文章编号: 1000-0887(2009)10-1213-10
© 应用数学和力学编委会, ISSN 1000-0887

非平稳 Gauss环境激励下模态参数识别的新方法*

杜秀丽[1], 汪凤泉[2]

(1. 南京师范大学 数学科学学院, 南京 210046;
2. 东南大学 土木工程学院, 南京 210096)

(陈立群推荐)

摘要: 结合多元连续时间自回归模型, 针对受均匀调制 Gauss随机激励的线性时不变系统, 提出了一种时域模态识别的新方法. 该方法仅从响应数据就能够识别系统的物理参数. 首先把结构动力学方程转化为一个 3阶的连续时间自回归模型; 接着基于在非常短的时间段内均匀调制函数接近于一个常数矩阵以及随机微分方程强解的性质, 得到均匀调制函数的估计, 并针对两种特殊情况进行讨论; 然后利用 Girsanov定理, 对条件似然函数进行极大化, 得到物理参数的精确极大似然估计. 数值结果表明, 该估计不仅具有极高的精度和稳健性, 而且计算效率非常高.

关 键 词: 模态识别; 均匀调制函数; 连续时间自回归模型; Brown运动; 精确极大似然估计

中图分类号: O324; O211.63; TU311.3 文献标识码: A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2009.10.009

引 言

在工程结构领域, 模态参数提供了振动系统动态性的重要信息. 但是因为环境振动试验中的激励太复杂, 一般不容易测量到, 因此我们只能从响应数据来识别模态. 传统的模态识别的模型和方法都是假设结构所受的外部激励是平稳随机激励. 实际上, 随机载荷几乎都是非平稳的. 过去的十几年里, 人们已经提出了许多非平稳环境激励下仅从响应数据来识别模态参数的方法, 比较成熟的方法主要集中在时域和时频分析两方面, 这些方法有它们各自的优缺点.

时频分析方法之所以能对非平稳信号进行分析, 在于它能同时提取时间和频率的信息[1]. 过去一段时间内, 时频分析已经得到飞速发展. 最常用的方法有短时 Fourier变换、WVD分布、小波变换和 HHT变换等[2-5]. 无论如何, 上述各种时频分析方法都有各自的局限性. 短时 Fourier变换对于固定的时间间隔不能同时拥有高的时间和频率分辨率. 除此之外, 时间和频率分辨率部分地依赖于窗的选择. Cohen类的 WVD分布虽然具有理想的时频聚集性, 但同时也存在着严重的交叉项和负项. 小波变换能同时有效提取观测信号的时间和频率特征, 因此人

* 收稿日期: 2009-01-06; 修订日期: 2009-07-10
基金项目: 国家自然科学基金(重点)资助项目(50278017)
作者简介: 杜秀丽(1974—), 女, 山西人, 讲师, 博士(联系人. Tel: +86-25-85328301; E-mail: duxiuli@njnu.edu.cn).

们认为它很适合于对非平稳信号进行处理以及对非平稳环境振动下的系统模态进行识别, 然而它也存在着许多不足之处[6]. 最严重的缺陷包括交互项、边界效应以及能量泄漏. HHT变换[7]于 1998年由 Huang N E首次提出, 通过经验模态分解法首先对信号进行解耦, 分解为一系列的本征模态函数; 然后对每一个本征模态函数应用 Hilbert变换, 从而得到信号的时频表示. 但是, 特别对于高频信号, EMD可能产生许多包含有一个以上频率成分的本征模态函数, 这是我们不想看到的. 针对这个问题, Peng等[8]在自己的论文中给出改进的方法.

时域方法主要有反演算法、ARMA模型以及时变 ARMA 方法等. ARMA 模型作为处理非平稳信号的一个有力工具, 现在已经广泛用于工程结构识别中. 但是, 该方法需要首先通过差分把数据转化为平稳信号, 然后再采用平稳时间序列参数辨识方法识别模型参数. 反演算法通过迭代算法来估计系统参数, 但是这种方法强烈地依赖初始参数的设置, 而且计算效率特别低[9-10]. 由于受到非平稳随机激励的线性时不变系统的响应也是非平稳的信号, 该信号可用离散的时变 ARMA 模型来描述, 因此关于时变 ARMA的识别方法均可适用于非平稳激励的线性时不变系统. 这种方法有许多优点[11-12], 比如: 表达简洁、精度高、分辨率高、处理时变动态性强、分析灵活, 能直接捕捉非平稳信号潜在的结构动态性. 但是 TARMA 方法强烈依赖于模型阶数, 如果设定的阶数不合适, 将会直接影响识别的精度.

鉴于此, 本文针对非平稳随机激励下的线性时不变系统, 基于连续时间自回归模型, 提出了一种时域模态识别的新方法.

