

基于区间三次 Hermite 样条小波的 Poisson 方程数值求解方法*

向家伟^{1,2}, 陈雪峰², 李锡夔³

(1. 桂林电子科技大学 机电工程学院, 广西 桂林 541004)

2. 西安交通大学 机械制造系统工程国家重点实验室, 西安 710049

3. 大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116024)

(陈立群推荐)

摘要: 提出一种新的求解 Poisson 方程的小波有限元方法, 采用区间三次 Hermite 样条小波基作为多尺度有限元插值基函数, 并详细讨论了小波有限元提升框架. 由于小波基按照给定的内积正交, 可实现相应的多尺度嵌套逼近小波有限元求解方程, 在不同尺度上的插值基之间完全解耦和部分解耦. 数值算例表明在求解 Poisson 方程时, 该方法具有高的效率和精度.

关键词: Poisson 方程; 三次 Hermite 样条小波; 提升框架; 小波有限元方法

中图分类号: O351.2 **文献标识码:** A

DOI 10.3879/j.issn.1000-0887.2009.10.012

引 言

近年来, 诸多物理问题的积分和微分方程采用小波进行数值求解. 小波数值方法突出的优点在于多分辨特性, 可以获得用于结构分析的多种基函数^[1-3], 针对求解问题的精度要求, 采用不同的基函数. 而小波数值方法吸引了众多的研究者^[4-11]. 譬如: 周又和等提出了一种基于小波 Galerkin 的梁板结构分析方法^[4]; Chen 等提出了一种基于 Daubechies 小波的动态多尺度小波有限元提升框架^[5]; 文献 [6-8] 运用区间 B 样条小波构造了一系列一维和二维小波单元簇, 数值算例验证了小波有限元的数值逼近能力; 梅树立等提出了一种用于偏微分方程求解的区间小波自适应精细积分法^[9]; 为克服二维张量积小波存在过多内部小波基的缺陷, 金坚明等构造了具有紧支撑的非张量积二维样条小波基并应用于二维小波有限元分析^[10]; 贺英和韩波进一步拓展 Daubechies 小波差分方法至流体饱和和多孔隙介质波动方程求解^[11]. Basu 等在比较了工程数值计算不同方法的基础上, 认为计算机时代广为使用的有限元法, 边界元法和无网格法已经取代了有限差分法和 Ritz 型方法, 在不久的将来, 这些方法有可能被小波方法取代^[12].

采用小波基求解偏微分方程过程中, 大量的研究尝试运用小波基的多分辨分析和相应地嵌套逼近特性生成自适应数值求解方法. 然而, 对于如何获得小波数值求解偏微分方程的有效

* 收稿日期: 2009-05-05; 修订日期: 2009-08-23

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (5080502 & 50875195); 工业装备结构分析国家重点实验室开放课题基金资助项目 (GZ0815)

作者简介: 向家伟 (1974—), 男, 湖南辰溪人, 副教授, 博士 (联系人, E-mail: wxw8627@163.com).

算法研究较少,其原因在于小波基的嵌套逼近,必将导致由提升框架推导出的不同尺度下的尺度函数和小波函数形成的多尺度有限元求解方程相互耦合.

本文利用区间三次 Hermite 样条小波^[13]作为插值基函数,研究一种用于求解 Poisson 方程的小波有限元方法.由于该小波基具有按照给定的内积正交的良好性能,可实现由不同尺度下的尺度函数和小波函数形成的多尺度小波有限元求解方程完全解耦.数值算例验证了方法的有效性.

1 区间上三次 Hermite 样条小波基

经典小波函数是定义在整个实数轴 \mathbf{R} 上或一个周期函数的平方可积实数空间 $L^2(\mathbf{R})$ 上的完备基,在求解边值问题时,在边界上会出现数值振荡^[14].而区间小波可克服这一问题.本文采用区间三次 Hermite 样条小波基作为插值基函数实现对 Poisson 方程的高性能计算.

