文章编号: 1000-0887(2009)10-1234-09

应用数学和力学编委会, ISSN 1000-0887

脉冲泛函微分方程的渐近稳定性*

罗治国, 罗 艳

(湖南师范大学 数学系, 长沙 410081)

(郭兴明推荐)

摘要: 讨论了一类脉冲泛函微分方程的渐近稳定性. 通过改进 Liapunov泛函的上界, 利用 Liapunov泛函第二方法和 Jensen不等式, 得到了一个一致稳定性定理和一个一致渐近稳定性定理, 给出的例子说明了所得结果的优越性.

关 键 词: 稳定性; 脉冲泛函微分方程; Liapunov泛函; Jensen不等式

中图分类号: O175 **文献标识码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2009.10.011

引 言

近 30年来, 带脉冲效应的微分系统的定性性质的研究得到了迅速发展. 这些发展主要是由于借助这样的系统, 自然科学技术领域的许多现象和过程能被模拟出来 (见文献[1-3]). 例如, 充满肆意投机动机的经济环境下的若干商品的价格模型, 其中消费者持币待购, 而商家则囤积商品期望获得最大利润. 这个模型包含了脉冲和时滞. 所以研究带时滞的脉冲微分方程在理论和实际上都是有意义的. Liapunov函数[4-9]和带有 Razumikhin技巧的 Liapunov泛函[10-12]被用来研究具有限时滞或无限时滞的脉冲泛函微分方程的稳定性和有界性.

本文讨论一类带脉冲效应的泛函微分方程, 目的是改进 Liapunov泛函 $V(t, \ )$ 的上界. 我们的方法基于 Liapunov第二方法和 Jensen不等式的应用, 我们得到了一些新的稳定性定理. 在第 3节, 我们给出了例子说明所得结果的优越性.

1 预 备

考虑脉冲泛函微分方程:

$$\begin{cases} x\ (t) = f(t, x_t), & t \quad t_0, \\ x(t_k) = I(t_k, x(t_k^-)), & k \quad \mathbf{Z}^+, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\mathbf{Z}^+$ 是正整数集合, $f \quad [t_0, \quad) \quad PC \quad R^n$, $I \quad [t_0, \quad) \quad S(\ ) \quad R^n$, 这里

* 收稿日期: 2009-01-21; 修订日期: 2009-08-18

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10871063); 湖南省教育厅(重点)科研基金资助项目(07A038)

作者简介: 罗治国(1956), 男, 湖南湘潭人, 教授, 博士(联系人. Tel: +86-731-88872549; E-mail: luozg@hunnu.edu.cn)

$$S(\ ) = \left\{ x \quad R^n \quad |x| < \ \right\},\ PC = PC([- \ ,0],R^n)$$

表示分段右连续函数 $[- \ , 0]$ R^n 构成的空间, 其上的范数 $= \sup_{- \ s\ 0} | \ (s)|$, 而 $|\ |$ 表示 R^n 中的模. $t_0 < t_k < t_{k+1}$, 当 k 时, t_k . 对所有的 t t_0, x_t PC 由 $x_t(s) = x(t+s)$, $-$ s 0 定义. $x(t)$ 表示 $x(t)$ 的右导数.

称 $x(t) = x(t, \ , \ )$ 是方程(1)带初始条件

$$x \ = \ \ PC, \qquad t_0 \tag{2}$$

的一个解, 如果 x $[\ - \ , \ )$ R^n (对某个), 对于 t $[\ - \ , \ ) \left\{ t_k, k = 1, 2, \right\}$ 连续且满足式(1)和式(2).

我们假设 $f(t, 0)$ 0 和 $I(t_k, 0)$ 0, 从而 $x(t)$ 0 是方程(1)的一个解, 我们称之为零解.

对任意的 > 0, 令 $PC(\ ) = \left\{ \quad PC \quad < \ \right\}$.

称方程(1)的零解是:

(S_1) 一致稳定的, 如果对任意的 t_0 和 > 0, 存在 $= (\ ) > 0$ 使得当 $PC(\ )$ 时, 对所有 t 有 $|x(t, \ , \ )|$;

(S_2) 一致渐近稳定的, 如果它一致稳定, 且存在 > 0 使得对任意的 > 0, 存在 $T = T(\ ) > 0$ 使得当 $PC(\ )$ 时, 对所有的 t $+ T$, 有 $|x(t, \ , \ )|$.

