

# 基于虚节点的多边形有限元法<sup>\*</sup>

唐旭海<sup>1</sup>, 吴圣川<sup>2,3</sup>, 郑超<sup>1</sup>, 张建海<sup>1</sup>

- (1. 四川大学 水力学与山区河流开发保护国家重点实验室, 成都 610065;
2. 合肥工业大学 材料学院 先进材料连接与计算中心, 合肥 230009;
3. 新加坡国立大学 机械工程系 工程科学计算研究中心, 117576 新加坡)

(郭兴明推荐)

**摘要:** 虚节点法是一种新的基于单位分解理论的多边形有限元法. 将虚节点法应用于求解弹性力学问题, 并且通过大量数值实验测试虚节点法的计算效果. 因为虚节点法具有多项式形式, 所以有效地降低了传统多边形有限元法的积分误差. 数值实验证明, 在分片实验中虚节点法能得到比包括 Wachspress法和 mean value法在内的传统多边形有限元法更精确的数值结果. 在收敛性试验中, 虚节点法在相同节点数的条件下能取得比三角形一次单元更精确的数值结果. 因为虚节点法能适应任意边数的多边形单元, 所以对网格具有很强的适应性, 在几何条件复杂、网格生成困难的问题中具有良好的应用价值. 为了展示虚节点法潜在的应用价值, 用虚节点法求解断裂力学应力强度因子和模拟裂纹扩展. 同时, 基于多边形单元的网格重划分技术和网格加密技术也应用于求解断裂力学应力强度因子和模拟裂纹扩展.

**关键词:** 虚节点法; 多边形单元; 单位分解法; 裂纹扩展

**中图分类号:** O34      **文献标识码:** A

**DOI** 10.3879/j.issn.1000-0887.2009.10.003

## 引 言

1975年, Wachspress利用映射几何技术首先提出了能在凸多边形单元内构造形函数的多边形有限元法, 称为 Wachspress法<sup>[1]</sup>. 多边形有限元法适用于任意边数的多边形单元, 带来了网格生成技术和有限元计算方法的变革. 在诸如自适应计算等领域得到广泛应用<sup>[2-3]</sup>. 2003年, Floater提出了基于 Barycentric坐标的 mean value法, 该方法能适应任意形状的多边形单元<sup>[4]</sup>.

传统的多边形有限元法, 如 Wachspress法和 mean value法, 都是基于非多项式基函数的插值方法. 然而非多项式函数的积分技术尚不成熟<sup>[3]</sup>, 导致多边形有限元法的积分存在较大误差. 因此, 必须采用较多积分点以满足计算精度的要求, 但是, 采用较多的积分点必然降低多边形有限元法的计算效率.

虚节点法 (virtual node method) 是一种基于单位分解理论<sup>[5]</sup>的多边形有限元法. 该方法具有以下特点: 1) 虚节点法具有多项式形式, 有效地降低了多边形有限元法的积分误差; 2) 满足有限元法形函数插值所要求的所有插值条件, 保证了虚节点法的数值收敛性.

\* 收稿日期: 2008-12-22; 修订日期: 2009-09-03

作者简介: 唐旭海 (1984), 男, 成都人, 博士生 (联系人, E-mail: X. H. Tang84@ gmail. com).

# 1 多边形单元上的形函数

如图 1 所示, 研究节点为  $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$  的二维多边形区域.  $n$  是多边形单元的节点总数.  $P_i$  是坐标为  $x_i = (x_i, y_i)$  的节点  $i$ . 首先, 以多边形单元的形心将多边形分割成一组虚三角形  $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ , 如图 2 所示. 多边形单元形心位置上的节点  $P_k$  是坐标为  $x_k = \{x_k, y_k\}$  的虚节点:

$$x_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1)$$

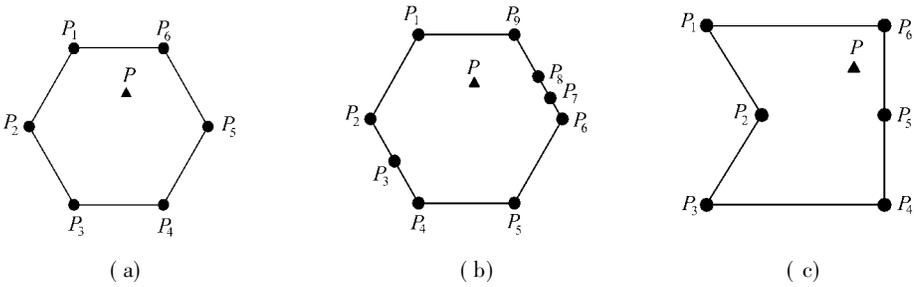


图 1 多边形单元

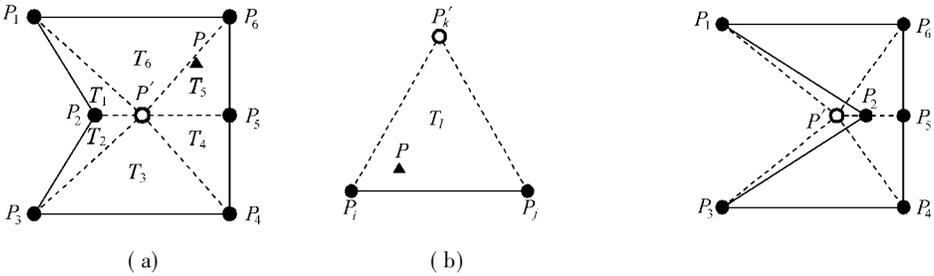


图 2 将多边形区域分割成虚三角形

图 3 多边形区域不能根据形心分割成不重叠的虚三角形

必须注意, 在某些特殊的条件下, 多边形区域不能根据形心被分割成一组不重叠的虚三角形, 如图 3 所示. 实际上, 只要在每个虚三角形上都满足下面的判断式, 多边形区域就可以根据形心被分割成一组不重叠的虚三角形:

$$A^{[I]} > 0 \quad (I = 1, 2, \dots, n), \quad (2)$$

$$A^{[I]} = \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \end{vmatrix} = x_i y_j + x_j y_k + x_k y_i - y_i x_j - y_j x_k - y_k x_i. \quad (3)$$