1 多元 Gauss连续时间自回归过程

定义 1.1 一个 n维的连续时间 Gauss$p\,(p>0)$ 阶自回归过程被定义为下面随机微分方程的一个解:

$$D^p\boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{A}_1D^{p-1}\boldsymbol{X}(t)+\cdots+\boldsymbol{A}_{p-1}D\boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{A}_p\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{B}(t)+\sigma(t)D\boldsymbol{W}(t), \tag{1}$$

其中, $\boldsymbol{A}_i\,(i=1,\cdots,p)$ 是 $n\times n$的常数矩阵; 算子 D表示关于时间 t的导数; $\boldsymbol{B}(t)$ 表示 n维的列向量; $\sigma(t)$ 表示 $n\times n$ 的非奇异矩阵函数, 称为均匀调制函数. $\{\boldsymbol{W}_t, \mathscr{F}_t; 0\leqslant t<\infty\}$集合是一个 n维的 Brown运动. 因为 $D\boldsymbol{W}(t)$ 不存在, 为了让方程 (1)有意义, 我们把它表示为状态空间形式:

$$\boldsymbol{X}(t)=(\boldsymbol{I}_n, \boldsymbol{0}, \cdots, \boldsymbol{0})\boldsymbol{Y}(t), \tag{2}$$

$$d\boldsymbol{Y}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}(t)dt+\boldsymbol{B}_1(t)dt+\boldsymbol{C}(t)d\boldsymbol{W}(t), \tag{3}$$

其中, $\boldsymbol{Y}(t)=(\boldsymbol{Y}_0^T(t), \cdots, \boldsymbol{Y}_{p-1}^T(t))^T$ 表示 np 维的列向量, $\boldsymbol{Y}_i(t)\,(i=0,\cdots,p-1)$ 是 n维的状态向量, $\boldsymbol{B}_1(t)=(\boldsymbol{0}_{1\times n}, \cdots, \boldsymbol{0}_{1\times n}, \boldsymbol{B}^T(t))^T$, $\boldsymbol{C}(t)=(\boldsymbol{0}_n, \cdots, \boldsymbol{0}_n, \sigma^T(t))^T$, 以及

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_n & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{I}_n \\ -\boldsymbol{A}_p & -\boldsymbol{A}_{p-1} & \cdots & -\boldsymbol{A}_1 \end{pmatrix}.$$

上述的随机微分方程 (3)有如下的强解:

$$\boldsymbol{Y}(t)=e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{Y}(0)+\int_0^t e^{\boldsymbol{A}(t-s)}\boldsymbol{B}_1(s)ds+\int_0^t e^{\boldsymbol{A}(t-s)}\boldsymbol{C}(s)d\boldsymbol{W}(s), \tag{4}$$

其中 $$e^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{I}+\sum_{n=1}^{\infty}(\boldsymbol{A}t)^n/n!.$$

令 $\boldsymbol{S}(t)=\boldsymbol{Y}(t)-E(\boldsymbol{Y}(t))$, 则

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{S}(t)\mathrm{d}t + \boldsymbol{C}(t)\mathrm{d}\boldsymbol{W}(t).$$

不过为了表示方便,我们仍以 $\boldsymbol{Y}(t)$ 代替 $\boldsymbol{S}(t)$,因此在后面的研究中,我们总是假设 $\boldsymbol{Y}(t)$ 满足方程

$$\mathrm{d}\boldsymbol{Y}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}(t)\mathrm{d}t + \boldsymbol{C}(t)\mathrm{d}\boldsymbol{W}(t). \tag{5}$$

2 Gauss CAR模型的参数估计

2.1 模型参数的精确极大似然估计

精确极大似然估计首先由 Brockwell于 2007年提出[13],他主要针对一维的情况,在均匀调制函数为常数的假设下提出 CAR模型参数的估计方法. 本文中,我们把它推广到高维系统且均匀调制函数是关于时间的函数的情形.

方程(5)可以表示为

$$\begin{cases} \mathrm{d}\boldsymbol{Y}_0(t) = \boldsymbol{Y}_1(t)\mathrm{d}t, \\ \vdots \\ \mathrm{d}\boldsymbol{Y}_{p-2}(t) = \boldsymbol{Y}_{p-1}(t)\mathrm{d}t, \\ \mathrm{d}\boldsymbol{Y}_{p-1}(t) = [-\boldsymbol{A}_p\boldsymbol{Y}_0(t) - \cdots - \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{Y}_{p-1}(t)]\mathrm{d}t + \sigma(t)\mathrm{d}\boldsymbol{W}(t). \end{cases} \tag{6}$$

从方程组(6)的前 $p-1$行可以看出, $\boldsymbol{Y}_j(t)\,(j=0,\cdots,p-2)$ 是 $\boldsymbol{Y}_{p-1}(t)$ 和初值 $\boldsymbol{Y}(0) = (\boldsymbol{y}_0^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{y}_{p-1}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ 的函数, 则方程组(6)的最后一个表达式也可写成

$$\mathrm{d}\boldsymbol{Y}_{p-1}(t) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{Y}_{p-1},t)\mathrm{d}t + \sigma(t)\mathrm{d}\boldsymbol{W}(t), \tag{7}$$

其中 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{Y}_{p-1},t)$ 是一个 n 维的关于 $\left\{\boldsymbol{Y}_{p-1}(s),\ 0\leqslant s\leqslant t\right\}$ 的函数.