我们假设如下条件成立:

(H_1) 对每个 k $\mathbf{Z}^+$, f 在 $[t_{k-1}, t_k)$ PC 上连续, 且对所有的 PC 和 k $\mathbf{Z}^+$, $\lim_{(t, \ ) \ (t_k^-, \ )} f(t, \ ) = f(t_k^-, \ )$ 存在;

(H_2) 在 PC 的每个紧集中, f 关于 是局部 Lipschitz;

(H_3) $I(t, x)$ $C([t_0, \ ) \ S(\ ), R^n)$ 且存在 $_1 > 0(\ _1 \ )$ 使得对所有的 k $\mathbf{Z}^+$, 当 x $S(\ _1)$ 时有 $x + I(t_k, x)$ $S(\ )$.

由文献[13-14]可知, 在条件 (H_1) ~ (H_3) 下, 初值问题(1)和(2)存在唯一解

$$x(t, \ , \ ), \ t \ [\ - \ , \ ), \quad > 0.$$

函数 $V(t, x): [t_0, \ ) \ S(\ ) \ \mathbf{R}^+$ 属于类 v_0, 如果

(A_1) V 在每个集合 $[t_{k-1}, t_k)$ $S(\ )$ 中连续, 且对所有的 s $S(\ )$ 和 k Z^+, $\lim_{(t, y) \ (t_k^-, x)} V(t, y) = V(t_k^-, x)$ 存在;

(A_2) V 关于 x $S(\ )$ 是局部 Lipschitz, 且对所有的 t t_0, $V(t, 0)$ 0.

函数 $V(t, \ ): [t_0, \ ) \ PC(\ ) \ R^+$ 属于类 $v_0(\ )$, 如果

(B_1) V 在每个集合 $[t_{k-1}, t_k)$ $PC(\ )$ 中连续, 且对所有的 $PC(\ )$ 和 k $\mathbf{Z}^+$, $\lim_{(t, \ ) \ (t_k^-, \ )} V(t, \ ) = V(t_k^-, \ )$ 存在;

(B_2) 在 $PC(\ )$ 的每个紧集中, V 关于 是局部 Lipschitz, 且 $V(t, 0)$ 0.

泛函 $V(t, \ )$ 属于类 $v_0^*(\ )$, 如果 V $v_0(\ )$, 且对任意的 x $PC([\ - \ , \ ), R^n)$, 当 t 时, $V(t, x_t)$ 连续.

设 V v_0 对任意的 (t, x) $[t_{k-1}, t_k)$ $S(\ )$, 沿方程(1)的解 $x(t)$ 的右导数 $V(t, x)$ 定义为

$$V_{(1)}(t, x(t)) = \lim_{h \ 0^+} \sup \frac{V(t+h, x(t+h)) - V(t, x(t))}{h}.$$

设 $V \quad {}_0(\ )$，对任意的 $(t, \ ) \ [t_{k-1}, t_k) \ PC(\ )$，沿方程 (1) 的解 $x(t)$ 的右导数 $V\ (t, \ )$ 定义为

$$V_{(1)}(t, x_t) = \lim_{h \ 0^+} \sup \frac{V(t+h, x_{t+h}) - V(t, x_t)}{h}.$$

称函数 $W: \mathbf{R}^+ \quad \mathbf{R}^+$ 属于类 K，如果 W 连续、严格递增且满足 $W(0) = 0$.

