文章编号: 1000-0887(2009) 11-1261-07

应用数学和力学编委会, ISSN 1000-0887

约束诱导的限制和扩张算子及其应用*

陈 波, 李孝伟, 刘高联

(上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

(我刊原编委 刘高联 来稿)

摘要: Stokes方程是由动量方程和不可压缩约束耦合而成的方程组, Stokes算子是由 Stokes方程诱导所得到的微分-积分算子. 该文试从 Helmholtz最小耗散原理的角度, 采用对零散度矢量场进行 Hodge正交分解的方法, 对 Stokes算子的性质进行分析. 结果指出 Stokes算子是 Helmholtz耗散泛函的 Fr chet导算子, 零散度约束通过 Hodge正交分解诱导出一对有界线性算子, 即限制算子 $\mathscr{R}$和扩张算子 . 作为结果的应用, 利用它计算 Stokes算子的特征值.

关 键 词: Stokes算子; 诱导算子; Hodge分解; 变分方法; 特征值问题
中图分类号: O357. 1 文献标识码: A
DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2009.11.001

引 言

流体力学中刻画的 Reynolds数流动的经典数学模型是下面的 Stokes方程:

$$-\quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} - Dp, \qquad \text{在} \quad \text{中}, \tag{1}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0, \qquad \text{在} \quad \text{中}, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{u} = 0, \qquad \text{在} \quad \text{上}, \tag{3}$$

这里 是$R^n (n = 2, 3)$中的有界开集. 根据 Stokes方程$H_0^1(\ )$弱解的存在性和唯一性, 由这个方程可以定义一个一对一的映射 $\boldsymbol{f}$ $\boldsymbol{u}$, 这个映射的逆映射, 诱导出一个线性算子, 文献[1]称之为 Stokes算子, 文献[2-3]称它为算子 $\mathscr{A}$. 为了方便起见, 我们沿用文献[1]的称法, 并跟随文献[2]标记它为

$$\mathscr{A} \quad D(\mathscr{A}) \qquad H, \tag{4}$$

这里

$$D(\mathscr{A}) := H^2(\ ) \qquad V, \tag{5}$$

$$H := \left\{ \boldsymbol{u} \quad L^2(\ ) \mid \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0, \quad (\boldsymbol{u}) = 0 \right\} \tag{6}$$

和

$$V := \left\{ \boldsymbol{u} \quad H_0^1(\ ) \mid \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0, \text{在} \quad \text{中} \right\} \tag{7}$$

以及

* 收稿日期: 2009-04-29; 修订日期: 2009-09-25
基金项目: 上海市重点学科建设资助项目(Y0103); 国家自然科学基金资助项目(10772103)
作者简介: 陈波(1969), 男, 江苏人, 讲师, 博士生(联系人. E-mail: bochen@shu.edu.cn).

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{u} := \sum_{i=1}^{n} \frac{\boldsymbol{u}_i}{x_i} \tag{8}$$

定义在分布的意义上, 算子 $:H^1(\quad) \quad L^2(\quad)$ 是由迹算子诱导出的一个线性算子[1].

从上面的方程中我们看到, 动量方程与连续方程是通过压力 p 而联立在一起的, 连续方程中由于不带有时间导数项而被视为约束方程, 对此我们可以导出通常被称为 Hodge正交分解的著名几何性质, 即 $(Dp, \boldsymbol{u}) = 0$, 这里的圆括号表示 Hilbert空间中的内积. 由这个性质, 我们可以将 $L^2(\quad)$ 分解为两个互相正交的子空间, 具体地讲, 就是

$$H := \left\{ \boldsymbol{u} \quad L^2(\quad) \mid \mathrm{div}\,\boldsymbol{u} = 0, \quad (\boldsymbol{u}) = 0 \right\} \tag{9}$$

和 H 在 Hilbert空间 $L^2(\quad)$ 中的正交补 H

$$H \quad := \left\{ \boldsymbol{u} \quad L^2(\quad) \mid \boldsymbol{u} = \mathrm{grad}\, p, \quad p \quad H^1(\quad) \right\}, \tag{10}$$

基于这个正交分解, 对速度矢量 **u**的任何扰动都可以分解为分别属于这两个子空间的分量的直接和, 而垂直于 H 的分量将被投影算子 $\mathscr{P}$阻尼掉, 这个思想是 Stokes方程乃至 Navier-Stokes方程的理论与数值分析中的基本思想之一.