在虚三角形  $T_l$  内插入坐标为  $x = (x, y)$  的计算点  $P(x)$ , 插值函数可以表示为

$$u^h(x) = \hat{R}^{[I]}(x) \hat{u}^{[I]}(x) + R^{[I]}(x) u(x), \quad (4)$$

上式中, 上标  $[I]$  表示计算点  $P(x)$  在虚三角形  $T_l$  内.  $u(x)$  是最小二乘覆盖函数, 在 1.1 节中定义;  $\hat{u}^{[I]}(x)$  是三节点覆盖函数, 在 1.2 节中定义;  $\hat{R}^{[I]}(x)$  和  $R^{[I]}(x)$  分别为  $\hat{u}^{[I]}(x)$  和  $u(x)$  的权函数, 在 1.3 节中定义.

## 1.1 最小二乘覆盖函数

应用最小二乘法<sup>[6]</sup>, 覆盖函数  $u(x)$  可以由以下式子表示:

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \tilde{\varphi}_i(\mathbf{x}) a_i = \tilde{\varphi}^T \mathbf{a} \quad (5)$$

$$\tilde{\varphi}^T = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} = \left\{ \tilde{\varphi}_1(\mathbf{x}) \quad \tilde{\varphi}_2(\mathbf{x}) \quad \dots \quad \tilde{\varphi}_n(\mathbf{x}) \right\}, \quad (6)$$

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T, \quad (7)$$

其中,  $\tilde{\varphi}^T$  是最小二乘法覆盖函数的形函数向量;  $\mathbf{a}$  是节点位移向量;  $\mathbf{p}(\mathbf{x})$  是一组由 Pascal 三角形构造的基函数. 定义  $m$  为基函数的阶次. 基函数的阶次由以下准则确定: 如果  $n > 8$  选用  $m = 8$  如果  $8 > n > 6$  选用  $m = 6$  如果  $6 > n > 4$  选用  $m = 4$  如果  $4 > n$ , 选用  $m = 3$ . 矩阵  $\mathbf{A}$  和矩阵  $\mathbf{B}$  分别可以表示为

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}(\mathbf{x}_i) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i), \quad (8)$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{p}(\mathbf{x}_1) \quad \mathbf{p}(\mathbf{x}_2) \quad \dots \quad \mathbf{p}(\mathbf{x}_n)]. \quad (9)$$

必须注意在某些特殊的节点分布情况下, 矩阵  $\mathbf{A}$  是奇异的<sup>[7]</sup>. 因此, 最小二乘法覆盖函数的构造仍采用文献 [8-9] 中的正交化技术以避免奇异.

### 1.2 三节点覆盖函数

虚三角形  $T_l$  内的三节点覆盖函数  $\hat{u}^{[l]}(\mathbf{x})$  可以由以下式子计算得到:

$$\hat{u}^{[l]}(\mathbf{x}) = \hat{\varphi}_i^{[l]}(\mathbf{x}) a_i + \hat{\varphi}_j^{[l]}(\mathbf{x}) a_j + \hat{\varphi}_k^{[l]}(\mathbf{x}) a_k, \quad (10)$$

$$\hat{\varphi}_i^{[l]}(\mathbf{x}) = (x(y_j - y_k) + y(x_k - x_j) + (x_j y_k - x_k y_j)) A^{[l]}, \quad (11)$$

$$\hat{\varphi}_j^{[l]}(\mathbf{x}) = (x(y_k - y_i) + y(x_i - x_k) + (x_k y_i - x_i y_k)) A^{[l]}, \quad (12)$$

$$\hat{\varphi}_k^{[l]}(\mathbf{x}) = (x(y_i - y_j) + y(x_j - x_i) + (x_i y_j - x_j y_i)) A^{[l]}, \quad (13)$$

这里  $A^{[l]}$  由式 (3) 定义. 注意,  $a_k$  是虚节点的位移, 其值等于最小二乘覆盖函数  $u(\mathbf{x})$  在虚节点  $P_k$  处的值:

$$a_k = u(\mathbf{x}_k) = \sum_{l=1}^n \tilde{\varphi}_l(\mathbf{x}_k) a_l, \quad (14)$$

将式 (14) 代入式 (10), 三节点覆盖函数可以表示为

$$\hat{u}^{[l]}(\mathbf{x}) = \hat{\varphi}_i^{[l]}(\mathbf{x}) a_i + \hat{\varphi}_j^{[l]}(\mathbf{x}) a_j + \hat{\varphi}_k^{[l]}(\mathbf{x}) \sum_{l=1}^n \tilde{\varphi}_l(\mathbf{x}_k) a_l. \quad (15)$$