引理 1.1[1]　设 $u \ PC([t_0, \ ), \mathbf{R})$，$p \ C([t_0, \ ), \mathbf{R}^+)$，当 $k = 1, 2, \ $ 时，

$$u(t) \quad C + \int_{t_0}^{t} p(s)u(s)\,\mathrm{d}s + \sum_{t_0 < t_k < t} {}_k u(t_k^-), \qquad t \quad t_0,$$

这里 $C, \ {}_k \ 0$ 为常数. 那么

$$u(t) \quad C \prod_{t_0 < t_k < t} (1 + {}_k) \exp\left(\int_{t_0}^{t} p(s)\,\mathrm{d}s \right), \qquad t \quad t_0.$$

函数 $G: [a, b] \quad \mathbf{R}^+$ 被称为是下凸的，如果对所有的

$$s_1, s_2 \quad [a, b], \ G((s_1 + s_2)/2) \quad (G(s_1) + G(s_2))/2.$$

Jensen 不等式　设 G 在 $[\ ,\ ]$ 上下凸，x, p 在 $[a, b]$ 上可积，且

$$x(s) \quad , \ p(s) \quad 0, \int_a^b p(s)\,\mathrm{d}s > 0.$$

那么

$$G\left(\int_a^b p(s)x(s)\,\mathrm{d}s \Big\backslash \int_a^b p(s)\,\mathrm{d}s \right) \quad \int_a^b p(s)G(x(s))\,\mathrm{d}s \Big\backslash \int_a^b p(s)\,\mathrm{d}s.$$

引理 1.2[15-16]　假设 $W \ K$. 对 $L > 0$，定义

$$W_1(t) = \int_0^t W(s)\,\mathrm{d}s \Big\backslash L, \qquad t \ [0, L].$$

则 $W_1 \ K$，下凸且 $W_1(t) \quad W(t)$，$t \ [0, L]$.

关于 Jensen 不等式及其应用，可参见文献 [15-17].

2 主 要 结 果

由文献 [11] 的定理 3.1，有

定理 A　设 $W_1, W_2 \ K$，$V_1(t, x) \ v_0$，$V_2(t, \ ) \ v_0^*(\ )$，假设如下条件成立：

(i) $W_1(|\ (0)|) \quad V(t, \ ) \quad W_2(\ \ )$，其中

$$V(t, \ ) = V_1(t, \ (0)) + V_2(t, \ ) \quad v_0(\ );$$

(ii) 对每个 $k \ \mathbf{Z}^+$ 和所有的 $x \ S(\ _1)$，

$$V_1(t_k, x + I(t_k, x)) \quad V_1(t_k^-, x);$$

(iii) 对任意的 $\quad t_0$ 和 $\quad PC$，

$$V\ (t, x_t) \quad 0,$$

其中 $x(t) = x(t, \ , \ )$ 是方程 (1) 的解.

那么方程 (1) 的零解一致稳定.

现在我们给出上面结果的一个简单推广.

定理 2.1　设 $W_1 \ K$，$V_1(t, x) \ v_0$，$V_2(t, \ ) \ v_0^*(\ )$，假设如下条件成立：

(i) 对任意的 $\ > 0$，存在 $W \ K$ 使得

$$W_1(|\ (0)|)\quad V(t,\ )\quad W(\quad)+\ ,$$

其中

$$V(t,\ )=V_1(t,\ (0))+V_2(t,\ )\quad v_0(\ );$$

(ii) 对每个 $k\ \mathbf{Z}^+$ 和所有的 $x\ S(\ _1)$,

$$V_1(t_k,x+I(t_k,x))\quad(1+b_k)V_1(t_k^-,x),$$

其中 $b_k\quad 0$ 且 $\ _{k=1}b_k<\ $;

(iii) 对任意的 $\quad t_0$ 和 $\quad PC$, 当 $V(s,x_s)\quad V(t,x_t)\ (t-\quad s\quad t)$ 时, 有

$$V(t,x_t)\quad 0,$$

其中 $x(t)=x(t,\ ,\ )$ 是方程 (1) 的解.

那么方程 (1) 的零解一致稳定.

证明 令 $M=\quad_{k=1}(1+b_k)$, 则 $1\quad M<\ $. 任给 $\ >0(\quad_1)$, 选取 $\ =[1/(2M)]W_1(\ )$, 由条件 (i), 存在 W 满足

$$W_1(|\ (0)|)\quad V(t,\ )\quad W(\quad)+\ .$$

选取 $\ >0$, 使得 $\ <\ $ 且 $W(\ )<[1/(2M)]W_1(\ )$. 对任意的 $\quad t_0$ 和 $\quad PC(\ )$, 设 $x(t)=x(t,\ ,\ )$ 是方程 (1) 的解, 且 $[\ -\ ,\ )$ 是它的最大存在区间. 下面我们证明当 $t\ [\ -\ ,\ )$ 时, $|x(t)|\ $, 从而可知 $\ =+\ $ 且方程 (1) 的零解一致稳定.