$L^2(\mathbf{R})$ 表示 \mathbf{R} 上的线性平方可积实数空间.定义 $L^2(\mathbf{R})$ 中的内积:

$$\langle u, v \rangle := \int_{\mathbf{R}} u(x)v(x) dx, \quad u, v \in L^2(\mathbf{R}).$$

如果 $\langle u, v \rangle = 0$ 则 u 和 v 正交. $L^2(\mathbf{R})$ 中的函数 f 的范数为 $\|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f \rangle}$.

设 ϕ_1 和 ϕ_2 为支撑在区间 $[0, 1]$ 上的三次 Hermite 样条,即

$$\phi_1(x) := \begin{cases} (x+1)^2(1-2x), & x \in [-1, 0], \\ (x-1)^2(1+2x), & x \in [0, 1], \\ 0, & x \notin [-1, 1], \end{cases} \quad (1)$$

$$\phi_2(x) := \begin{cases} (x+1)^2x, & x \in [-1, 0], \\ (x-1)^2x, & x \in [0, 1], \\ 0, & x \notin [-1, 1], \end{cases}$$

ϕ_1 和 ϕ_2 如图 1 所示,很显然, ϕ_1 和 ϕ_2 属于 $C^1(\mathbf{R})$.

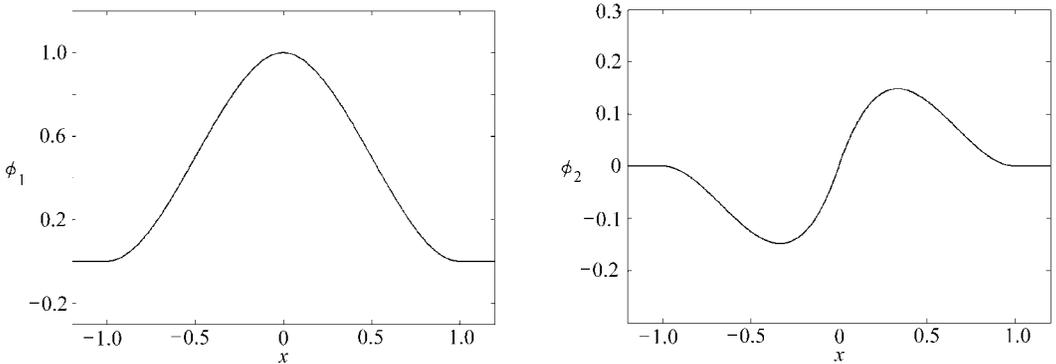


图 1 \mathbf{R} 上三次 Hermite 样条

支撑在区间 $[-1, 1]$ 上由 ϕ_1 和 ϕ_2 生成的相应小波 ψ_1 和 ψ_2 为^[13]

$$\begin{cases} \psi_1(x) = -2\phi_1(2x+1) + 4\phi_1(2x) - 2\phi_1(2x-1) - 21\phi_2(2x+1) + 21\phi_2(2x-1), \\ \psi_2(x) = \phi_1(2x+1) - \phi_1(2x-1) + 9\phi_1(2x+1) + 12\phi_2(2x) + 9\phi_2(2x-1). \end{cases} \quad (3)$$

这样定义的尺度函数和小波满足如下条件:

$$\langle \psi_1, \psi_m(\cdot - j) \rangle = \langle \psi_2, \psi_m(\cdot - j) \rangle = 0 \quad m = 1, 2; \forall j \in \mathbf{Z}.$$

小波函数的平移生成小波空间 W .小波函数 ψ_1 和 ψ_2 如图 2 所示, ψ_1 为对称函数而 ψ_2 为

反对称函数.