### 1.3 权函数

虚三角形  $T_l$  内的权函数  $\hat{R}^{[l]}(\mathbf{x})$  和  $R^{[l]}(\mathbf{x})$  定义为

$$\hat{R}^{[l]}(\mathbf{x}) = \hat{\varphi}_i^{[l]}(\mathbf{x}) + \hat{\varphi}_j^{[l]}(\mathbf{x}) = (x(y_j - y_i) + y(x_i - x_j) + (x_j y_k - x_k y_j + x_k y_i - x_i y_k)) A^{[l]}, \quad (16)$$

$$R^{[l]}(\mathbf{x}) = \hat{\varphi}_k^{[l]}(\mathbf{x}) = (x(y_i - y_j) + y(x_j - x_i) + (x_i y_j - x_j y_i)) A^{[l]}. \quad (17)$$

显而易见, 权函数具有以下性质:

1) 权函数之和为 1

$$\hat{R}^{[l]}(\mathbf{x}) + R^{[l]}(\mathbf{x}) = 1, \quad \mathbf{x} \in T_l; \quad (18)$$

2) 在多边形区域  $\Omega$  的边界上, 权函数满足:

$$\hat{R}^{[l]}(\mathbf{x}) = 1 \text{ 和 } R^{[l]}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial T_l; \quad (19)$$

3) 在节点  $P_k$  处, 权函数满足:

$$\hat{R}^{[l]}(x_k) = 0 \text{ 和 } R^{[l]}(x_k) = 1. \tag{20}$$

### 1.4 形函数的构造

插值函数  $u^h(x)$  表示为更一般的格式:

$$u^h(x) = \sum_{l=1}^n \varphi_l(x) a_l, \tag{21}$$

这里  $\varphi_l(x)$  是对应于节点  $l$  的形函数, 表示为

$$\varphi_l(x) = \hat{R}^{[l]}(x) ((\varphi_{il} + \varphi_{jl}) \hat{\varphi}_l^{[l]}(x) + \hat{\Phi}_k^{[l]}(x) \varphi_l(x_k)) + R(x) \hat{\varphi}_l(x), \tag{22}$$

$$\begin{cases} m=l=0 & m=l \\ m=l=1 & m=l. \end{cases} \tag{23}$$

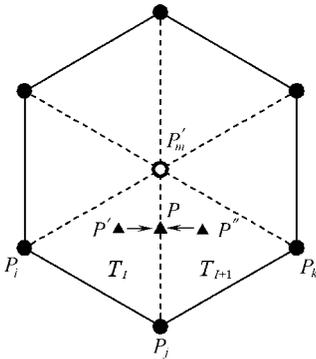


图 4 计算点  $P$  和  $P'$  逼近虚三角形  $T_l$  和  $T_{l+1}$  边界上的点  $P$

### 1.5 虚节点法的性质

虚节点法具有以下重要性质:

1) 虚节点法的插值函数  $u^h(x)$  在多边形区域内满足一阶的连续性.

容易看出, 插值函数  $u^h(x)$  在每个虚三角形内具有一阶的连续性. 所以, 只须证明插值函数  $u^h(x)$  在虚三角形的边界上具有一阶的连续性:

证明 假设计算点  $P$  在虚三角形  $T_l$  和  $T_{l+1}$  的边界上, 如图 4 所示. 考虑两个计算点  $P$  和  $P'$ , 它们分别在虚三角形  $T_l$  和  $T_{l+1}$  内, 无限接近点  $P$ , 则有

$$\lim_{P \rightarrow P} u^h(x) = \lim_{P \rightarrow P} ((\hat{\varphi}_i^{[l]}(x) + \hat{\varphi}_j^{[l]}(x)) \hat{u}^{[l]}(x) + \hat{\varphi}_m^{[l]}(x) u(x)), \tag{24}$$

$$\lim_{P \rightarrow P} u^h(x) = \lim_{P \rightarrow P} ((\hat{\varphi}_j^{[l+1]}(x) + \hat{\varphi}_k^{[l+1]}(x)) \hat{u}^{[l+1]}(x) + \hat{\varphi}_m^{[l+1]}(x) u(x)), \tag{25}$$

当两点趋近于  $P$  时 ( $P \rightarrow P$  和  $P' \rightarrow P$ ) 可以得到下面的等式:

$$\lim_{P \rightarrow P} \hat{\varphi}_i^{[l]}(x) = \lim_{P \rightarrow P} \hat{\varphi}_k^{[l+1]}(x) = 0 \tag{26}$$

$$\lim_{P \rightarrow P} \hat{\varphi}_j^{[l]}(x) = \lim_{P \rightarrow P} \hat{\varphi}_j^{[l+1]}(x), \quad \lim_{P \rightarrow P} \hat{\varphi}_m^{[l]}(x) = \lim_{P \rightarrow P} \hat{\varphi}_m^{[l+1]}(x), \tag{27}$$

$$\lim_{P \rightarrow P} \hat{u}^{[l]}(x) = \lim_{P \rightarrow P} \hat{u}^{[l+1]}(x). \tag{28}$$

综合以上式子, 可以得到

$$\lim_{P \rightarrow P} u^h(x) = \lim_{P \rightarrow P} u^h(x). \tag{29}$$

2) 虚节点法的插值函数  $u^h(x)$  在单元边界上是线性函数 ( $C^0$  函数):

$$u^h(t) = tu_1 + (1-t)u_2, \quad x \in [0, 1], \quad t \in [0, 1]. \tag{30}$$

证明 将式 (19) 和式 (20) 代入式 (4), 得到

$$u^h(x) = \hat{u}^{[l]}(x) = \hat{\varphi}_i^{[l]}(x) u_i + \hat{\varphi}_j^{[l]}(x) u_j + \hat{\varphi}_k^{[l]}(x) u_k, \tag{31}$$

因为  $\hat{\varphi}_i^{[l]}$ ,  $\hat{\varphi}_j^{[l]}$  和  $\hat{\varphi}_k^{[l]}$  由式 (11) ~ 式 (13) 构造,  $u^h(x)$  在多边形区域的边界上是一阶线性函数.