令

$$L_t = \exp\left\{\int_0^t (\sigma^{-1}(s)\boldsymbol{G}(\boldsymbol{Z}_{p-1},s))^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\boldsymbol{W}(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \|\sigma^{-1}(t)\boldsymbol{G}(\boldsymbol{Z}_{p-1},s)\|^2\mathrm{d}s\right\},$$

则 L_t 是个鞅[14]. 对于每一个 $0\leqslant T<\infty$, 我们可以定义一个 $\mathscr{F}_T$ 上新的概率测度 P_T, 满足

$$\mathrm{d}P_T = L_T\mathrm{d}P_{y_{p-1}}.$$

若 f 是一个 $C[0,T]^n$ 上的可测函数, 则有

$$Ef(\xi) = E_{y_{p-1}}f(\xi)L_T = \int f(\xi)L(\xi,T)\mathrm{d}P_{y_{p-1}}(\xi).$$

这意味着 L_T 是测度 $P_{y_{p-1}}$ 下 $\boldsymbol{Y}_{p-1}(t)$ 对 $\boldsymbol{y}_{p-1}$ 的条件密度. 如果我们能观测到 $\boldsymbol{Y}_{p-1}$, 那么就能通过使 L_T 达到最大求得未知参数的条件极大似然估计. 如果样本轨迹为

$$\left\{\boldsymbol{y}(s) = (\boldsymbol{z}_0^{\mathrm{T}}(s),\cdots,\boldsymbol{z}_{p-1}^{\mathrm{T}}(s))^{\mathrm{T}},\ 0\leqslant s\leqslant T\right\},$$

则对数似然函数可以表示为

$$\ln L_T = \int_0^T \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(\sigma\sigma^{\mathrm{T}})^{-1}(s)\mathrm{d}\boldsymbol{z}_{p-1}(s) - \frac{1}{2}\int_0^T \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(\sigma\sigma^{\mathrm{T}})^{-1}(s)\boldsymbol{G}\mathrm{d}s. \tag{8}$$

对(8)式关于 $\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_p$ 微分并令导数等于 0, 即可得到参数的精确极大似然估计.

定理 2.1 设 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_p)$ 是第 1节定义的 CAR过程的参数, 令

$$\boldsymbol{Y}(t) = (\boldsymbol{z}_{p-1}^{\mathrm{T}}(t),\cdots,\boldsymbol{z}_0^{\mathrm{T}}(t))^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{R}(t) = (\boldsymbol{Y}(t)\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(t))\otimes(\sigma(t)\sigma^{\mathrm{T}}(t))^{-1},$$

则参数的极大似然估计为

$$\mathrm{vec}(\boldsymbol{P}) = -\left(\int_0^T \boldsymbol{R}(t)\mathrm{d}t\right)^{-1}\mathrm{vec}\left(\int_0^T (\sigma(t)\sigma^{\mathrm{T}}(t))^{-1}\mathrm{d}\boldsymbol{z}_{p-1}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(t)\right), \tag{9}$$

其中, vec(·)表示拉直运算, $\otimes$表示 Kronecker积.

证明　从方程(6)~(8)可看出:

$$\ln L_T = -\int_0^T \sum_{i=0}^{p-1} z_i^{\mathrm{T}}(t) A_{p-i}^{\mathrm{T}} (\sigma\sigma^{\mathrm{T}})^{-1}(t)\, \mathrm{d}z_{p-1}(t) - \frac{1}{2}\int_0^T \sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=0}^{p-1} z_i^{\mathrm{T}}(t) A_{p-i}^{\mathrm{T}} (\sigma\sigma^{\mathrm{T}})^{-1}(t) A_{p-j} z_j(t)\, \mathrm{d}t.$$

对上述方程的每一项关于 $A_i (i = 1, \cdots, p)$ 微分可得

$$\frac{\partial \int_0^T z_{p-i}^{\mathrm{T}} A_i^{\mathrm{T}} (\sigma\sigma^{\mathrm{T}})^{-1} \mathrm{d}z_{p-1}}{\partial A_i} = \int_0^T (\sigma\sigma^{\mathrm{T}})^{-1} \mathrm{d}z_{p-1} z_{p-i}^{\mathrm{T}},$$

$$\frac{\partial \int_0^T z_{p-i}^{\mathrm{T}} A_i^{\mathrm{T}} (\sigma\sigma^{\mathrm{T}})^{-1} A_i z_{p-i}\, \mathrm{d}t}{\partial A_i} = 2\int_0^T (\sigma\sigma^{\mathrm{T}})^{-1} A_i z_{p-i} z_{p-i}^{\mathrm{T}}\, \mathrm{d}t.$$

当 $i, j = 1, \cdots, p$ 且 $i \neq j$ 时,

$$\frac{\partial \int_0^T z_i^{\mathrm{T}} A_{p-i}^{\mathrm{T}} (\sigma\sigma^{\mathrm{T}})^{-1} A_{p-j} z_j\, \mathrm{d}t}{\partial A_{p-j}} = \frac{\partial \int_0^T z_j^{\mathrm{T}} A_{p-j}^{\mathrm{T}} (\sigma\sigma^{\mathrm{T}})^{-1} A_{p-i} z_i\, \mathrm{d}t}{\partial A_{p-j}} = \int_0^T (\sigma\sigma^{\mathrm{T}})^{-1} A_{p-i} z_i z_j^{\mathrm{T}}\, \mathrm{d}t.$$