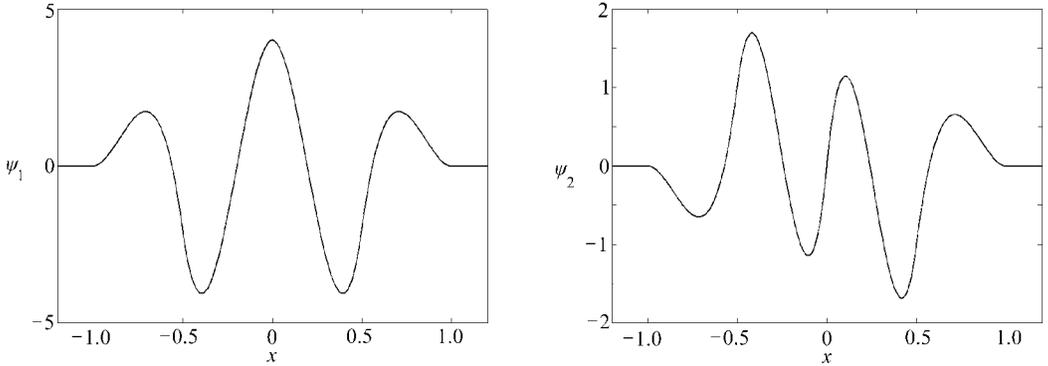


图 2 小波 ϕ_1 和 ϕ_2

由上述小波函数可进一步生成 $H_0^1(0, 1)$ 空间中的小波. $H_0^1(0, 1)$ 中的小波分解关系:

$$H_0^1(0, 1) = V_1 + W_1 + W_2 + \dots, \tag{4}$$

式 (4) 中 V_1 为尺度空间, 而 $W_n (n = 1, 2, \dots)$ 为不同尺度下的小波函数.

尺度空间 V_1 中的尺度函数 $\phi_{1,k}$ 为

$$\begin{cases} \phi_{1,1}(x) := \sqrt{\frac{5}{24}} \phi_1(2x-1), & \phi_{1,2}(x) := \sqrt{\frac{15}{4}} \phi_2(2x), \\ \phi_{1,3}(x) := \sqrt{\frac{15}{8}} \phi_2(2x-1), & \phi_{1,4}(x) := \sqrt{\frac{15}{4}} \phi_2(2x-2). \end{cases} \tag{5}$$

小波空间 $W_n (n = 1, 2, \dots)$ 中的小波函数 $\phi_{n,k}$ 为

$$\begin{cases} \phi_{n,k}(x) := \frac{2^{-n/2}}{\sqrt{729/6}} \phi_1(2^n x - \frac{j}{2}), & j = 2, 4, \dots, 2^{n+1} - 2 \\ \phi_{n,k}(x) := \frac{2^{-n/2}}{\sqrt{153/6}} \phi_2(2^n x - \frac{j-1}{2}), & j = 1, 3, \dots, 2^{n+1} - 1 \\ \phi_{n,1}(x) := \frac{2^{-n/2}}{\sqrt{76/8}} \phi_2(2^n x), & \phi_{n,2^{n+1}}(x) := \frac{2^{-n/2}}{\sqrt{76/8}} \phi_2(2^n x - 2^n). \end{cases} \tag{6}$$

区间 $[0, 1]$ 上的所有尺度函数 $\phi_{1,k}$ 和小波函数 $\phi_{1,k}$ 如图 3 所示. 假定 $u \in V_1$ 并且 $v_n \in W_n (n = 1, 2, \dots)$, 如此构造的小波基函数具有良好的性能, 实现不同尺度下的小波基之间按照内积 $\langle u, v_n \rangle$ 和 $\langle v_m, v_n \rangle$ 正交, 即 $\langle u, v_n \rangle = 0$, 并且 $\langle v_m, v_n \rangle = 0 (m \neq n)$.