3) 虚节点法的形函数具备 Kronecker-delta 性:

$$i(x_j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j. \end{cases} \quad (32)$$

4) 完备性:

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^n x_i i(x) = x. \quad (33)$$

任何满足以上插值条件的插值函数都可以用来构造有限元法的形函数<sup>[10]</sup>.

5) 虚节点法的形函数具有多项式形式.

研究图 1 (c)所示的多边形单元, 图 5给出了用虚节点法构造的形函数. 可以看出, 形函数在所有单元边界上为线性, 并且具有 Kronecker-delta 性质.

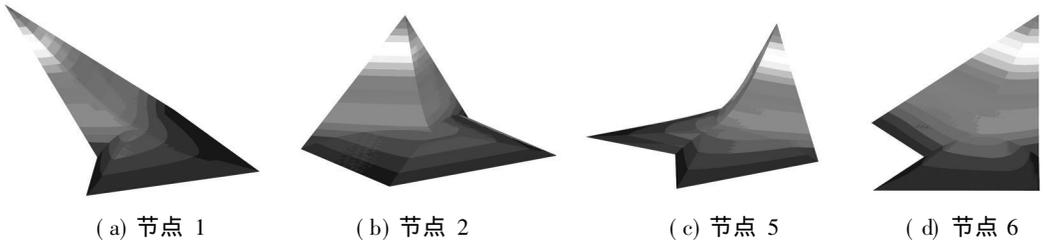


图 5 虚节点法的形函数

## 2 积分策略、网格重划分策略和网格加密策略

### 2.1 积分策略

研究由边界  $(\Gamma = \Gamma_t + \Gamma_u)$  围成的二维计算区域  $V$ , 在平面问题中弹性力学问题的 Galerkin 弱形式可以表达为<sup>[11]</sup>

$$\int_V (\nabla \mathbf{u})^T (\mathbf{D} \nabla \mathbf{u}) dV - \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{b} dV - \int_{\Gamma_t} \mathbf{u}^T \mathbf{t} d\Gamma = 0 \quad (34)$$

上式中,  $\mathbf{D}$  是材料矩阵,

$$\nabla = \begin{bmatrix} - & 0 & - \\ x & & y \\ 0 & - & \\ & y & x \end{bmatrix}^T$$

是微分算子,  $\mathbf{u} = [u, v]^T$  是位移矩阵,  $\mathbf{b} = [b_x, b_y]^T$  是二维体内的体积力,  $\mathbf{t}$  是二维边界上的面积力.

离散计算模型  $V$ , 得到一组不重叠的多边形区域  $V = \sum_{i=1}^N V_i$ , 将式 (21) 代入式 (34), 得到有限元求解方程:

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f}, \quad (35)$$

$$\mathbf{K}_{ij} = \mathbf{K}_{ij}^e, \quad \mathbf{f}_i = \mathbf{f}_i^e, \quad (36)$$

上式中

$$\mathbf{K}_{ij}^e = \int_{V_k} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j dV, \quad (37)$$

$$\mathbf{a}_i = \left\{ u(\mathbf{x}_i), v(\mathbf{x}_i) \right\}^T, \quad (38)$$

$$\mathbf{f}_i = \int_{\Gamma_t} \mathbf{t}^T d\Gamma + \int_{V_k} \mathbf{b}^T dV, \quad (39)$$

$$B_i = \begin{bmatrix} -\frac{i}{x} & 0 & -\frac{i}{y} \\ 0 & -\frac{i}{y} & -\frac{i}{x} \end{bmatrix}^T \quad (40)$$

总体刚度矩阵的计算包含在多边形区域  $V_i$  上对形函数导数的积分. 如图 6 所示, 采用基于虚三角形的积分策略. 在每个虚三角形上应用积分点数为  $k$  的 Hammer 积分准则. 在虚三角形  $V_i$  上对函数的  $f$  积分表示为

$$\int_{V_i} f dV = \sum_{I=1}^n T_I \int_{T_I} f dV, \quad (41)$$

其中  $n$  是多边形单元节点总数和虚三角形的总数.

### 2.2 基于多边形单元的网格加密和网格重划分技术

因为虚节点法能适应多边形单元, 对网格适应性较强, 在 3.4 节中用虚节点法求解断裂力学应力强度因子和模拟裂纹扩展. 在模拟裂纹扩展过程中方便的沿着裂纹扩展路径分割被裂

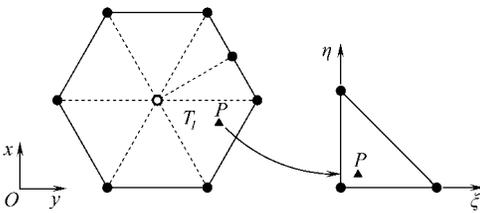


图 6 虚三角形上的 Hammer 积分

纹穿过的单元, 并且释放被裂纹穿过的节点, 如图 7 所示. 如果裂纹尖端恰好在单元内部, 近似地延长裂纹使裂纹尖端落在单元边界上, 如图 8 所示. 在模拟裂纹扩展的过程中, 裂纹尖端附近的区域需要加密以获得足够精确的解, 因此, 将基于二叉树结构的网格加密算法<sup>[12]</sup>运用于跟踪裂纹扩展, 如图 9 所示.