因此, 对于 $i = 1, \cdots, p$,

$$\frac{\partial \ln L_T}{\partial A_i} = -\int_0^T (\sigma\sigma^{\mathrm{T}})^{-1} \mathrm{d}z_{p-1} z_{p-i}^{\mathrm{T}} - \int_0^T \sum_{j=0}^{p-1} (\sigma\sigma^{\mathrm{T}})^{-1} A_{p-j} z_j z_{p-i}^{\mathrm{T}}\, \mathrm{d}t = -\int_0^T (\sigma\sigma^{\mathrm{T}})^{-1} \mathrm{d}z_{p-1} z_{p-i}^{\mathrm{T}} - \int_0^T (\sigma\sigma^{\mathrm{T}})^{-1} (A_1, \cdots, A_p)(z_{p-1}^{\mathrm{T}}, \cdots, z_0^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} z_{p-i}^{\mathrm{T}}\, \mathrm{d}t.$$

令 $\partial \ln L_T / \partial A_i = 0$, $i = 1, \cdots, p$, 则有

$$-\int_0^T (\sigma\sigma^{\mathrm{T}})^{-1} \mathrm{d}z_{p-1} (z_{p-1}^{\mathrm{T}}, \cdots, z_0^{\mathrm{T}}) = \int_0^T (\sigma\sigma^{\mathrm{T}})^{-1} (A_1, \cdots, A_p)(z_{p-1}^{\mathrm{T}}, \cdots, z_0^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} (z_{p-1}^{\mathrm{T}}, \cdots, z_0^{\mathrm{T}})\, \mathrm{d}t. \tag{10}$$

求解上述的方程即可得到定理的结论.

特别地, 当 $\sigma(t)$ 是对角矩阵时, 有下面的结论:

定理 2.2 假设 $A_1, \cdots, A_p$ 是第 1节所定义的 CAR 过程的参数. 令 $(A_1, \cdots, A_p) = (b_1, \cdots, b_n)^{\mathrm{T}}$, 则参数的精确极大似然估计为

$$\hat{b}_i^{\mathrm{T}} = -\left(\int_0^T \sigma_i^{-2}(t)\, \mathrm{d}z_{p-1,i}(t) Y^{\mathrm{T}}(t)\right)\left(\int_0^T \sigma_i^{-2}(t) Y(t) Y^{\mathrm{T}}(t)\, \mathrm{d}t\right)^{-1}, \tag{11}$$

其中, $\sigma_i(t)$ 表示 $\sigma(t)$ 的第 i个对角线元素, $z_{p-1,i}(t)$ 表示 $z_{p-1}(t)$ 的第 i个元素.

证明 从(10)式可知, 对 $i = 1, \cdots, n$,

$$-\int_0^T \sigma_i^{-2}(t)\, \mathrm{d}z_{p-1,i} (z_{p-1}^{\mathrm{T}}, \cdots, z_0^{\mathrm{T}}) = b_i^{\mathrm{T}} \int_0^T \sigma_i^{-2}(t) (z_{p-1}^{\mathrm{T}}, \cdots, z_0^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} (z_{p-1}^{\mathrm{T}}, \cdots, z_0^{\mathrm{T}})\, \mathrm{d}t.$$

求解上述的方程即可得到定理的结论.

2.2 $\sigma(t)$ 的估计

实际应用中, 尤其在结构的模态识别中, 模型的阶数一般都比较低, 因此, 下面仅考虑 CAR(p) 模型中 p 为 3的情形.

方程(4)也可以写成如下的形式:

$$Y(t) - \mathrm{e}^{A(t-t_0)} Y(t_0) = \int_{t_0}^t \mathrm{e}^{A(t-s)} C(s)\, \mathrm{d}W(s). \tag{12}$$

对上式两边平方并取期望可得

$$E\left(\boldsymbol{Y}(t)-e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{Y}(t_0)\right)\left(\boldsymbol{Y}(t)-e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{Y}(t_0)\right)^{\mathrm{T}}=\int_{t_0}^{t}e^{\boldsymbol{A}(t-s)}\boldsymbol{C}(s)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(s)e^{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t-s)}\mathrm{d}s. \tag{13}$$

实际应用中,均匀调制函数 $\sigma(t)$ 是区间 $[0, T]$ 上的连续函数,因此可认为存在着一列子区间 $T_1, \cdots, T_k$, 在每个子区间 $T_i=[t_i, t_{i+1})$ 上(只要区间的长度足够小), $\sigma(t)$ 渐近于一个常数矩阵. 对于第 i 个子区间 T_i, 给定 $h>0$ 且 $h\rightarrow 0$, 令 $m=|T_i|/h$, 我们又可把 T_i 分为 m 个子子区间 $[t_i, t_i+h), \cdots, [t_i+(m-1)h, t_i+mh)$. 由方程 (13) 可知, 对于 $j=1, \cdots, m$, 下面表达式成立:

$$\begin{aligned}&E\left(\boldsymbol{Y}(t_i+jh)-e^{\boldsymbol{A}h}\boldsymbol{Y}(t_i+(j-1)h)\right)\left(\boldsymbol{Y}(t_i+jh)-e^{\boldsymbol{A}h}\boldsymbol{Y}(t_i+(j-1)h)\right)^{\mathrm{T}}\approx\\&\int_{t_i+(j-1)h}^{t_i+jh}e^{\boldsymbol{A}(t_i+jh-s)}\boldsymbol{C}(t_i)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(t_i)e^{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t_i+jh-s)}\mathrm{d}s=\\&\int_0^h e^{\boldsymbol{A}(h-s)}\boldsymbol{C}(t_i)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(t_i)e^{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(h-s)}\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{14}$$