假设存在某个 $t\ [\ ,\ )$ 使得 $|x(t)|>\ $. 令 $t=\inf\left\{t\ [\ ,\ )\ |\ |x(t)|>\ \right\}$. 注意到当 $t\ [\ -\ ,\ ]$ 时, $|x(t)|=|\ (t-\ )|\quad<\ $, 我们有 $t>\ $, 且当 $t\ [\ -\ ,t)$ 时, $|x(t)|\ $, 同时, 或者 $|x(t)|=\ $, 或者 $|x(t)|>\ $ 且存在某个 j 使 $t=t_j$. 对于后者, 从 $|x(t^-)|<\ _1$ 和关于函数 I 的假设, 有 $|x(t)|\ $. 所以, 无论何种情况 $V(t,x_t)$ 在 $[\ -\ ,t]$ 上都有定义. 令 $V_1(t)=V_1(t,x(t))$, $V_2(t)=V_2(t,x_t)$, $V(t)=V_1(t)+V_2(t)$. 并设对某个 $m\ \mathbf{Z}^+$, $\ [t_{m-1},t_m)$. 那么

$$V(t)\quad W(\ )+\ ,\qquad -\qquad t\qquad .$$

下面我们分两种情形讨论.

情形 1 $t_{m-1}\quad <t<t_m$, 则 $|x(t)|=\ $. 我们断言

$$V(t)\quad W(\ )+\ ,\qquad R[\ t[\ t. \tag{3}$$

假设存在 $\hat{t}I\ (R,\ t]$ 使得 $V(\hat{t})>WC(D)+C\backslash\ V(R)$, 那么存在 $\hat{t}I\ (R,\hat{t}]$ 使得 $V^{c}(\hat{t})>0$, 且当 $R-S[\ s[\ \hat{t}$ 时, $V(s)[\ V(\hat{t})$. 由假设 (iii), $V^{c}(\hat{t})[\ 0$, 矛盾. 所以式 (3) 成立.

由于 $|x(t)|=E$, 所以 $W_1(E)=W_1(|x(t)|)[\ V(t)[\ WC(D)+C<W_1(E)$, 矛盾.

情形 2 对某个 $k\backslash\ 0$, $t_{m+k}[\ t<t_{m+k+1}$. 类似式 (3) 的证明, 我们能够证得 $V(t)[\ WC(D)+C$, $R[\ t<t_m$. 由假设 (ii), 有

$$V(t_m)=V_1(t_m)+V_2(t_m)[\ (1+b_m)V_1(t_m^-)+(1+b_m)V_2(t_m)=$$
$$(1+b_m)V(t_m^-)[\ (1+b_m)(WC(D)+C).$$

类似地我们能够证明当 $i=1,2,\ ,k$ 时,

$$V(t)[\ (1+b_m),\ (1+b_{m+i-1})(WC(D)+C),\qquad t_{m+i-1}[\ t<t_{m+i},$$
$$V(t_{m+i})[\ (1+b_m),\ (1+b_{m+i})(WC(D)+C)$$

和

$$V(t) \le (1+b_m), (1+b_{m+k})(W_C(D)+C), \quad t_{m+k} \le t < t,$$

所以

$$V(t) \le M(W_C(D)+C), \quad R \le t \le t.$$

如果 $t = t_{m+k}$, 则 $|x(t)| > E$, 而如果 $t_{m+k} < t < t_{m+k+1}$, 则 $|x(t)| = E$ 因此, $W_1(E) \le W_1(|x(t)|) \le V(t) \le M(W_C(D)+C) < W_1(E)$, 矛盾.

综上所述, 无论哪种情形我们都可以得出矛盾, 从而方程(1)的零解一致稳定. 证毕.

下面我们考虑一致渐近稳定性.