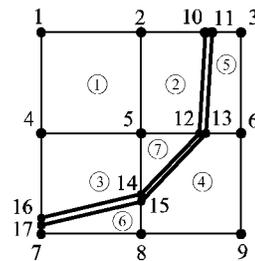
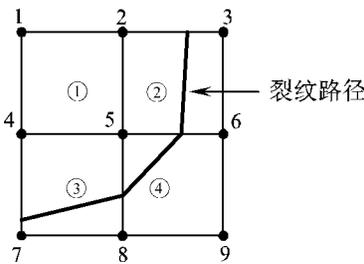


图 7 网格重划分

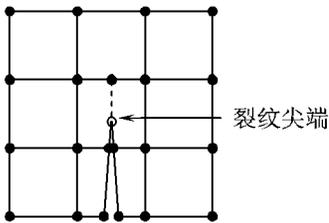


图 8 延长裂纹尖端至最近的单元的边界

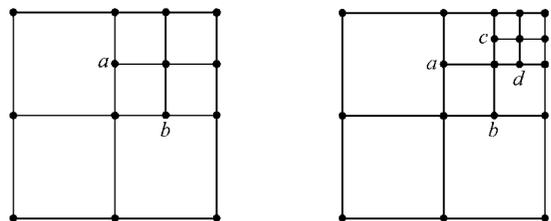


图 9 网格加密

## 3 数值实验

通过数值实验讨论用虚节点法求解弹性力学问题的数值精度和收敛性. 并且将虚节点法用于求解应力强度因子和模拟裂纹扩展, 验证虚节点法的计算效果. 所有数值算例均采用国际

单位. 在数值实验中, 定义  $n$  为模型的节点总数. 定义相对位移误差准则和相对能量误差准则:

$$e_d = \sqrt{\frac{(\mathbf{u}^{ex} - \mathbf{u}^{num})^T \mathbf{d}}{(\mathbf{u}^{ex})^T \mathbf{d}}}, \quad (42)$$

$$e_e = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} (\mathbf{u}^{ex} - \mathbf{u}^{num})^T \mathbf{D} (\mathbf{u}^{ex} - \mathbf{u}^{num})}{\frac{1}{2} (\mathbf{u}^{ex})^T \mathbf{D} \mathbf{u}^{ex}}}, \quad (43)$$

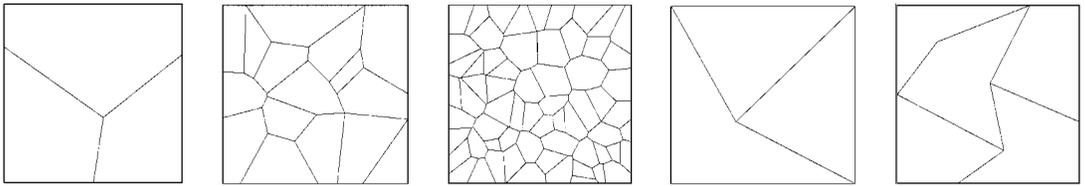
其中, 上标  $ex$  表示理论解, 上标  $num$  表示数值解.

### 3.1 标准分片实验

一种有限元方法能否通过分片实验是保证求解弹性力学问题收敛性的充分必要条件. 因此, 分片实验在这里作为第一个数值实验. 考虑一个  $1 \times 1$  的方形区域. 边界条件按下式施加:

$$u_x = x, \quad u_y = y. \quad (44)$$

设计 3 个基于凸多边形单元和 2 个基于凹多边形单元的计算模型, 如图 10 所示. 它们的节点数分别是: 8, 30, 129, 5, 11. 表 1 展示了当在每个虚三角形内使用 16 个积分点时数值实验的结果. 显而易见, 虚节点法的相对位移误差为  $10^{-10}$ , 明显小于 Wachspress 法和 mean value 法的相对位移误差 ( $10^{-4}$ ).



(a) 网格 A      (b) 网格 B      (c) 网格 C      (d) 网格 D      (e) 网格 E

图 10 标准分片实验的网格图

表 1 标准分片实验中的相对位移误差

网格	Wachspress法	mean value法	虚节点法
A	3.21E-006	8.22E-005	1.13E-009
B	2.18E-004	7.61E-005	5.14E-010
C	6.47E-004	1.73E-004	2.27E-010
D		5.71E-005	4.43E-010
E		1.68E-004	9.51E-010

### 3.2 悬臂梁

研究二维的悬臂梁, 悬臂梁长为  $L$ , 高为  $D$ , 厚度为 1. 悬臂梁右端固定, 左端受抛物线分布荷载  $P$ , 如图 11 所示. 数值实验的解析解由文献 [13] 给出. 计算参数选取如下:  $L = 8, D = 1, P = 1, E = 3.0 \times 10^7, \nu = 0.25$ . 假设平面应变条件. 在计算中, 在  $x = 0$  的边界上按照解析解施加位移条件, 在  $x = L$  的边界上按照解析解施加分布荷载.

为了测试虚节点法在凸多边形单元上的数值精度和收敛率, 首先, 建立 5 个基于凸多边形单元的离散模型, 它们的节点数分别是: 82, 568, 1936, 7340, 6417, 如图 12 所示. 然后, 建立 4 个基于凹多边形单元的离散模型, 它们的节点数分别是: 131, 453, 1673, 6417, 如图 13 所

示. 为了与三角形一次单元比较, 建立了 3 个基于三角形单元的离散模型, 它们的节点数分别是: 169, 601, 9 112 如图 14 所示. 图 15 和图 16 绘制了虚节点法在凸多边形网格与凹多边形网格上的收敛曲线. 可以看出, 在相同节点数的条件下, 虚节点法的数值精度明显优于三角形一次单元.