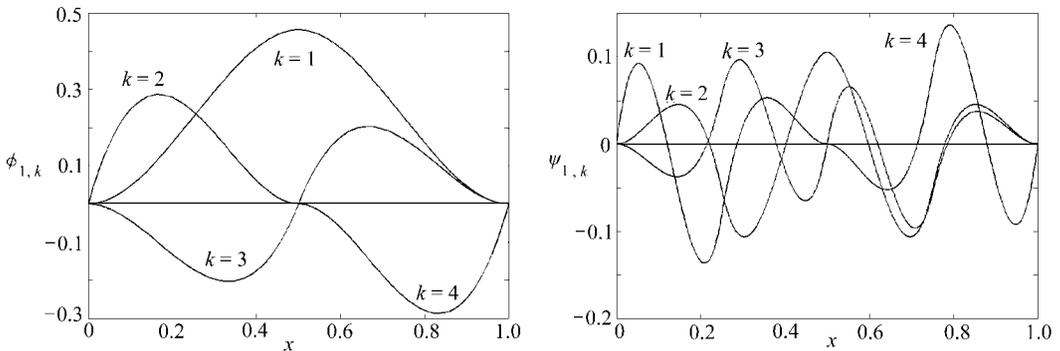


图 3 尺度空间 V_1 上的尺度函数和小波空间 W_1 上的小波函数

2 Poisson 方程多尺度小波有限元方法

对于工程广泛存在的奇异性和大梯度问题, 如果仅仅采用尺度空间 V_1 中的尺度函数作为插值基函数, 不能达到要求的精度. 小波有限元具有固有的阶谱特性, 特别适合进行多尺度求解, 可克服传统单尺度单元在求解奇异性或大梯度问题时求解精度和求解效率的矛盾^[1-3].

2.1 一维 Poisson 方程

考虑具有 Dirichlet 边界条件的一维 Poisson 方程, 即

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{在 } (0, 1) \text{ 中,} \\ u = 0 & \text{在 } \partial\Omega \text{ 中,} \end{cases} \quad (7)$$

式 (7) 中 f 为右端项, $\Delta = d^2/dx^2$ 表示 Laplace 算子.

设 Ω 为具有边界 $\partial\Omega$ 的一维求解域, 从 Ω 的初始网格划分 Γ_1 出发, 嵌套地均分每一个 Γ_{l-1} 得到相应的 Γ_l . 对于每一网格划分, 采用尺度空间 V_l 中的小波基作为有限元插值基.

利用区间三次 Hermite 样条小波的多分辨分析特性, 得到尺度空间的直和分解关系, 即

$$V_l = V_1 + W_1 + W_2 + \dots + W_{l-1}. \quad (8)$$

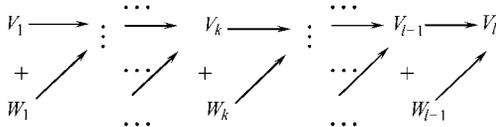


图 4 小波有限元提升框架

需要指出的是: 小波空间自身可形成一个完备的空间, 未知场函数采用小波空间中的小波基展开. 然而, 为保证展开时只包含有限小波项, 尺度空间分解时必须包含初始尺度空间 V_1 . 图 4 给出由区间三次 Hermite 小波直和分解关系得到的尺度空间提升关系.

在 V_l 空间中, 未知场函数 u 可表示为

$$u = \Phi_1 a_1 + \sum_{s=1}^{l-1} \phi_s d_s = \Phi_l a_l, \quad (9)$$

式 (9) 中, $a_1 = \{a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, a_{1,4}\}^T$ 表示尺度空间 V_1 中的待求尺度函数插值系数列向量, $\Phi_1 = \{\phi_{1,1}, \phi_{1,2}, \phi_{1,3}, \phi_{1,4}\}$ 表示 V_1 空间中的尺度函数行向量. $d_s = \{d_{s,1}, d_{s,2}, \dots, d_{s,2^{s+1}}\}^T$ ($s = 1, 2, \dots, l-1$) 表示添加不同尺度下的小波项后待求的小波函数插值系数列向量, $\psi_s = \{\psi_{s,1}, \psi_{s,2}, \dots, \psi_{s,2^{s+1}}\}$ 表示 W_s 空间中的小波函数行向量. Φ_s, a_s 为

$$\begin{cases} \Phi_l = \{\Phi_1, \Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_{l-1}\}, \\ a_l = \{(a_1)^T, (d_1)^T, (d_2)^T, \dots, (d_{l-1})^T\}^T. \end{cases} \quad (10)$$