定理 2.2 设 $W_i \in K$ $(i=1,2,3)$, $V_1(t,x) \in v_0$, $V_2(t,<) \in v_0^*(\#)$, 假设如下条件成立:

(i) 对任意的 $C>0$, 存在正数 p 及 $W_C \in K$ 使得

$$W_1(|<(0)|) \le V(t,<) \le W_2(|<(0)|) + W_C(\|<\|_p) + C,$$

其中 $V(t,<) = V_1(t,<(0)) + V_2(t,<) \in v_0(\#)$, $\|<\|_p = \left(\int_{-\infty}^{0} |<(s)|^p \mathrm{d}s\right)^{1/p}$;

(ii) 对每个 $k \in \mathbf{Z}^+$ 和所有的 $x \in S(Q)$,

$$V_1(t_k, x+I(t_k,x)) \le (1+b_k)V_1(t_k^-, x),$$

其中 $b_k \ge 0$, 且 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty$;

(iii) 对任意的 $R \ge t_0$ 和 $U \in PC$,

$$V'(t, x_t) \le -W_3(|x(t)|),$$

其中 $x(t) = x(t, R, U)$ 是方程(1)的解.

那么方程(1)的零解一致渐近稳定.

证明 对任意给定的 $E>0$ $(E<Q)$, 令 $C = [1/(2M)]W_1(E)$, 这里 $M = \prod_{k=1}^{\infty}(1+b_k)$. 由假设(i), 存在正数 p 和 $W_C \in K$ 使得

$$W_1(|<(0)|) \le V(t,<) \le W_2(|<(0)|) + W_C(\|<\|_p) + C.$$

选取 $D>0$ 满足 $D<E$ 和 $W_2(D) + W_C(S^{(1/p)}D) < [1/(2M)]W_1(E)$. 类似定理 2.1 的证明, 我们可以证得方程(1)的零解一致稳定.

下面我们证明一致渐近稳定性. 由一致稳定性的证明知, 对 $E_1 > 0$ $(E_1 < \min\{1, Q\})$, 存在 $D>0$ 使得对任意的 $R \ge t_0$, $U \in PC(D)$, 我们有

$$|x(t,R,U)| \le E_1, \quad V(t) \le W_1(E_1), \quad t \ge R.$$

对任意的 $E>0$, 我们将证明存在 $T = T(E) > 0$ 使得当 $R \ge t_0$, $U \in PC(D)$ 时, 有

$$|x(t)| \le E, \quad t \ge R+T.$$

对上面的 E, 由一致稳定性知, 存在 $D_1 > 0$ 使得对任意的 $R \ge t_0$, $U \in PC(D_1)$, $|x(t,R,U)| \le E$. 我们选取 $D_2 > 0$ 使得 $W_2(D_2) < W_1(D_1)/M$, 并且选取 C 使得 $0 < C < W_1(D_1)/M - W_2(D_2)$. 则由假设(i), 存在正数 p 和 $W_C \in K$ 使得

$$W_1(|<(0)|) \le V(t,<) \le W_2(|<(0)|) + W_C(\|<\|_p) + C.$$

令 $K = W_1(D_1)/M - W_2(D_2) - C$, $N = (W_C^{-1}(K))^p$. 我们可把条件(iii)重写为如下形式:

$$V'(t) \le -W_3(|x(t)|) = -W_3((|x(t)|^p)^{1/p}) \le -W_4(|x(t)|^p),$$

且不失一般性假设 W_4 是下凸的. 事实上, 当 $0 \le u \le 1$ 时, 记

$$W_5(u) = \int_0^u W_4(s)\mathrm{d}s \le uW_4(u) \le W_4(u).$$

由引理 1.2, W_5是下凸的. 记 W_5 为 W_4 即可.

令 $I_i=[R+(i-1)S, R+iS]$, $(i=1, 2, \ , \ )$. 我们断言存在正整数 i, $3\le i\le 3N$, 使得 $|x(t)|< D_1(t\in I_i)$, 其中 $N=[W_1(E_1)/(cS)]+1$, $c=\min\{W_3(D_2), W_4(N/S)\}$, 这里 $[\#]$ 表示最大整函数.