从 Stokes方程解的存在性和唯一性定理 (如文献 [1] 第二章), 我们知道 Stokes方程的弱解是Helmholtz耗散泛函的极小化子 (minimizer), 因此从Helmholtz耗散泛函出发, 研究 Stokes方程解和 Stokes算子的结构是一个值得考虑的思路.

文献 [1-3], 特别是文献 [1], 都用较大篇幅对 Stokes算子的研究成果进行了详尽的介绍. 近年来, 又有许多作者从不同角度出发对 Stokes算子作了更为深入的研究, 例如文献 [4-8]. 本文另辟蹊径, 从变分原理 (具体的说是从 Helmholtz最小耗散原理) 的角度出发, 采用 Hodge正交分解, 对 Stokes算子进行进一步的分析. 我们的结果可以对文献 [1-3] 的叙述构成有益的补充. 本文的组织结构将按下面的顺序展开: 在第 1节中, 我们将从 Helmholtz最小耗散原理出发, 利用 Hodge正交分解, 从 Helmholtz耗散泛函直接导出 Stokes方程, 同时得到下述结论: Hodge正交分解诱导出两个重要的线性算子, 一个是限制算子 $\mathscr{R}$, 一个是扩张算子 ; 而另一方面, Stokes算子本身也可以从耗散泛函直接导出, 它实际上就是 Helmholtz耗散泛函在 $\boldsymbol{u}$ 处的 Fr chet导算子. 在本文的第 2节, 我们给出限制和扩张算子的一个直接应用, 利用它来计算 Stokes算子的特征值.

1 耗散泛函的 Fr chet导数, G teaux导数和两个诱导算子

这里我们仔细回顾著名的 Helmholtz最小耗散原理. 我们定义下面的泛函:

$$I[\boldsymbol{w}] := \left\{ \frac{1}{2} |D\boldsymbol{w}|^2 - \boldsymbol{f} \quad \boldsymbol{w} \right\} \mathrm{d}x \tag{11}$$

和

$$V := \left\{ \boldsymbol{w} \quad H_0^1(\quad) \mid \mathrm{div}\,\boldsymbol{w} = 0, \text{在} \quad \text{中} \right\}, \tag{12}$$

这里 V 中的拓扑是由 $H_0^1(\quad)$ 中的拓扑限制于 V 上而得, 则我们有

定理 1 假定 V非空, 则存在 $\boldsymbol{u} \quad V$ 使得

$$I[\boldsymbol{u}] = \min_{w \quad V} I[\boldsymbol{w}] \tag{13}$$

且满足 Stokes方程 (1) ~ (3).

事实上, 对上面的泛函取变分: 令 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v}$, 这里 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \quad V, t \quad \mathbf{R}$, 并代入上面的泛函得

$$i(t) = I[\boldsymbol{u}] = \left\{ \frac{1}{2} |D(\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v})|^2 - \boldsymbol{f} \quad (\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v}) \right\} \mathrm{d}x. \tag{14}$$

对参数 t 求导数, 我们有:

$$i(t) = \left\{ (t|D\boldsymbol{v}|^2 + D\boldsymbol{u}\ D\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{f}\ \boldsymbol{v} \right\} \mathrm{d}x. \tag{15}$$

进一步令 $t=0$,

$$0 = i(0) = \left\{ D\boldsymbol{u}\ D\boldsymbol{v} - \boldsymbol{f}\ \boldsymbol{v} \right\} \mathrm{d}x. \tag{16}$$

如果还有 $\boldsymbol{u}\ \ D(\mathscr{A})$, 利用分步积分, 并整理得:

$$0 = \left\{ \boldsymbol{v}\ \nabla^2\boldsymbol{u} - \boldsymbol{f}\ \boldsymbol{v} \right\} \mathrm{d}x = \left\{ (\nabla^2\boldsymbol{u} - \boldsymbol{f})\ \boldsymbol{v} \right\} \mathrm{d}x. \tag{17}$$