由 Galerkin 变分原理, 可得到 V_l 空间中多尺度小波有限元刚度矩阵:

$$K^l = \begin{bmatrix} K_{\Phi_1, \Phi_1} & K_{\Phi_1, \Psi_1} & \dots & K_{\Phi_1, \Psi_{l-1}} \\ & K_{\Psi_1, \Psi_1} & \dots & K_{\Psi_1, \Psi_{l-1}} \\ \text{对称} & & \ddots & \vdots \\ & & & K_{\Psi_{l-1}, \Psi_{l-1}} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

式 (11) 中, 刚度矩阵 K^l 的子矩阵可以采用下式计算:

$$K_{x,y} = \int_0^1 \left(\frac{dx}{dx} \right) \left(\frac{dy}{dx} \right) dx \quad (x, y = \Phi_1, \Psi_1, \dots, \Psi_{l-1}), \quad (12)$$

右端项为

$$P^l = \int_0^1 \Phi_l^T f dx. \quad (13)$$

由于区间三次 Hermite 样条小波的良好性能, 即小波基关于内积 $\langle u', v' \rangle$ 正交而不是通常正交小波基关于内积 $\langle u, v \rangle$ 正交. 换言之, 对于任意的 n , $\langle u', v_n' \rangle = 0$ 对于任意的 $m \neq n$, $\langle u_m', v_n' \rangle = 0$. 当小波尺度从 1 提升到 l 时, 式 (11) 中仅仅只需要计算对角线上的子块 $K_{x, y} (x = y = \Phi_l, \Psi_l, \dots, \Psi_{l-1}, \Psi_{l-1})$, 其它子块均为 0. 与其它文献中小波有限元方法^[4-8]比较表明, 由于该小波基不同尺度的尺度函数和小波函数之间, 小波函数与小波函数之间可实现完全解耦, 在不断提升尺度, 添加小波基的过程中, 只需要计算少量的刚度矩阵元素, 可大为提高计算效率. 因此, V_l 空间中的多尺度小波有限元刚度矩阵为

$$K^l = \begin{bmatrix} K_{\Phi_l, \Phi_l} & & & & \\ & K_{\Psi_l, \Psi_l} & & & \\ \text{对称} & & \ddots & & \\ & & & & K_{\Psi_{l-1}, \Psi_{l-1}} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

2.2 二维 Poisson 方程

考虑具有 Dirichlet 边界条件的二维 Poisson 方程, 即

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{在 } \Omega \text{ 中,} \\ u = 0 & \text{在 } \partial\Omega \text{ 中,} \end{cases} \quad (15)$$

式 (15) 中, Ω 表示求解域, $\partial\Omega$ 表示边界. $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ 表示 Laplace 算子, f 表示右端项.

在有限元空间中引入双线性泛函和线性泛函, 即

$$B(u, v) = \iint \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy, \quad u, v \in L^2(R^2), \quad (16)$$

$$f(v) = \iint f v dx dy, \quad (17)$$

式 (16) 和式 (17) 中, v 为检验函数, u 为有限元空间逼近解.

由 Galerkin 或 Ritz 变分原理, 二维 Poisson 方程式 (15) 对应的弱解为

$$B(u, v) = f(v). \quad (18)$$

采用尺度 j 下二维尺度函数 $\Theta_j = \Phi_j \leftarrow \Phi_j$ (二维张量积小波有限元具体参见文献 [5, 7-8]) 的逼近解 u 和检验函数为

$$\begin{cases} u = \Theta_j \mathbf{u}_j, \\ v = \Theta_j \mathbf{v}_j, \end{cases} \quad \mathbf{u}_j, \mathbf{v}_j \in V_h, \quad (19)$$

式 (19) 中 V_h 表示有限元空间.