显然对所有 $j=1, \cdots, m$, 方程 (14) 的右边相等且为常矩阵, 这意味着新序列 $\left\langle\left(\boldsymbol{Y}(t_i+jh)-e^{Ah}\boldsymbol{Y}(t_i+(j-1)h)\right)\left(\boldsymbol{Y}(t_i+jh)-e^{Ah}\boldsymbol{Y}(t_i+(j-1)h)\right)^{\mathrm{T}}, j=1, \cdots, m\right\rangle$ 是均值平稳的, 因此我们可以得到它的均值的矩估计如下:

$$\left\{\sum_{j=1}^{m}\left(\boldsymbol{Y}(t_i+jh)-e^{Ah}\boldsymbol{Y}(t_i+(j-1)h)\right)\left(\boldsymbol{Y}(t_i+jh)-e^{Ah}\boldsymbol{Y}(t_i+(j-1)h)\right)^{\mathrm{T}}\right\}\backslash m\overset{\triangle}{=}(\boldsymbol{V}_{ij})_{i,j=1,2,3}, \tag{15}$$

其中 $\boldsymbol{V}_{ij}(i, j=1, 2, 3)$ 是 n 维方阵.

令 $e^{\boldsymbol{A}(h-s)}=(\boldsymbol{H}_{ij}(h-s))_{i,j=1,2,3}$, 其中 $\boldsymbol{H}_{ij}(i, j=1, 2, 3)$ 是 n 维方阵. 则

$$\int_0^h e^{\boldsymbol{A}(h-s)}\boldsymbol{C}(t_i)\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(t_i)e^{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(h-s)}\mathrm{d}s=\begin{pmatrix}\int_0^h\boldsymbol{H}_{13}\sigma\sigma^{\mathrm{T}}(t_i)\boldsymbol{H}_{13}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}s & \int_0^h\boldsymbol{H}_{13}\sigma\sigma^{\mathrm{T}}(t_i)\boldsymbol{H}_{23}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}s & \int_0^h\boldsymbol{H}_{13}\sigma\sigma^{\mathrm{T}}(t_i)\boldsymbol{H}_{33}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}s\\ \int_0^h\boldsymbol{H}_{23}\sigma\sigma^{\mathrm{T}}(t_i)\boldsymbol{H}_{13}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}s & \int_0^h\boldsymbol{H}_{23}\sigma\sigma^{\mathrm{T}}(t_i)\boldsymbol{H}_{23}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}s & \int_0^h\boldsymbol{H}_{23}\sigma\sigma^{\mathrm{T}}(t_i)\boldsymbol{H}_{33}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}s\\ \int_0^h\boldsymbol{H}_{33}\sigma\sigma^{\mathrm{T}}(t_i)\boldsymbol{H}_{13}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}s & \int_0^h\boldsymbol{H}_{33}\sigma\sigma^{\mathrm{T}}(t_i)\boldsymbol{H}_{23}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}s & \int_0^h\boldsymbol{H}_{33}\sigma\sigma^{\mathrm{T}}(t_i)\boldsymbol{H}_{33}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}s\end{pmatrix}.$$

因此由 (15)式可得

$$\begin{pmatrix}\int_0^h\boldsymbol{H}_{13}\sigma\sigma^{\mathrm{T}}(t_i)\boldsymbol{H}_{13}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}s & \int_0^h\boldsymbol{H}_{13}\sigma\sigma^{\mathrm{T}}(t_i)\boldsymbol{H}_{23}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}s & \int_0^h\boldsymbol{H}_{13}\sigma\sigma^{\mathrm{T}}(t_i)\boldsymbol{H}_{33}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}s\\ \int_0^h\boldsymbol{H}_{23}\sigma\sigma^{\mathrm{T}}(t_i)\boldsymbol{H}_{13}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}s & \int_0^h\boldsymbol{H}_{23}\sigma\sigma^{\mathrm{T}}(t_i)\boldsymbol{H}_{23}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}s & \int_0^h\boldsymbol{H}_{23}\sigma\sigma^{\mathrm{T}}(t_i)\boldsymbol{H}_{33}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}s\\ \int_0^h\boldsymbol{H}_{33}\sigma\sigma^{\mathrm{T}}(t_i)\boldsymbol{H}_{13}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}s & \int_0^h\boldsymbol{H}_{33}\sigma\sigma^{\mathrm{T}}(t_i)\boldsymbol{H}_{23}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}s & \int_0^h\boldsymbol{H}_{33}\sigma\sigma^{\mathrm{T}}(t_i)\boldsymbol{H}_{33}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}s\end{pmatrix}=(\boldsymbol{V}_{ij})_{i,j=1,2,3}. \tag{16}$$

无论如何, $\sigma(t_i)$ 仅包含 n^2 个参数, 而方程组 (16) 包含 $9n^2$ 个方程, 这就在导致了冗余. 因此, 只需通过求解如下的方程即可得到参数

$$\boldsymbol{V}_{33}=\int_0^h\boldsymbol{H}_{33}\sigma\sigma^{\mathrm{T}}(t_i)\boldsymbol{H}_{33}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}s. \tag{17}$$

当 h 趋于 0时, e^{Ah} 的子块 $\boldsymbol{H}_{33}$ 总是渐近于单位矩阵, 因此可得

$$\sigma(t_i)\sigma^{\mathrm{T}}(t_i)=\frac{\boldsymbol{V}_{33}}{h}. \tag{18}$$

实际应用中，h太小会导致舍入误差，太大会带来精度误差. 因此，为了确保估计的精度，h的值应该取在0.001附近.