我们看到: 第 1, 由于 $\boldsymbol{v}$ 是 V 中的任意函数, 则必有 $(\nabla^2\boldsymbol{u} - \boldsymbol{f})\ \ V$; 第 2, 上面的求导过程是古典的, 亦即, Stokes方程是耗散泛函的 Euler-Lagrange方程, 而从现代技术的观点来看, 我们实际上求得了泛函在 $\boldsymbol{u}$ 的 G teaux微分; 第 3, 上面 (16) 式与 Poisson方程的弱形式完全相同, 只是 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 所属 $H_0^1(\ \ )$ 的零散度子空间 V, 这说明, Stokes方程实际上就是被限制在 V 中的 Poisson方程, 也就是说,

$$\mathscr{A}\boldsymbol{u} = - \ \ \boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{u}\ \ D(\mathscr{A}). \tag{18}$$

基于这一点, 我们可以得出, Stokes算子可以分解为由 Laplace算子 $-$ 和限制算子 $\mathscr{R}$ 复合而成的椭圆型算子, 可写为

$$\mathscr{A} := \mathscr{R}\ \ (-\ \ ). \tag{19}$$

下面令 $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} + \ (\nabla^2\boldsymbol{u} - \boldsymbol{f})$, 由我们上面的假定和推导知 $\boldsymbol{w}\ \ L^2(\ \ )$, 因此我们可以使用 Hodge分解定理知, 一定存在某个足够光滑的平方可积标量函数 p 和 $\boldsymbol{v}\ \ V$ 使得 $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} + Dp$, 且

$$Dp\ \ \boldsymbol{v}\ \mathrm{d}x = 0. \tag{20}$$

这样, 我们就有

$$\boldsymbol{v} + \ (\nabla^2\boldsymbol{u} - \boldsymbol{f}) = \boldsymbol{v} + Dp \tag{21}$$

或者改写为

$$\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} = - \ (\nabla^2\boldsymbol{u} - \boldsymbol{f}) + Dp. \tag{22}$$

我们看到上式左边 $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\ \ V$, 右边项 $(\nabla^2\boldsymbol{u} - \boldsymbol{f})\ \ V$. 如果 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$, 则有

$$Dp = \nabla^2\boldsymbol{u} - \boldsymbol{f}. \tag{23}$$

不然则用 $\boldsymbol{v}$ 点积 (22) 式两端, 得到

$$\boldsymbol{v}\ \ (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v})\,\mathrm{d}x = \boldsymbol{v}\ \ (-\nabla^2\boldsymbol{u} + \boldsymbol{f})\,\mathrm{d}x + \boldsymbol{v}\ \ Dp\,\mathrm{d}x. \tag{24}$$

由上面推导所得正交性知, 上式右边 2项都为 0, 左边显然不为 0. 这是不可能的. 所以只能有

$$Dp = \nabla^2\boldsymbol{u} - \boldsymbol{f}. \tag{25}$$

更进一步, 我们还可以由此得到 Stokes方程的弱形式 (这个过程涉及到更精细的 C_0 逼近, 具体推导可参见文献 [9])

$$D\boldsymbol{u}\ \ D\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}x = p\,\mathrm{div}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}x + \boldsymbol{f}\ \ \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}x, \qquad \boldsymbol{v}\ \ H_0^1(\ \ ). \tag{26}$$

从上面的推导我们看出, 零散度约束通过 Hodge分解实际上诱导出两个重要的连续线性算子, 一个是限制算子 $\mathscr{R}$, 另一个是扩张算子 , 他们之间的关系有

$$\mathscr{R}\ \ = I, \tag{27}$$

这里 I 是恒等算子; 也就是说, 限制算子将 $H_0^2(\ \ )$ 上的 Laplace算子限制在 $D(\mathscr{A})$ 中而成为 Stokes算子, 扩张算子则将 $D(\mathscr{A})$ 上的 Stokes算子扩张到整个 $H_0^2(\ \ )$ 上去. 我们注意到,