将式 (19) 代入式 (18), 有

$$B(\Theta_j \mathbf{u}_j, \Theta_j \mathbf{v}_j) = f(\Theta_j \mathbf{v}_j) \Rightarrow \left\{ B(\Theta_j \mathbf{u}_j, \Theta_j) - f(\Theta_j) \right\} \mathbf{v}_j = 0 \Rightarrow B(\Theta_j \mathbf{u}_j, \Theta_j) = f(\Theta_j). \quad (20)$$

将式 (16) 和式 (17) 代入式 (20), 有

$$K^j \mathbf{u}_j = \mathbf{f}^j, \quad (21)$$

式 (21) 中刚度矩阵为

$$K^j = [\Gamma_{1j}^{1,1} \leftarrow \Gamma_{2j}^{0,0} + \Gamma_{1j}^{0,0} \leftarrow \Gamma_{2j}^{1,1}]. \quad (22)$$

尺度 j 下的尺度函数积分项为

$$\Gamma_{1j}^{1,1} = \int \frac{d\Phi_j^T}{d\xi} \frac{d\Phi_j}{d\xi} d\xi \quad (23)$$

$$\Gamma_{1j}^{0,0} = \int \Phi_j^T \Phi_j d\xi \quad (24)$$

$$\Gamma_{2j}^{1,1} = \int_{\Omega} \frac{d\Phi_j^T}{d\eta} \frac{d\Phi_j}{d\eta} d\eta \tag{25}$$

$$\Gamma_{2j}^{0,0} = \int_{\Omega} \Phi_j^T \Phi_j d\eta \tag{26}$$

右端项为

$$f^j = \int_{\Omega} \int_{\Omega} f(\xi, \eta) \Theta_j^T d\xi d\eta \tag{27}$$

提升过程与一维小波有限元类似, 多尺度单元刚度矩阵不能实现完全解耦, 但是可以保证足够的稀疏性和高效率, 详细过程略.

3 数值算例

算例 1 考虑具有变右端项 $f(x) = [200 - 40\,000(x - 0.5)^2] e^{-100(x-0.5)^2}$ 和 Dirichlet 边界条件的 Poisson 方程. 精确解为: $u(x) = e^{-100(x-0.5)^2}$.

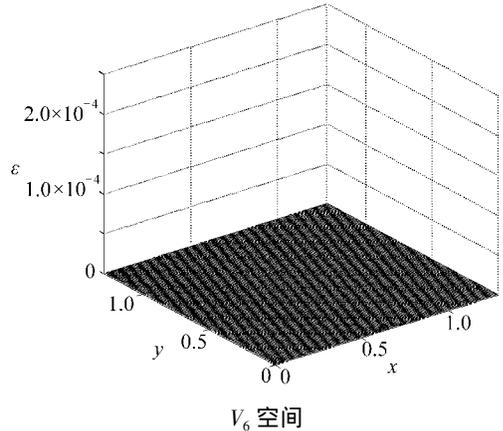
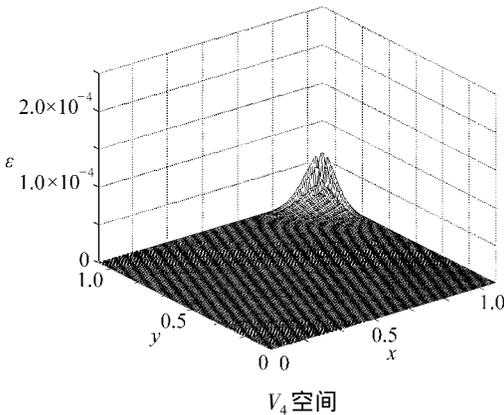
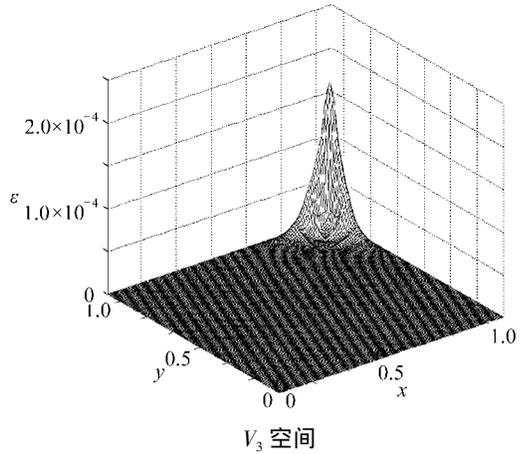
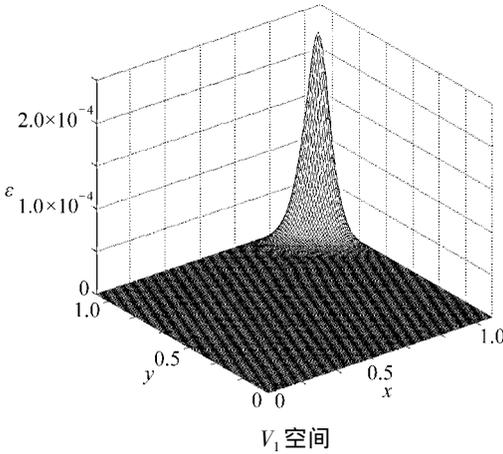