当$\sigma(t_i)$是下三角矩阵时，可通过对$\boldsymbol{V}_{33}/h$进行cholesky分解得到参数$\sigma(t_i)$的估计，由分解的性质可知，估计是唯一的.

如果外部随机激励是空间完全不相关时，$\sigma(t)$可表示为一个对角阵，记为$\sigma(t)=\mathrm{diag}(\sigma_1(t),\cdots,\sigma_n(t))$. 如上所述，$\sigma(t_i)=\mathrm{diag}(\sigma_1(t_i),\cdots,\sigma_n(t_i))$在区间$T_i$上等于一个常数矩阵. 选择$\boldsymbol{V}_{33}$的对角线上的元素$v_{ii}$，由方程(18)我们可以得到区间$T_i$上参数$\sigma(t_i)$的估计

$$\sigma_j(t_i)=\sqrt{v_{jj}/h},\qquad j=1,\cdots,n. \tag{19}$$

如果外部随机激励是部分空间相关时(此处假设空间相关度为l)，则

$$\sigma(t_i)=\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & & & & \\ \sigma_2 & 0 & \cdots & 0 & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ \sigma_l & 0 & \cdots & 0 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \sigma_{\mathrm{mod}(n,l)l+1} & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & & \sigma_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

通过推导，我们也可得到方程(19)的结论.

最后通过对$\hat{\sigma}(t_i)(i=1,\cdots,k)$进行样条拟合即可得到参数$\sigma(t)$的估计.

第2.1节的参数估计过程要求矩阵$\sigma(t)$具有逆矩阵，但上述的分块矩阵$\sigma(t)$显然不满足要求，因此我们对$\sigma(t)$进行修正，构造一个新矩阵$\varepsilon(t)$

$$\varepsilon(t)=\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & & & & \\ \sigma_2 & p\sigma_2 & \cdots & 0 & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ \sigma_l & 0 & \cdots & p\sigma_l & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \sigma_{\mathrm{mod}(n,l)l+1} & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & & \sigma_n & 0 & \cdots & p\sigma_n \end{pmatrix}.$$

这样所构造的矩阵显然是可逆的，而且当p足够小时，矩阵$\varepsilon(t)$和$\sigma(t)$的对应元素十分接近，因此两个矩阵可近似认为是相等的，所以我们可用$\varepsilon(t)$代替$\sigma(t)$.

实际应用中，p取值范围应介于0.005到0.05之间，这取决于空间相关度l. 当l较小时，p取值大约为0.005即可；反之，为了避免矩阵的奇异性，p应该取一个较大的值.

3　振动系统的模态识别

考虑一个受未知随机Gauss激励的多自由度振动系统，其结构动力学方程如下：

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{u}(t), \tag{20}$$

其中，$\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{C}$以及$\boldsymbol{K}$分别表示$n\times n$的质量、阻尼和刚度矩阵；$\ddot{\boldsymbol{x}}(t)$、$\dot{\boldsymbol{x}}(t)$和$\boldsymbol{x}(t)$表示$n\times 1$的

加速度、速度和位移向量, $\boldsymbol{u}(t)$ 是 $n\times 1$的外部荷载向量.

许多情况下,我们可以通过已知的成熟的算法精确估计系统的质量,本文的目标就是在结构质量已知的情况下,仅仅通过结构的响应来识别系统的刚度和阻尼矩阵,并且假设系统受风荷载激励.

文献[15]中, Harris提出了高度 z处风载的表达式:

$$P(z,t)=Q(z)+2Q(z)\beta w_0 v_f(t),$$

其中, $Q(z)$是 z的函数, β和 w_0是已知常数, $v_f(t)$表示脉动风. 因为风载本质上是非平稳的, $v_f(t)$也是非平稳的. 一般情况下, $v_f(t)$也是 Gauss的. 因此 $v_f(t)$可以表示为

$$v_f(t)=\lambda_1(t)+\int_0^t\phi_1(s)\,\mathrm{d}W(s),$$

其中 $W(t)$是一维 Brown运动. 根据随机过程的理论, $v_f(t)$的自协方差函数可以表示为

$$\gamma(s_1,s_2)=\int_0^{\min(s_1,s_2)}\phi_1^2(u)\,\mathrm{d}u.$$

这意味着 $v_f(t)$是一个有着递增方差的非平稳过程. 但是实际情况中并非如此. 因此, 我们引进了一个调整函数 $\mathrm{e}^{-\rho t}(\rho>0)$来对此进行修正. 令

$$v_f(t)=\lambda_1(t)+\mathrm{e}^{-\rho t}\int_0^t\phi_1(s)\,\mathrm{d}W(s),$$

则随着 ρ和 $\phi_1(t)$的变动, $v_f(t)$显然是一般非平稳的.