Hodge分解中的正交投影实际上扮演了限制算子的角色, 因此限制算子 $\mathscr{R}$可以用正交投影算子 $\mathscr{P}$来替代. 所以上式可以改写为

$$\mathscr{A} := \mathscr{P} \ (- \quad) . \tag{28}$$

另一方面, 我们看到, 对于任意的 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ V,

$$I[\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}] = \frac{1}{2} \quad |D\boldsymbol{u} + D\boldsymbol{v}|^2 \mathrm{d}x - \quad \boldsymbol{f} \ (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \mathrm{d}x . \tag{29}$$

从而有:

$$I[\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}] - I[\boldsymbol{u}] = \quad (D\boldsymbol{u}: D\boldsymbol{v} - \boldsymbol{f} \ \boldsymbol{v}) \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \quad |D\boldsymbol{v}|^2 \mathrm{d}x . \tag{30}$$

上式右端第 1项实际上就是耗散泛函 I在 $\boldsymbol{u}$处对于 $\boldsymbol{v}$的 Fr chet微分, 而耗散泛函 I在 $\boldsymbol{u}$处的 Fr chet导算子就是我们讨论的 Stokes算子. 比较本文开始时的叙述, 我们认识到 Stokes算子不仅可以从偏微分方程诱导而来, 也可以直接通过 Helmholtz耗散泛函的 Fr chet导算子求得.

值得指出的是, Laplace算子和 Stokes算子都是自伴的[1-2], 这是一个值得庆幸的性质, 因为一个自伴的算子被限制或者被扩张之后并不一定仍然是自伴的.

2 算子特征值的计算

在这节里, 我们给出上节结果的一个直接应用的例子: 计算 Stokes算子的特征值.

计算算子的特征值一直是算子谱理论里的重要内容. 具体到如何计算 Stokes算子的特征值, 更是在研究流动稳定性和分岔分析等诸多应用领域起到了重要作用. 根据 Hilbert的理论, Stokes算子存在可数多个实特征值, 即

$$0 < \quad _1 < \quad _2 \qquad _n \qquad . \tag{31}$$

一般情形下不易找到 Stokes算子特征值的显式表达式. 一般认为, 这种困难是由于投影算子和 Laplace算子不可交换所致; 只有在某些特殊情况, 如 $= R^n$ 或者 n维环面 T^n (亦即 $\boldsymbol{u}$和 $\boldsymbol{f}$在空间上呈现出某种周期性)时, 投影算子和 Laplace算子是可交换的, 这时有著名的 Leray显式解公式, 也可以对 $\boldsymbol{u}$进行傅氏分析. 但是到了一般情形下, 这些结果都是不能成立的, 因此利用分离变量法等方法来计算算子的特征值也常常是很困难的[6-8].

文献 [10] 给出了一种计算一致椭圆微分算子的变分方法. 在本文中, 我们尝试使用这个方法来计算 Stokes算子的特征值.

根据文献 [10] 75, 对于一致椭圆型算子 $\mathscr{A}$, 我们有如下弱形式的定义:

定义 对实数 , 如果存在 $0 \quad \boldsymbol{u}(x) \quad H_0^1(\quad)$, 使得

$$(\mathscr{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \quad (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}), \qquad \boldsymbol{v} \quad H_0^1(\quad), \tag{32}$$

则称 为算子 $\mathscr{A}$ 的 (广义) 特征值, $\boldsymbol{u}$是对应于特征值 的 (广义) 特征函数.

基于上面的定义, 根据 Stokes方程 $H_0^1(\quad)$ 弱形式, 我们有 Stokes算子特征值问题的表达式:

$$D\boldsymbol{u} \quad D\boldsymbol{v} - p \, \mathrm{div}\boldsymbol{v} \mathrm{d}x = \quad \boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{v} \mathrm{d}x, \qquad \boldsymbol{v} \quad H_0^1(\quad), \tag{33}$$

这里, $p \quad L^2(\quad)$ 是对应于零散度约束的 Lagrange乘子. 接下来, 我们定义:

$$Q(\boldsymbol{u}) = (\mathscr{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = \quad D\boldsymbol{u} \quad D\boldsymbol{u} - p \, \mathrm{div}\boldsymbol{u} \mathrm{d}x \tag{34}$$