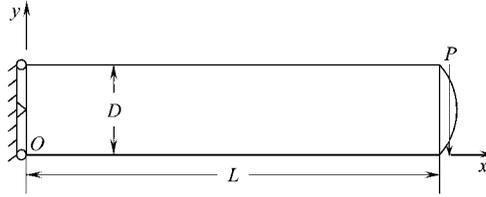


图 11 悬臂梁试验的几何条件和边界条件

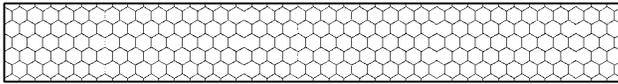


图 12 悬臂梁实验基于凸多边形单元的网格图 (568 节点)

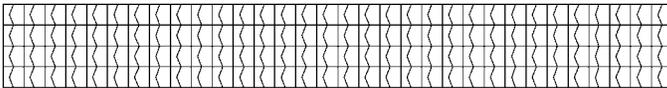


图 13 悬臂梁实验基于凹多边形单元的网格图 (453 节点)

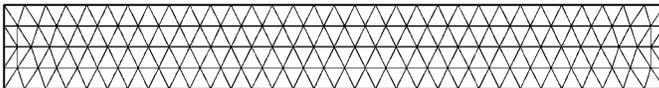
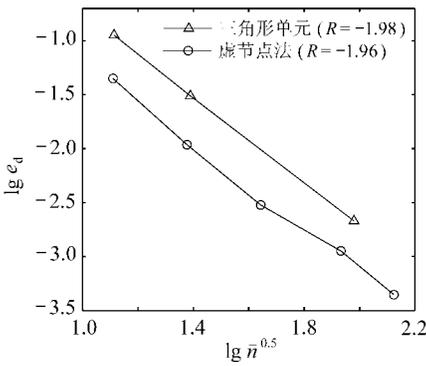
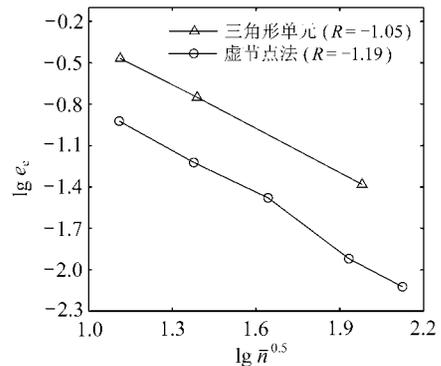


图 14 悬臂梁实验基于三角形单元的网格图 (169 节点)



(a) 相对位移误差



(b) 相对能量误差

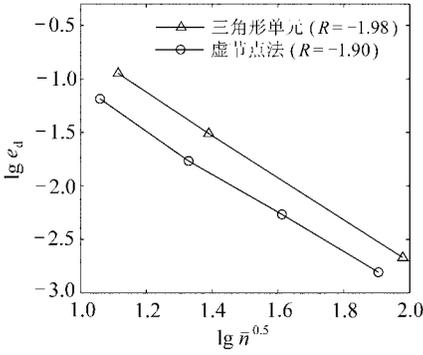
图 15 悬臂梁实验中的收敛曲线 (凸多边形网格)

### 3.3 受内压圆筒

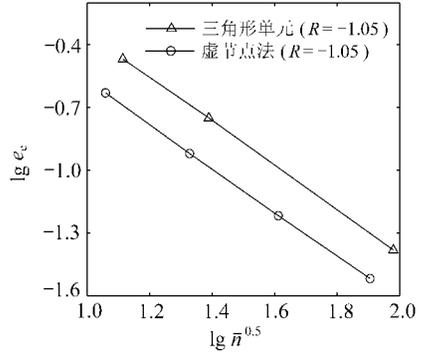
研究一个受内压的圆筒, 内径为  $a$ , 外径为  $b$ , 厚度为  $t$ , 如图 17 所示. 在内径边界上 ( $r = a$ ) 施加单位压力  $p = 1$ , 在外径边界上 ( $r = b$ ) 没有荷载. 鉴于对称性, 只需要建立四分之一圆环即可. 数值实验的解析解由文献 [14] 给出. 在计算中, 参数选择如下:  $a = 1$ ,  $b = 5$ . 计算按平面应力问题考虑. 材料参数选取为  $E = 1 \cdot 10^3$ ,  $\nu = 0.25$ .

建立 4 个基于多边形单元的离散模型, 它们的节点数分别是: 161, 400, 800, 4 881, 如图 18 所示. 同时建立 3 个基于三角形单元的离散模型, 它们的节点数分别是: 153, 840, 3 239, 如图 19 所示. 虚节点法与三角形一次单元的收敛性曲线绘制于图 20. 可以看出在相同节点数的条

件下, 虚节点法的数值结果明显优于三角形一次单元.



(a) 相对位移误差



(b) 相对能量误差

图 16 悬臂梁实验中的收敛曲线(凹多边形网格)

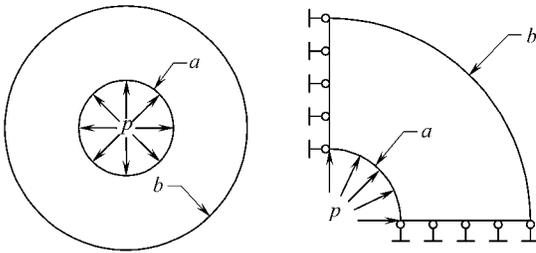


图 17 受内压圆筒的几何条件和边界条件, 及四分之一模型

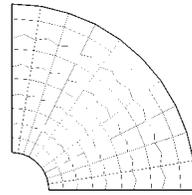


图 18 圆筒试样的凹多边形网格图(161节点)