结合 $v_f(t)$和 $P(z,t)$的表达式可以得到

$$P(z,t)=\lambda_2(z,t)+\mathrm{e}^{-\rho t}\int_0^t\phi_2(z,s)\,\mathrm{d}W(s).\tag{21}$$

利用(21)式, 方程(20)中的非平稳随机激励向量 $\boldsymbol{u}(t)$可以表示为

$$\boldsymbol{u}(t)=\lambda_3(t)+\mathrm{e}^{-\rho t}\int_0^t\phi_3(s)\,\mathrm{d}\boldsymbol{W}(s),$$

其中 $\lambda_3(t)$是一个向量, $\{\boldsymbol{W}(t)\}$是 n维的 Brown运动, $\phi_3(t)$是非奇异矩阵. 因此方程(20)变为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)=\lambda_3(t)+\mathrm{e}^{-\rho t}\int_0^t\phi_3(s)\,\mathrm{d}\boldsymbol{W}(s).\tag{22}$$

在方程(22)两边同乘以 $\mathrm{e}^{\rho t}$并求导, 然后再对求导之后的方程两边同左乘 $\boldsymbol{M}^{-1}\mathrm{e}^{-\rho t}$, 可得

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{x}^{(3)}+(\rho\boldsymbol{I}+\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{C})\ddot{\boldsymbol{x}}(t)+(\rho\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{C}+\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K})\dot{\boldsymbol{x}}(t)+\rho\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)=\\&\qquad\lambda_4(t)+\boldsymbol{M}^{-1}\mathrm{e}^{-\rho t}\phi_3(t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{W}(t)/\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

令

$$\rho\boldsymbol{I}+\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}_1,\ \rho\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{C}+\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}=\boldsymbol{A}_2,\ \rho\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K}=\boldsymbol{A}_3,$$

$$\boldsymbol{M}^{-1}\mathrm{e}^{-\rho t}\phi_3(t)=\sigma(t),\ \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}&\boldsymbol{I}_n&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{I}_n\\-\boldsymbol{A}_3&-\boldsymbol{A}_2&-\boldsymbol{A}_1\end{pmatrix},$$

则方程(22)的状态空间方程为

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{x}(t)=(\boldsymbol{I}_n,\boldsymbol{0},\boldsymbol{0})\boldsymbol{Y}(t),\\&\mathrm{d}\boldsymbol{Y}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}(t)\,\mathrm{d}t+\lambda(t)\,\mathrm{d}t+\boldsymbol{C}(t)\,\mathrm{d}\boldsymbol{W}(t),\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{Y}(t)=(\boldsymbol{Y}_0^{\mathrm{T}}(t),\boldsymbol{Y}_1^{\mathrm{T}}(t),\boldsymbol{Y}_2^{\mathrm{T}}(t))^{\mathrm{T}}$表示 $3n$维的列向量, $\lambda(t)=(\boldsymbol{0}_{1\times n},\boldsymbol{0}_{1\times n},\lambda_4^{\mathrm{T}}(t))^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{C}(t)=(\boldsymbol{0}_n,\boldsymbol{0}_n,\sigma^{\mathrm{T}}(t))^{\mathrm{T}}$.

这样其实就是在结构动力学方程和随机微分方程之间建立了一种联系,对结构参数的识别就可以通过估计随机微分方程参数来实现了.

实际应用中,为了方便起见,我们可以通过 EMD 方法从模型中消除 $\lambda(t)$. 然后可直接通过定理 2.1和定理 2.2得到结构参数的估计.

事实上,我们最终需要估计的是 ρ, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{K}$ 而不是 $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$, $\boldsymbol{A}_3$. 不过,从方程组

$$\begin{cases} \rho\boldsymbol{I} + \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}_1, \\ \rho\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{C} + \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K} = \boldsymbol{A}_2, \\ \rho\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K} = \boldsymbol{A}_3, \end{cases}$$

可得

$$\rho^3\boldsymbol{I} - \rho^2\boldsymbol{A}_1 + \rho\boldsymbol{A}_2 - \boldsymbol{A}_3 = 0.$$

因此

$$\boldsymbol{C} = \frac{\rho\boldsymbol{M}\boldsymbol{A}_2 - \boldsymbol{M}\boldsymbol{A}_3}{\rho^2}, \quad \boldsymbol{K} = \frac{\boldsymbol{M}\boldsymbol{A}_3}{\rho}. \tag{23}$$

4 仿 真 计 算

本文研究一个受风载激励的 3层框架的建筑. 假定结构振动主要表现在楼层间的微小平动. 外部随机激励作用在主单元节点上, 各主单元所对应的质量是已知的, 质量矩阵为 $\boldsymbol{M} = \mathrm{diag}(1\,000, 1\,000, 1\,000)$ kg 每层的刚度和阻尼分别为 $k_j = 980$ kN/m, $c_j = 2\,814$ kN·s/m $(j = 1, 2, 3)$. 框架结构受非平稳 Gauss随机力作用. 为了利用上述方法进行识别, 我们进行了仿真, 仿真时间为 30 s.

为了便于比较, 我们把理论频率和阻尼比与识别的频率和阻尼比分别列于表 1. 从中可看出识别的结果和理论值相当接近. 所有情况下, 固有频率的最大识别误差均不超过 0.4%, 阻尼比的识别误差也是相当小的.

表 1　3层框架结构的固有频率和阻尼比

模态 m	理论值		识别结果	
	频率 f/Hz	阻尼比 r/(%)	频率 f/Hz	阻尼比 r/(%)
1	8.95	0.081	8.963 6	0.081
2	6.20	0.056	6.191 1	0.056
3	2.22	0.020	2.215 4	0.020

结构的理论模态振型、刚度和阻尼矩阵与识别结果的振型、刚度和阻尼矩阵分别列于表 2. 识别的结果是相当令人满意的, 和理论值相当接近.