和

$$J(\boldsymbol{u}) = \frac{Q(\boldsymbol{u})}{\|\boldsymbol{u}\|_{L^2}^2}, \qquad 0 \quad \boldsymbol{u}(x) \quad H_0^1(\quad) . \tag{35}$$

我们试图证明下面的定理:

定理 2　如果定义

$$\lambda_1 = \inf_{0 \neq u \in H_0^1(\Omega)} \frac{Q(\boldsymbol{u})}{\|\boldsymbol{u}\|_{L^2}^2} = \inf_{u \in H_0^1(\Omega),\ \|u\|=1} Q(\boldsymbol{u}), \tag{36}$$

则 $\lambda_1 \geq c > 0$是 Stokes算子的最小特征值, 这里 c是一个正的常数.

从上面的理论框架出发, 我们将在一个我们非常乐于见到的, 性质非常整齐的函数空间 $H_0^1(\Omega)$ 中寻求 Stokes算子的特征值 λ_m 和特征函数 $\boldsymbol{u}_m$ $(m=1, 2, \cdots)$, 但我们将遇到的困难是, 如果沿用文献[10] 的方法, 我们无法避开式(33) 泛函中的 Lagrange乘子项 $p\,\mathrm{div}\boldsymbol{u}$, 而这实际上又回到了本节开始时提到的困难.

但另一方面, 只要我们回顾 Helmholtz最小耗散原理, 利用上节得到的限制算子的方法, 就会发现解决上述问题的有效途径. 我们注意到, 在这个提法中, 耗散泛函里是没有 Lagrange乘子的, 但 $\boldsymbol{u}$所属的函数空间发生了改变, 具体地说, 取 $\boldsymbol{u} \in V$, 则 Stokes算子的特征值问题改写为

$$\int_\Omega D\boldsymbol{u} : D\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}x = \lambda \int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}x, \quad \forall \boldsymbol{v} \in V, \tag{37}$$

相应的, 泛函 Q 也重新定义为

$$Q(\boldsymbol{u}) = \int_\Omega D\boldsymbol{u} : D\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}x, \tag{38}$$

这里, 我们不再考虑算子 $\mathscr{A}|_{H_0^1(\Omega)}$, 而是考虑算子 $\mathscr{A}|_V$, 这里的投影算子 $\mathscr{P}$可以视为限制算子. 而根据 Lagrange乘子法的基本思想, 上面这两种表达式所求得的极值是相等的. 这样我们就将上面提到的困难进行了转化, 而新的问题是容易解决的.

定理 3　如果定义

$$\lambda_1 = \inf_{0 \neq u \in V} \frac{Q(\boldsymbol{u})}{\|\boldsymbol{u}\|_{L^2}^2} = \inf_{u \in V,\ \|u\|=1} Q(\boldsymbol{u}), \tag{39}$$

则 $\lambda_1 \geq c > 0$是 Stokes算子的最小特征值, 这里 c是一个正的常数.

定理 3的证明　取 V中的单位球上的极小化序列 $\boldsymbol{u}_k$, 即

$$\boldsymbol{u}_k \in V, \quad \|\boldsymbol{u}_k\|_{L^2} = 1 \quad (k = 1, 2, \cdots) \tag{40}$$

使得

$$\lim_{k\to\infty} Q(\boldsymbol{u}_k) = \lambda_1. \tag{41}$$

由上式知数列$\{Q(\boldsymbol{u}_k)\}$ 有界. 由泛函 Q 的定义及 Poincare不等式

$$Q(\boldsymbol{u}) = \int_\Omega |D\boldsymbol{u}|^2\,\mathrm{d}x \geq c\|\boldsymbol{u}\|_{L^2} \tag{42}$$

知数列$\{\|\boldsymbol{u}_k\|_{H_0^1}\}$ 有界, 即 $\boldsymbol{u}_k$ 是$H_0^1(\Omega)$中的有界序列. 由文献[10]定理 2.6.3知序列 $\boldsymbol{u}_k$ 是 $L^2(\Omega)$中的列紧集. 因此, $\boldsymbol{u}_k$ 有收敛的子序列, 不妨仍记为 $\boldsymbol{u}_k$, 并由 $L^2(\Omega)$ 的完备性, 它在 $L^2(\Omega)$中收敛到一个函数 $\boldsymbol{u} \in L^2(\Omega)$, 即

$$\|\boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{u}\|_{L^2} \to 0, \quad k \to \infty. \tag{43}$$