假设对每个 $3\le i\le 3N$, 存在 $r_i\in I_i$ 使得 $|x(r_i)|\ge D_1$. 则 $V(r_i)\ge W_1(|x(r_i)|)\ge W_1(D_1)$. 我们考虑两种可能情形:

情形 对所有的 $t\in[r_i-S, r_i]$, $|x(t)|> D_2$, 由假设 (iii)

$$
\begin{aligned}
V(R+iS)-V(R+(i-3)S) &\le -\int_{R+(i-3)S}^{R+iS} W_3(|x(s)|)\,ds+\sum_{R+(i-3)S<t_k\le R+iS}[V(t_k)-V(t_k^-)] \le \\
&-\int_{r_i-S}^{r_i} W_3(|x(s)|)\,ds+\sum_{R+(i-3)S<t_k\le R+iS} b_kV(t_k^-) \le \\
&-SW_3(D_2)+\sum_{R+(i-3)S<t_k\le R+iS} b_kV(t_k^-).
\end{aligned}
$$

情形 存在 $s_i\in[r_i-S, r_i]$, 使得 $|x(s_i)|\le D_2$. 由假设 (iii)

$$
V(r_i)-V(s_i)\le -\int_{s_i}^{r_i} W_3(|x(s)|)\,ds+\sum_{s_i<t_k\le r_i}[V(t_k)-V(t_k^-)]\le \sum_{s_i<t_k\le r_i} b_kV(t_k^-).
$$

由引理 1.1和假设 (i), 我们有

$$
\begin{aligned}
W_1(D_1) &\le V(r_i)\le V(s_i)\prod_{s_i<t_k\le r_i}(1+b_k)\le \\
&M(W_2(|x(s_i)|)+WC(\|x_{s_i}\|_p)+C)\le \\
&M(W_2(D_2)+WC(\|x_{s_i}\|_p)+C),
\end{aligned}
$$

所以 $K=W_1(D_1)/M-W_2(D_1)-C\le WC(\|x_{s_i}\|_p)$, 从而 $N\le \int_{s_i-S}^{s_i}|x(s)|^p\,ds$ 于是

$$
\begin{aligned}
V(R+iS)-V(R+(i-3)S) &\le -\int_{R+(i-3)S}^{R+iS} W_4(|x(s)|^p)\,ds+\sum_{R+(i-3)S<t_k\le R+iS}[V(t_k)-V(t_k^-)]\le \\
&-\int_{s_i-S}^{s_i} W_4(|x(s)|^p)\,ds+\sum_{R+(i-3)S<t_k\le R+iS} b_kV(t_k^-)\le \\
&-SW_4\left(\frac{1}{S}\int_{s_i-S}^{s_i}|x(s|^p\,ds\right)+\sum_{R+(i-3)S<t_k\le R+iS} b_kV(t_k^-)\le \\
&-SW_4\left(\frac{N}{S}\right)+\sum_{R+(i-3)S<t_k\le R+iS} b_kV(t_k^-).
\end{aligned}
$$

由情形 Ñ 和情形 Ò 可知

$$
V(R+iS)-V(R+(i-3)S)\le -Sc+\sum_{R+(i-3)S<t_k\le R+iS} b_kV(t_k^-),
$$

所以

$$
V(R+3NS)-V(R)\le -NSc+\sum_{R<t_k\le R+3NS} b_kV(t_k^-),
$$

由引理 1.1我们得到

$$
V(R+3NS)\le (-NSc+V(R))\prod_{R<t_k\le R+3NS}(1+b_k)\le
$$

$$(-N\tau c + W_1(\rho_1))\eta < 0,$$

这是一个矛盾, 从而存在某个 $i(3\le i\le 3N)$ 使得当 $t\in I_i$ 时, $|x(t)|<\delta$. 所以 $\|x_{\sigma+i\tau+}\|<\delta$. 由一致稳定性, 当 $t\ge\sigma+i\tau$, $|x(t)|\le\varepsilon$. 现在, 令 $T=3N\tau$, 则 T 不依赖于 σ 和 φ, 且当 $t\ge\sigma+T$, $|x(t)|\le\varepsilon$. 证毕.