图 5 尺度 1~5 上的逼近误差

该问题在 $L/2$ 附近的解具有一定的奇异性^[15]. 本文采用提升方案生成的 $V_l (l = 5)$ 空间小波基进行多尺度求解. 当通过提升方案在高梯度区域不断添加小波空间中的小波基嵌套求解时, 有限元解越来越接近真解. 表 1 给出了嵌套求解误差 $\epsilon_n = \max\{|u - u_{\Lambda_n}|\}$, 由于多尺度刚度矩阵 K^1 良好性能, 多尺度有限元求解过程收敛较快. 该算例验证了一维多尺度区间三次 Hermite 样条小波可用于方便地运用于高梯度问题自适应有限元分析. 由式 (13), 仅需计算对角线上的子矩

阵,使得本文方法相对于区间 B 样条小波有限元方法^[6],计算效率进一步提高.

表 1 误差 ϵ_n

n	1	2	3	4	5
ϵ_n	0.7426	0.3015	0.1241	0.0412	0.0092

算例 2 假定式 (15)的右端项为

$$f = -25x^{23}y^{23}[(26x - 24)y^2(y - 1) + x^2(x - 1)(26y - 24)],$$

求解域和边界条件为

$$\Omega = \{ (x, y) \in R^2 \mid x, y \in [0, 1] \}, u|_{\partial\Omega} = 0$$

和

$$\partial\Omega = \{ (x, y) \in R^2 \mid (x = 0, y \in [0, 1]) \cup (x \in [0, 1], y = 0) \}.$$

该问题的理论解为^[16]: $u = x^{24}y^{24}(x - 1)(y - 1)$. 解在角点 (1, 1)附近解梯度变化大,采用多尺度二维张量积小波有限元法从初始 V_1 空间提升至 V_6 空间求解该算例,图 5 表示相应的有限元解误差 $\epsilon = u - u_h$ (u 为理论解, u_h 为有限元解). 首先,采用初始尺度空间 V_1 中的尺度函数求解,然后采用提升框架逐步增加小波空间 W_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$)中的小波基嵌套求解.从图 5 中可以看出,逼近误差 ϵ 越来越小,尤其是在解具有一定奇异性的地方,逼近误差以较快的速度减少.

4 结 论

由于区间三次 Hermite 样条小波良好的性能,比如:多分辨分析和按照内积 $\langle u, v \rangle$ 正交,以该小波基为插值基构造的小波有限元提升框架可以高效方便地实现.当具体问题的局部分析精度达不到要求时,不断在局部添加高尺度的小波函数以提高分析尺度,从而改善计算精度.同时,多尺度小波有限元方程对于一维 Poisson 方程保持分块对角矩阵,而对于二维 Poisson 方程保持极大的稀疏性.因此,该方法是解决具有高梯度特征的 Poisson 方程的有力工具,进一步研究在于将该方法拓展至工程中其它偏微分方程求解,以验证该方法对其他类型方程的适应性.