且 $\|\boldsymbol{u}\|_{L^2} = 1$, 进一步还有,

$$\left\|\frac{\boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{u}_l}{2} - \boldsymbol{u}\right\|_{L^2} \leq \frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{u}\|_{L^2} + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{u}_l - \boldsymbol{u}\|_{L^2} \to 0, \quad k, l \to \infty, \tag{44}$$

并由此知

$$\left\|\frac{\boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{u}_l}{2}\right\|_{L^2} \to \|\boldsymbol{u}\|_{L^2} = 1. \tag{45}$$

因为 $Q(\boldsymbol{u})$ 是 $\boldsymbol{u}$ 的二次泛函, 所以

$$Q\left(\frac{\boldsymbol{u}_k+\boldsymbol{u}_l}{2}\right)+Q\left(\frac{\boldsymbol{u}_k-\boldsymbol{u}_l}{2}\right)=\frac{1}{2}Q(\boldsymbol{u}_k)+\frac{1}{2}Q(\boldsymbol{u}_l). \tag{46}$$

另外由 $_1$ 的定义知

$$Q(\boldsymbol{u}) \quad _1\|\boldsymbol{u}\|^2_{L^2}, \qquad \boldsymbol{u} \quad V. \tag{47}$$

综合上面的结果, 我们有

$$\left\|\frac{\boldsymbol{u}_k-\boldsymbol{u}_l}{2}\right\|^2_{H^1} \quad Q\left(\frac{\boldsymbol{u}_k-\boldsymbol{u}_l}{2}\right) \quad \frac{1}{2}Q(\boldsymbol{u}_k)+\frac{1}{2}Q(\boldsymbol{u}_l)- \ _1\left\|\frac{\boldsymbol{u}_k+\boldsymbol{u}_l}{2}\right\|^2_{L^2}, \tag{48}$$

这里 是某个常数. 将式(41)和(45)代入上式, 我们得上式右端收敛于 0, 从而说明 $\boldsymbol{u}_k$ 是 H_0^1 中的 Cauchy 序列. 再由极限的唯一性及 $H_0^1(\ )$ 的完备性知

$$\|\boldsymbol{u}_k-\boldsymbol{u}\|_{H_0^1} \quad 0, \qquad \boldsymbol{u} \quad H_0^1(\ ). \tag{49}$$

从而知

$$D\boldsymbol{u}_k \quad D\boldsymbol{u}, \qquad \text{在 } L^2(\ ) \text{中}. \tag{50}$$

所以

$$0=\operatorname{div}\boldsymbol{u}_k \quad \operatorname{div}\boldsymbol{u}, \qquad \text{在 } L^2(\ ) \text{中}, \tag{51}$$

也就是说, $\boldsymbol{u} \quad V$. 据此, 及 Cauchy-Schwarz 不等式, 我们有:

$$\begin{aligned}|Q(\boldsymbol{u}_k)-Q(\boldsymbol{u})| &= \left| \quad |D\boldsymbol{u}_k|^2-|D\boldsymbol{u}|^2 \mathrm{d}x\right| \\ &\quad (\|D\boldsymbol{u}\|_{L^2}+\|D\boldsymbol{u}_k\|_{L^2})\|D(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_k)\|_{L^2}.\end{aligned} \tag{52}$$

根据前面的结果, 上式右边显然是收敛于 0 的. 因此我们有:

$$_1=\lim_{k} Q(\boldsymbol{u}_k)=Q(\boldsymbol{u})=J(\boldsymbol{u})= {}_0\inf_{\boldsymbol{v}\ V} J(\boldsymbol{v}). \tag{53}$$

最后, 我们通过计算泛函 J 的 Euler-Lagrange 方程, 即取

$$\frac{J(\boldsymbol{u}+t\boldsymbol{v})}{t}=0, \qquad \boldsymbol{v} \quad V, \quad t \quad R, \tag{54}$$

立刻得到(具体过程参见文献[10])

$$(\mathscr{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})= \ _1(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}), \qquad \boldsymbol{v} \quad V. \tag{55}$$

这说明, $_1$ 是 Stokes 算子的特征值, $\boldsymbol{u}$ 是对应于 $_1$ 的特征函数. 至于 $_1$ 的最小性是很容易得到的[10]. 证毕.