3 应　用

例 3.1 考虑脉冲泛函微分方程

$$\begin{cases} x'(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\left[-a_i(t)(x(t))^{1/(2i+1)}+b_i(t)(x(t-\tau))^{1/(2i+1)}\right], \\ \qquad\qquad t\ge 0,\ t\ne t_k, \\ x(t_k)=I_k(x(t_k^-)), \qquad k\in Z^+, \end{cases} \tag{4}$$

其中 $|x|<1$, $a_i, b_i:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$, $(i=0,1,2,\cdots)$ 连续, 对某个 $T>0$ 当 $t\in[0,T]$ 时, $|b_i(t)|\le B_i$, $B=\sum_{i=0}^{\infty}B_i<\infty$; $0\le a_i(t)\le A_i(T)$, $\sum_{i=0}^{\infty}A_i(T)<\infty$. 且 $\tau>0$, $|I_k(x)|\le(1+b_k)|x|$, $x\in\mathbf{R}$, $b_k\ge 0$, $\sum_{k=1}^{\infty}b_k<\infty$. 如果 $a_i(t)-b_i(t+\tau)\ge 0(i=0,1,2,\cdots)$, 则方程(4)的零解一致稳定. 此外, 如果存在 $\gamma>0$ 和 $k\ge 1$ 使得 $a_k(t)-|b_k(t+\tau)|\ge\gamma$, 则方程(4)的零解一致渐近稳定.

事实上, 定义 $V_1\in v_0$, $V_2\in v_0^*(\cdot)$ 如下:

$$V_1(t,\varphi(0))=|\varphi(0)|,$$

$$V_2(t,\varphi)=\sum_{i=0}^{\infty}\int_{-\tau}^{0}|b_i(t+s+\tau)||\varphi(s)|^{1/(2i+1)}\,\mathrm{d}s.$$

则

$$V_1(t_k,I_k(x))=|I_k(x)|\le(1+b_k)|x|=(1+b_k)V_1(t_k^-,x).$$

对于方程(4)的解 $x(t)=x(t,\sigma,\varphi)$, 因为当 $|x|<1$ 和 $0\le t\le T$ 时, 方程(4)中的序列关于 (t,x) 一致收敛, 所以对每个 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N 使得

$$\sum_{i=N+1}^{\infty}\int_{t-\tau}^{t}|b_i(s+\tau)||x(s)|^{1/(2i+1)}\,\mathrm{d}s\le\tau\sum_{i=N+1}^{\infty}B_i<\varepsilon.$$

因此, 当 $a_i(t)-b_i(t+\tau)\ge 0(i=0,1,2,\cdots)$ 时

$$\begin{aligned} |x(t)|\le V(t,x_t)\le{} & \\ & |x(t)|+\sum_{i=0}^{N}\int_{t-\tau}^{t}|b_i(s+\tau)||x(s)|^{1/(2i+1)}\,\mathrm{d}s+\varepsilon\le \\ & |x(t)|+B\int_{t-\tau}^{t}|x(s)|^{1/(2N+1)}\,\mathrm{d}s+\varepsilon= \\ & |x(t)|+\tau B\|x_t\|^{1/(2N+1)}+\varepsilon \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} V'(t,x_t)\le{} & \sum_{i=0}^{\infty}\left[-a_i(t)|x(t)|^{1/(2i+1)}+|b_i(t)||x(t-\tau)|^{1/(2i+1)}+\right. \\ & \left.|b_i(t+\tau)||x(t)|^{1/(2i+1)}-|b_i(t)||x(t-\tau)|^{1/(2i+1)}\right]\le 0. \end{aligned}$$

由定理 2.1, 方程(4)的零解一致稳定.

此外, 如果存在 $\gamma>0$ 和 $k\ge 1$ 使得 $a_k(t)-|b_k(t+\tau)|\ge\gamma$, 则

$$
\begin{aligned}
&|x(t)| \le V(t, x_t) \le \\
&|x(t)| + \sum_{i=0}^{N} \int_{t-\tau}^{t} |b_i(s+\tau)|\,|x(s)|^{1/(2i+1)} \mathrm{d}s + C \le \\
&\quad |x(t)| + B \int_{t-\tau}^{t} |x(s)|^{1/(2N+1)} \mathrm{d}s + C = \\
&\quad |x(t)| + B(\| x_t \|_{1/(2N+1)})^{1/(2N+1)} + C
\end{aligned}
$$