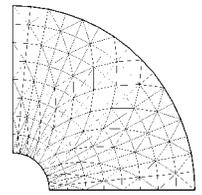
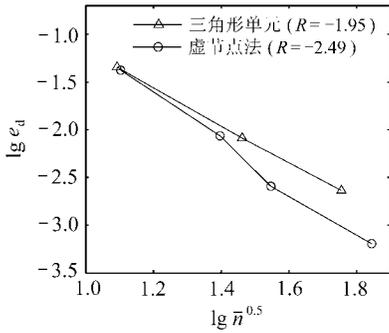
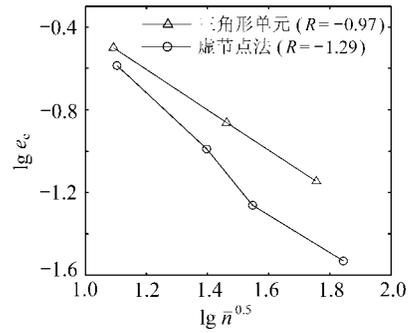


图 19 圆筒试样的三角形网格图(153节点)



(a) 相对位移误差



(b) 相对能量误差

图 20 圆筒试样的收敛曲线

### 3.4 模拟裂纹扩展

应用虚节点法求解断裂力学应力强度因子和模拟裂纹扩展. 在数值实验中, 用最大周向应力准则求解裂纹扩展角<sup>[15]</sup>, 用区域积分形式的相互作用能量积分求解应力强度因子<sup>[16]</sup>.

#### 3.4.1 中心斜裂纹试样

为了讨论虚节点法求解应力强度因子的准确性, 选取含中心斜裂纹的无限大平板作为数值算例, 如图 21所示, 板受到分别受到  $x_1$ -和  $x_2$ -两个方向的拉应力  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$ , 是斜裂纹与  $x_2$ -方向的夹角. 应力强度因子是关于裂纹倾角  $\theta$  的函数, 数值实验的解析解由 A liabad 给出<sup>[17]</sup>:

$$\begin{cases} K = (\sigma_2 \sin^2 + \sigma_1 \cos^2) \sqrt{a} \\ K = (\sigma_2 - \sigma_1) \sin \cos \sqrt{a} \end{cases} \quad (45)$$

假设一个正方形板,  $2b = 2$  裂纹长度为  $2a$ ,  $b/a = 10$ ,  $\sigma_1 = 1$  和  $\sigma_2 = 2$ . 因为裂纹长度远远小于矩形板的长度, 所以可以视为无限大平板的中心斜裂纹问题. 表 2 给出了应力强度因子对应于不同倾角  $\beta$  的结果, 数值解与参考解析解相符合.

3.4.2 四点剪荷载下的裂纹扩展

四点剪荷载下的裂纹扩展被广泛的研究<sup>[18]</sup>, 模型几何条件和边界条件如图 22 所示,  $L = 4$  荷载  $P = 1$ . 材料参数为  $E = 2 \times 10^5$  和  $\nu = 0.25$ , 假设平面应力条件. 图 23 给出裂纹扩展 18 步后的裂纹扩展路径与网格图. 虚节点法数值模拟结果与实验现象相吻合: 两条裂纹朝相反的方向对称发展, 最终裂纹的发展方向指向荷载处.

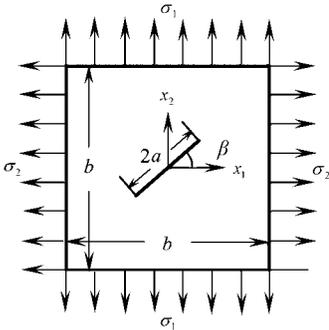


图 21 中心斜裂纹实验

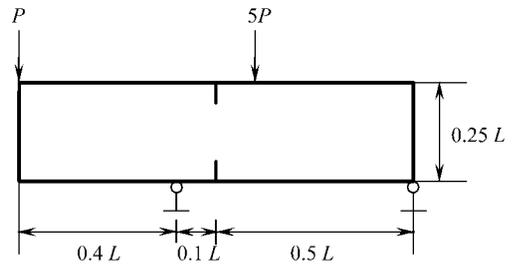


图 22 四点剪试样的几何条件和边界条件

表 2 中心斜裂纹试样实验中的用虚节点法求解的应力强度因子

节点数	解析解		数值解		误差 $e$	
	$K$	$K$	$K$	$K$	$K$	$K$
0	1.932	0.5605	0.0000	0.5692	-0.0002	1.0156
30	1.906	0.7006	0.2427	0.6990	0.2430	1.0014
60	1.906	0.9809	0.2427	0.9791	0.2424	0.9987
90	1.932	1.1210	0.0000	1.1385	0.0003	1.0156

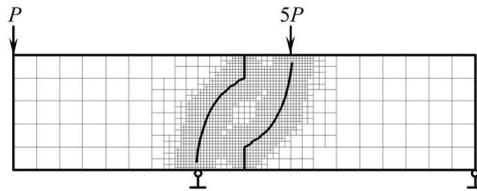


图 23 裂纹扩展 18 步后的裂纹扩展路径与网格图

4 结论与讨论

介绍了一种新的多边形有限元法, 虚节点法 (virtual node method). 数值实验表明, 虚节点法具有以下性质:

1) 用虚节点法求解弹性力学问题, 由实验结果可以看出, 虚节点法在多边形单元上均能取得满意的计算精度.

2) 虚节点法是一种基于多项式形式的多边形有限元法. 在虚节点法的计算中, 使用数值

计算中常用的 Gauss 积分和 Hammer 积分便能得到精确的数值积分结果. 然而, 基于非多项式形式的 Wachspress 法和 mean value 法, 数值积分存在较大误差.

