between a rigid inclusion and a line crack under uniform heat flux [J]. International Journal of Solids and Structures, 2007, 44(7/8): 2426-2441
- [ 9 ] Chao C K, Shen M H. On bonded circular inclusion in plane thermoelasticity [J]. ASME, J Appl Mech, 1997, 64(4): 1000-1004
- [ 10 ] Chao C K, Tan C J. On the general solutions for annular problems with a point heat source [J]. Journal of Applied Mechanics, 2000, 67(3): 511-518
- [ 11 ] Rahman M. The axisymmetric contact problem of thermoelasticity in the presence of an internal heat source [J]. International Journal of Engineering Science, 2003, 41(16): 1899-1911
- [ 12 ] Chao C K, Chen F M. Thermal stresses in an isotropic trimaterial interacted with a pair of point heat source and heat sink [J]. International Journal of Solids and Structures, 2004, 40(22/23): 6233-6247
- [ 13 ] Hasebe N, Wang X F. Complex variable method for thermal stress problem [J]. Journal of Thermal Stresses, 2005, 28(6/7): 595-648
- [ 14 ] Shih G C, Raris P C, Erdogan F. Crack-tip stress factors for plane extension and plane bending problem [J]. Journal of Applied Mechanics, 1962, 29(1): 306-312

## Interaction Between a Heat Dipole and a Circular Interfacial Crack

XIAO Wan-shen, XIE Chao, LIU You-wen

(College of Mechanics and Aerospace, Hunan University, Changsha 410082, P. R. China)

**Abstract** The heat dipole consists of a heat source and a heat sink. The problem that an interfacial crack of a composite contains a circular inclusion under a heat dipole is investigated by using the analytic extension technique, generalized Liouville's theorem and Muskhelishvili boundary value theory. Temperature fields and stress fields are formulated, and then the effects of the temperature field and the inhomogeneity on the interfacial fracture are analyzed. As a numerical illustration, the thermal stress intensity factors of the interfacial crack are presented for various material combinations and for different positions of the heat dipole. The characteristic of the interfacial crack depends on the elasticity, thermal property of the composite and the condition of the dipole.

**Keywords** thermoelasticity, heat dipole, interfacial crack, circular inclusion, inhomogeneity