[参 考 文 献]

- [1] Canuto C, Tabacco A, Urban K. The wavelet element method part I: construction and analysis [J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 1999, 6(1): 1-52
- [2] Canuto C, Tabacco A, Urban K. The wavelet element method part II: realization and additional feature in 2D and 3D [J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2000, 8(2): 123-165
- [3] Cohen A. Numerical Analysis of Wavelet Method [M]. Elsevier Amsterdam, 2003, 20-29
- [4] 周又和, 王记增, 郑晓静. 小波伽辽金有限元法在梁板结构中的应用 [J]. 应用数学和力学, 1998, 19(8): 697-706
- [5] Chen X F, He Z J, Xiang J W, Li B. A dynamic multiscale lifting computation method using Daubechies wavelet [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2006, 188(2): 228-245
- [6] Xiang J W, Chen X F, He Z J, et al. The construction of 1D wavelet finite elements for structural analysis [J]. Computational Mechanics, 2007, 40(2): 325-339
- [7] Xiang J W, Chen X F, He Z J, et al. A new wavelet-based thin plate element using B-spline wavelet on the interval [J]. Computational Mechanics, 2008, 41(2): 243-255
- [8] Xiang J W, Chen X F, Yang L F, et al. A class of wavelet-based flat shell elements using B-spline wavelet on the interval and its applications [J]. CMES-Computer Modeling in En-

- Engineering and Sciences, 2008, **23**(1): 1-12
- [9] 梅树立, 陆启韶, 金俐, 等. 偏微分方程的区间小波自适应精细积分法 [J]. 应用数学和力学, 2005, **26**(3): 364-371.
- [10] 金坚明, 薛鹏翔, 徐应祥, 等. 具有紧支撑的非张量积形式二维小波有限元 [J]. 应用数学和力学, 2006, **27**(12): 1673-1686
- [11] 贺英, 韩波. 流体饱和多孔介质波动方程小波有限差分法 [J]. 应用数学和力学, 2008, **29**(11): 1495-1504
- [12] Basu P K, Jorge A B, Badri S, et al. Higher-order modeling of continua by finite-element boundary-element, Meshless and wavelet methods [J]. Computers and Mathematics With Applications, 2003, **46**(1): 15-33
- [13] Jia R Q, Liu S T. Wavelet bases of Hermite cubic splines on the interval [J]. Advances in Computational Mathematics, 2006, **25**(1/3): 23-39
- [14] Quak E, Weyrich N. Decomposition and reconstruction algorithms for spline wavelets on a bounded interval [J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 1994, **1**(2): 217-231.
- [15] Dahmen W, Kurdila A, Oswald P. Multiscale Wavelet for Partial Differential Equations [M]. San Diego Academic Press, 1997, 23-27.
- [16] Pavel K, Anath F, Pinhas Z, et al. Mechanically based models adaptive refinement for B-spline finite element [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2003, **57**(8): 1145-1175.

Numerical Solution of Poisson Equation by Using Wavelet Bases of Hermite Cubic Splines on the Interval

XIANG Jia-wei^{1,2}, CHEN Xue-feng², LI Xi-ku³

(1 School of Mechatronic Engineering, Guilin University of Electronic Technology
Guilin, Guangxi 541004, P. R. China;

2 State Key Laboratory for Manufacturing Systems Engineering, Xi'an Jiaotong
University, Xi'an 710049, P. R. China

3 State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment,
Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, P. R. China)

Abstract A new wavelet-based finite element method was proposed for solving Poisson equation. The wavelet bases of Hermite cubic splines on the interval were employed as the multi-scale interpolating basis for finite element analysis. The lifting scheme of wavelet-based finite element method was discussed in details. For the orthogonal characteristic of the wavelet bases with respect to the given inner product, the corresponding multi-scale finite element equation will be decoupled across scales totally or partially and be suited for nesting approximation. Some numerical examples indicate that the proposed method has higher efficiency and precision in solving Poisson equation.

Key words Poisson equation; Hermite cubic splines wavelet; lifting scheme; wavelet finite element method