3) 在标准分片实验中, 虚节点法的相对位移误差在  $10^{-10}$  附近, 明显小于 Wachspress 法和 mean value 法的相对位移误差 ( $10^{-4}$ ). 标准分片实验表明, 基于多项式形式的虚节点法能明显的提高积分精度.

4) 在收敛性实验中, 虚节点法在相同节点数的条件下能得到比三角形一次单元更精确的数值结果. 所以在复杂的几何条件下, 建议使用虚节点法进行计算, 因为将多边形单元分割成三角形单元不仅增加了计算量, 而且降低了计算精度.

5) 虚节点法适用于多边形单元, 对网格具有很强的适应性. 而且, 虚节点法能取得比三角形一次单元更好的数值精度. 而且, 三角形一次单元与其他传统有限元相比能适应复杂的几何条件, 在模拟裂纹扩展中广泛使用. 所以, 用虚节点法求解断裂力学应力强度因子和模拟裂纹扩展. 同时, 基于虚节点法的网格重划分技术和网格加密技术也运用求解断裂力学问题. 用数值方法求得的应力强度因子与参考解析解吻合; 用数值方法模拟的裂纹扩展路径与参考试验结果接近.

必须注意, 引入虚节点  $P_k$  是为了公式推导的方便, 不会增加新的节点自由度, 不会增加总体刚度矩阵的带宽. 所以, 引入虚节点  $P_k$  不会增加计算量. 而且, 虚节点法能容易的扩展到三维多面体单元.

### [参 考 文 献]

- [1] Wachspress E L A Rational Finite Element Basis [M]. New York: Academic Press, 1975.
- [2] Tabarraei A, Sukumar N Adaptive computations on conforming quadtree meshes [J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2005, **41**(7/8): 686-702
- [3] Sukumar N, Malsch E A Recent advances in the construction of polygonal finite element interpolants [J]. Archives of Computational Methods in Engineering, 2006, **13**(1): 129-163
- [4] Ebner M S Mean value coordinates [J]. Computer Aided Geometric Design, 2003, **20**(1): 19-27.
- [5] Melenk JM, Babuska I The partition of unity finite element method basic theory and applications [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1996, **139**(1/4): 289-314
- [6] Rajendran S, Zhang B R A FE-meshfree QUAD4 element based on partition of unity [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2007, **197**(1/4): 128-147
- [7] Liu G R, Gu Y T A point interpolation method for two dimensional solid [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2001, **50**(4): 937-951.
- [8] Zheng C, Tang X H, Zhang J H, et al A novel mesh-free poly-cell Galerkin method [J]. Acta Mechanica Sinica, 2009, **25**(4): 517-527.
- [9] Zheng C, Wu S C, Tang X H, et al A meshfree poly-cell Galerkin (MPG) approach for problems of elasticity and fracture [J]. Computer Modelling in Engineering & Sciences, 2008, **38**(2): 149-178
- [10] Strang G, Fix G An Analysis of the Finite Element Method [M]. Englewood Cliffs: New Jersey: Prentice-Hall, 1973
- [11] Zienkiewicz O C, Taylor R L The Finite Element Method [M]. 5th Ed. Oxford, UK: Butterworth-Heinemann, 2000
- [12] Mark S Shephard, Marcel K Georges Automatic three-dimensional mesh generation by the finite octree technique [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering,

- 1991, **32**(4): 709-749.
- [13] Timoshenko S P, Goodier J N. Theory of Elasticity [M]. 3rd Ed New York McGraw, 1970
- [14] Roark R J Young W C Formulas for Stress and Strain [M]. New York McGraw, 1975
- [15] Belytschko T, Black T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1999, **45**(5): 601-620
- [16] Moës N, Dolbow J, Belytschko T. A finite element method for crack growth without remeshing [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1999, **46**(1): 131-150
- [17] Aliabadi M H, Rooke D P, Cartwright D J. Mixed mode Bueckner weight functions using boundary element analysis [J]. International Journal of Fracture, 1987, **34**(2): 131-147
- [18] Bouchard P O, Bay F, Chastel Y, et al. Crack propagation modeling using an advanced remeshing technique [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2000, **189**(3): 723-742

## A Novel Virtual Node Method for Polygonal Elements

TANG Xu-hai<sup>1</sup>, WU Sheng-chuan<sup>2,3</sup>, ZHENG Chao<sup>1</sup>, ZHANG Jian-hai<sup>1</sup>

(1 State Key Lab of Hydraulics and Mountain River Engineering  
Sichuan University, Chengdu 610065, P. R. China;

2 Centre for Advanced Materials Joining and Computations (AMJC),  
School of Materials Science and Engineering,

Hefei University of Technology, Hefei 230009, P. R. China;

3 Centre for Advanced Computations in Engineering Science (ACES), Department of  
Mechanical Engineering, National University of Singapore, 117576 Singapore)

**Abstract** A novel polygonal finite element method (PFEM), which is based on partition of unity, was proposed and named as virtual node method (VNM). To test the performance of present method, intensive numerical examples were carried out for solid mechanic problems. With polynomial form, virtual node method achieves better results than that of traditional PFEM, including Wachspress method and mean value method in standard patch test. Compared with standard triangular FEM, virtual node method can achieve better accuracy. With the ability to construct shape function on polygonal elements, virtual node method provides greater flexibility in mesh generation. Therefore, several fracture problems were studied to demonstrate potential implementation. With the advantage of virtual node method, convenient refinement and remeshing strategy are applied.

**Key words** virtual node method, polygonal finite element method, partition of unity, crack propagation