假设我们已经算出算子 $\mathscr{A}$ 的 $m-1$ 个特征值 $_1, \ , \ _{m-1}, m \quad 2$, 且有

$$0< \ _1 < \ _2 \qquad _{m-1}, \tag{56}$$

对应于 $_1, \ _2, \ , \ _{m-1}$ 的特征函数为 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ , \boldsymbol{u}_{m-1}$, 且 $\|\boldsymbol{u}_k\|_{L^2}=1 (k=1, 2, \ , m-1)$. 记

$$V_{m-1}:=\operatorname{span}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ , \boldsymbol{u}_{m-1}\} \tag{57}$$

是特征函数 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ , \boldsymbol{u}_{m-1}$ 在 $L_2(\ )$ 中张成的子空间, V_{m-1} 是 V_{m-1} 在 $L^2(\ )$ 中的正交补. 我们可以利用下面的定理求出算子 $\mathscr{A}$ 的全部特征值.

定理 4

$$_m= \inf_{0\ \boldsymbol{u}\ V\ V_{m-1}} \frac{Q(\boldsymbol{u})}{\|\boldsymbol{u}\|^2_{L^2}} = \inf_{\boldsymbol{u}\ V\ V_{m-1},\ \boldsymbol{u}\ =1} Q(\boldsymbol{u}) \tag{58}$$

是 Stokes 算子的第 m 个特征值.

定理 4 的证明基本与文献[10]相同, 请读者参阅文献[10] 80.

[参 考 文 献]

[1] Constantin P, Foias C. The Navier-Stokes Equations [M]. Chicago: University of Chicago Press, 1992.

[2] Temam R. Navier-Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis [M]. 2nd Ed. Philadelphia: SIAM, 1995.

[3] Temam R. Navier-Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis [M]. 3rd Ed. Amsterdam: North-Holland, 1984.

[4] Abels H, Teresawa Y. On Stokes operators with variable viscosity in bounded and unbounded domains[J]. Math Ann, 2009, **344**(2): 381-429.

[5] Bae Hyeon-Ohk. Analyticity of the Stokes operator in Besov spaces[J]. J Korean Math Soc, 2003, **40**(6): 1061-1074.

[6] Lee D-S, Rummler B. Then eigenfunctions of the Stokes operator in special domains[J]. ZAMM, 2002, **82**(6): 399-407.

[7] Turinsky V V. A lower bound for the principle eigenvalue of the Stokes operator in a random domain[J]. Ann Inst Henri Poincar Prob Stat, 2008, **44**(1): 1-18.

[8] 王立周, 李东升, 李开泰. 球间隙区域上的 Stokes算子的特征值问题及应用[J]. 高校应用数学学报, A辑, 2001, **16**(2): 87-96.

[9] 陈波, 李孝伟, 刘高联. Hodge分解在最小耗散原理中的应用[J]. 数学的实践和认识, 2009, **39**(8): 197-200.

[10] 陆文端. 微分方程中的变分方法[M]. 北京: 科学出版社, 2003.

Constraint Induced Restriction and Extension Operators With Applications

CHEN Bo, LI Xiao-wei, $\boxed{\text{LIU Gao-lian}}$

(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics,
Shanghai University, Shanghai 200072, P. R. China)

Abstract: The Stokes operator is a differential-integral operator induced by the Stokes equations. From the point of view of the Helmholtz minimum dissipation principle the Stokes operator was analyzed. It's shown that, through the Hodge orthogonal decomposition, a pair of bounded linear operators, namely, a restriction operator and an extension operator, are induced from the divergence-free constraint. As a consequence of the observation, it's utilized to calculate the eigenvalues of the Stokes operator.

Key words: the Stokes operator; induced operators; restriction and extension; variational method; Hodge decomposition; eigenvalue problem