且

$$
\begin{aligned}
&V'(t, x_t) \le \sum_{i=0}^{N} [-a_i(t)\,|x(t)|^{1/(2i+1)} + |b_i(t)|\,|x(t-\tau)|^{1/(2i+1)} + \\
&\quad |b_i(t+\tau)|\,|x(t)|^{1/(2i+1)} - |b_i(t)|\,|x(t-\tau)|^{1/(2i+1)}] \le \\
&\quad -(a_k(t) - |b_k(t+\tau)|)\,|x(t)|^{1/(2k+1)} \le \\
&\quad -G\,|x(t)|^{1/(2k+1)}.
\end{aligned}
$$

由定理 2.2,方程(4)的零解一致渐进稳定.

致谢 作者非常感谢审阅人对改进本文提出的宝贵建议.

[参 考 文 献]

[1] Lakshmikantham V, Bainov D D, Simeonov P S. Theory of Impulsive Differential Equations [M]. Singapore: World Scientific, Sin, 1989.

[2] Bainov D D, Simenov P S. Systems With Impulse Effect: Stability Theory and Applications [M]. Chichester: Ellis Horwood, 1989.

[3] Samoilenko A M, Perestyuk N A. Impulsive Differential Equations[M]. Singapore: World Scientific, 1995.

[4] Shen J, Yan J. Razumikhin type stability theorems for impulsive functional differential equations[J]. Nonlinear Anal, 1998, **33**(5): 519-531.

[5] Liu X, Shen J. Razumikhin type theorems on boundedness for impulsive functional differential equations[J]. Dynamic Systems and Appl, 2000, **9**(3): 265-281.

[6] Zhang Y, Sun J. Stability of impulsive functional differential equations[J]. Nonlinear Analysis, 2008, **68**(12): 3665-3678.

[7] Luo Z, Shen J. New Razumikhin type theorems for impulsive functional differential equations [J]. Appl Math Comput, 2002, **125**(2/3): 375-386.

[8] Liu X, Ballinger G. Uniformly asymptotic stability of impulsive delay differential equations[J]. Computers Math Applic, 2001, **41**(7/8): 903-915.

[9] Luo Z, Shen J. Impulsive stabilization of functional differential equations with infinite delays [J]. Appl Math Letters, 2003, **16**(5): 695-701.

[10] Luo Z, Shen J. Stability of impulsive functional differential equations via Liapunov functional [J]. Appl Math Lett, 2009, **22**(2): 163-169.

[11] Shen J, Luo Z, Liu X. Impulsive stabilization of functional differential equations via Liapunov functionals[J], J Math Anal Appl, 1999, **240**(1/5): 1-15.

[12] Luo Z, Shen J. Stability and boundedness for impulsive functional differential equations with infinite delays[J]. Nonlinear Analysis, 2001, **46**(4): 475-493.

[13] Stamova I M, Stamov G T. Lyapunov-Razumikhin method for impulsive functional differential equations and applications to the population dynamics[J]. J Comput Appl Math, 2001, **130**

1/2): 163-171.

[14] Ballinger G, Liu X. Existence and uniqueness results for impulsive delay differential equations [J]. Dynamic Continuous Discrete Impulse Systems, 1999, **5**(1/4): 579-591.

[15] Becker L C, Burton T A, Zhang S. Functional differential equations and Jensencs inequality [J]. J Math Anal Appl, 1989, **138**(1): 137-156

[16] Becker L C, Burton T A. Jensencs inequality and Liapunovcs direct method[J]. Cubo A Mathematical J, 2004, **6**(3): 65-87.

[17] Natansoa I P. Theory of Functions of a Real Variable[M]. Vol , New York: Ungar, 1960

Asymptotic Stability for Impulsive Functional Differential Equations

LUO Zhi-guo, LUO Yan

(Department of Mathematics, Hunan Normal University,

Changsha 410081, P. R. China)

Abstract: The stability for a class of impulsive functional differential equation was investigated. By improving the upper bound of Liapunov functional and based on the application of the Liapunov second method together with Liapunov functional and Jensencs the inequality, a uniformly stability theorem and a uniformly asymptotically stability theorems are obtained. Examples are also given to demonstrate the advantage of our results.

Key words: stability; impulsive functional differential equation; Liapunov functional; Jensencs inequality