表 2　3层框架结构的固有振型、刚度和阻尼矩阵

	Φ			$\boldsymbol{K}$ /(kN/m)			$\boldsymbol{C}$ /(kN·s/m)		
理论值	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1 960	−980	0	5.63	−2.815	0
	1.801 9	0.445 0	−1.247 0	−980	1 960	−980	−2.815	5.63	−2.815
	2.247 0	−0.801 9	0.555 0	0	−980	980	0	−2.815	2.815
识别结果	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1 957	−983	4	5.65	−2.68	−0.15
	1.802 6	0.443 6	−1.254 8	−994	1 975	−985	−3.06	5.72	−2.75
	2.250 6	−0.803 6	0.542 1	−9	−967	973	0.12	−2.76	2.73

5 结　　论

本文中,我们提出了一种基于 CAR 模型参数的精确极大似然估计的新的时域模态识别方法. 尽管 CAR模型是传统的模态识别方法,但以往人们都是先把连续模型转化为离散模型,然后再识别模态参数,这样无形中降低了计算效率. 我们所提出的新方法则克服了这些不足之处,适合于对非平稳 Gauss环境激励下的系统进行模态识别.

[参　考　文　献]

[1] Conforto S, D'Alessio T. Spectral analysis for non-stationary signals from mechanical measurements: a parametric approach[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 1999, **13**(3): 395-411.

[2] Zhang Z Y, Hua H X, Xu X Z, et al. Modal parameter identification through Gabor expansion of response signals[J]. Journal of Sound and Vibration, 2003, **266**(5): 943-955.

[3] Bonato P, Ceravolo R, De Stefano A, et al. Use of cross time-frequency estimators for structural identification in non-stationary conditions and under unknown excitation[J]. Journal of Sound and Vibration, 2000, **237**(5): 775-791.

[4] Lardies J, Ta M N, Berthillier M. Modal parameter estimation based on the wavelet transform of output data[J]. Archive of Applied Mechanics, 2004, **73**(9/10): 718-733.

[5] Yang J N, Lei Y, Pan S W, et al. System identification of linear structures based on Hilbert-Huang spectral analysis part 1: normal modes[J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 2003, **32**(9): 1443-1467.

[6] Tse P, Yang W X, Tam H Y. Machine fault diagnosis through an effective exact wavelet analysis[J]. Journal of Sound and Vibration, 2004, **277**(4/5): 1005-1024.

[7] Huang N E, Shen Z, Long S R, et al. The empirical mode decomposition and Hilbert spectrum for nonlinear and nonstationary time series analysis[J]. Proceedings of the Royal Society of London, Series A, 1998, **454**(1971): 903-951.

[8] Peng Z K, Tse P W, Chu F L. An improved Hilbert-Huang transform and its application in vibration signal analysis[J]. Journal of Sound and Vibration, 2005, **286**(1/2): 187-205.

[9] 李杰, 陈隽. 未知输入条件下的结构物理参数识别研究[J]. 计算力学学报, 1999, **16**(1): 32-40.

[10] 陈健云, 王建有, 林皋. 未知输入下的复合反演研究[J]. 工程力学, 2006, **23**(1): 6-10.

[11] Poulimenos A G, Fassois S D. Non-stationary mechanical vibration modelling and analysis via functional series TARMA models[A]. In: Van den Hof P M J, Wahlberg B, Weiland S Eds. Proceedings of the 13th IFAC Symposium on System Identification[C]. Rotterdam, Netherlands, 2003, 965-970.

[12] Poulimenos A G, Fassois S D. Parametric time-domain methods for non-stationary random vibration modelling and analysis: a critical survey and comparison[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2006, **20**(4): 763-816.

[13] Brockwell P, Davis R A, Yu Y. Continuous-time Gaussian autoregression[J]. Statistica Sinica, 2007, **17**(1): 63-80.

[14] Karatzas I, Shreve S E. Brownian Motion and Stochastic Calculus[M]. New York: Springer Press, 2000.

[15] Harris C M, Crede C E. Shock and Vibration Handbook[M]. New York: McGraw-Hill Book Company, 1976.

A New Modal Identification Method Under the Non-Stationary Gaussian Ambient Excitation

DU Xiu-li[1], WANG Feng-quan[2]
(1. College of Mathematical Sciences, Nanjing Normal University, Nanjing 210046, P. R. China;
2. College of Civil Engineering, Southeast University, Nanjing 210096, P. R. China)

Abstract: Based on the multivariate continuous time autoregressive model, a new time-domain modal identification method of LTI system driven by the uniformly modulated Gaussian random excitation was presented. The method can identify the physical parameters of the system from the response data. First, the structural dynamic equation is transformed into the continuous time autoregressive model of order 3. Second, based on the assumption that the uniformly modulated function is approximately equal to a constant matrix in a very short time period and the property of the strong solution of the stochastic differential equation, the uniformly modulated function is identified piecewise, and two special situations are discussed too. Finally, by virtue of the Girsanov theorem, a likelihood function was introduced, which is just a conditional density function. Maximizing the likelihood function gives the exact maximum likelihood estimators of model parameters. Numerical results show that the method has high precision and computing efficiency.

Key words: modal identification; uniformly modulated function; continuous time autoregressive model; Brownian motion; exact maximum likelihood estimator